



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**PESQUISA E PRODUÇÃO DE NOVOS MATERIAIS E  
MÉTODOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA**

**LUIZ ALBERTO BRETTAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção

**FLORIANÓPOLIS  
2005**

**LUIZ ALBERTO BRETTAS**

**PRODUÇÃO DE NOVOS MATERIAIS E MÉTODOS PARA O  
ENSINO DE MATEMÁTICA**

**Esta Tese foi julgada e aprovada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina.**

Florianópolis, 10 de março de 2005.

Prof. Edson Pacheco Paladini, PhD.  
Coordenador do Curso

**BANCA EXAMINADORA:**

---

**PROF<sup>a</sup>. EDIS MAFRA LAPOLLI, DR<sup>a</sup>.  
ORIENTADORA**

---

**PROF. JOÃO ARTUR DE SOUZA, DR.  
EXAMINADOR EXTERNO**

---

**SONIA MARIA PEREIRA, DR<sup>a</sup>.  
EXAMINADORA**

---

**PROF. GERTRUDES A. DANDOLINI, DR<sup>a</sup>.  
EXAMINADORA EXTERNA**

---

**FERNANDO ÁLVARO OSTUNI GAUTHIER, DR.  
MODERADOR**

“Procurava Cristo e não o encontrava. Procurava a mim mesmo e nunca me encontrava. Um dia, encontrei um amigo e, juntos, caminhamos os três.”

(Anônimo – apresentado por Eduardo Galeano em *Dias e Noites de Amor e de Guerra*)

A meus pais, Alfredo e América.

# Agradecimentos

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse realizar este trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

À Universidade Federal de Pelotas, pela liberação de minhas atividades acadêmicas para realização deste Doutorado.

À Universidade Federal de Santa Catarina, em especial ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

A todos os educadores com que tive a felicidade de cruzar em meu caminho.

A todos os meus alunos por contribuírem para meu crescimento profissional.

Aos professores membros da banca examinadora pela avaliação e contribuição para o aperfeiçoamento deste trabalho.

À Prof<sup>a</sup>. Edis Mafra Lapolli, pela orientação, incentivo e confiança recebidos durante a execução deste trabalho e por sua energia e alegria.

Um agradecimento todo especial a meus irmãos e irmãs, ao Andrei, à Camila, à Mara e à Gabriele, que sempre souberam estar a meu lado, sofrendo ou vibrando comigo.

E, finalmente, a todo esse conjunto de prós e contras, coisas e seres (concretos ou não) que fazem parte de tudo o que vivemos...

# Índice Geral

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO .....	13
1.2	RELEVÂNCIA E ORIGINALIDADE .....	18
1.3	OBJETIVOS.....	20
1.3.1	<i>Objetivo Geral</i> .....	20
1.3.2	<i>Objetivos Específicos</i> .....	20
1.4	METODOLOGIA DA PESQUISA .....	21
1.5	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	22
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>24</b>
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	24
2.2	ASPECTOS INTERVENIENTES DA APRENDIZAGEM .....	27
2.2.1	<i>O aluno é o agente da aprendizagem</i> .....	27
2.2.2	<i>Do prazer na aprendizagem</i> .....	28
2.2.3	<i>O que se tem para aprender deve representar algum significado para o aluno</i> 30	
2.2.4	<i>É importante que os alunos realizem tarefas coletivas</i> .....	32
2.2.5	<i>O conhecimento precisa ser construído em sala de aula</i> .....	33
<b>3</b>	<b>MODELOS PROPOSTOS .....</b>	<b>36</b>
3.1	CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS E GRÁFICOS RELATIVOS A FUNÇÕES POLINOMIAIS DE PRIMEIRO GRAU .....	36
3.1.1	<i>Considerações Iniciais</i> .....	36
3.1.2	<i>Modelo Proposto</i> .....	36
3.1.3	<i>O mesmo Modelo: Uma outra Proposição</i> .....	42
3.2	CONSTRUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO CARTESIANA PLANA .....	43
3.2.1	<i>Considerações Iniciais</i> .....	43
3.2.2	<i>Modelo Proposto</i> .....	44
3.3	CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE TANGENTE .....	49
3.3.1	<i>Considerações Iniciais</i> .....	49
3.3.2	<i>Modelo Proposto</i> .....	51
3.4	CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE EQUAÇÃO.....	56
3.4.1	<i>Considerações Iniciais</i> .....	56
3.4.2	<i>Modelo Proposto</i> .....	56
3.5	CONSTRUÇÃO DA NOTAÇÃO POSICIONAL DOS NÚMEROS E DA BASE PARA UM ALGORITMO PARA A OPERAÇÃO DE SOMA .....	60
3.5.1	<i>Considerações Iniciais</i> .....	60
3.5.2	<i>Modelo Proposto</i> .....	62
3.5.3	<i>Algumas considerações finais</i> .....	69
3.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	71
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES.....</b>	<b>73</b>
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	73
4.2	ATIVIDADES PARA LEVAR ESTUDANTES À CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS E GRÁFICOS RELATIVOS A FUNÇÕES POLINOMIAIS DE PRIMEIRO GRAU .....	74
4.2.1	<i>Descrição da Turma</i> .....	74

4.2.2	<i>Atividades de Revisão de Pré-Requisitos</i> .....	74
4.2.3	<i>Material utilizado</i> .....	74
4.2.4	<i>Procedimentos</i> .....	75
4.3	ATIVIDADES PARA LEVAR ESTUDANTES À CONSTRUÇÃO DE REPRESENTAÇÕES CARTESIANAS PLANAS .....	83
4.3.1	<i>Descrição da turma</i> .....	84
4.3.2	<i>Atividades de revisão de pré-requisitos</i> .....	84
4.3.3	<i>Material utilizado</i> .....	84
4.3.4	<i>Procedimentos</i> .....	85
4.4	ATIVIDADES PARA LEVAR ESTUDANTES À CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE TANGENTE 98	
4.4.1	<i>Descrição da turma</i> .....	98
4.4.2	<i>Procedimentos</i> .....	99
4.5	ATIVIDADES PARA LEVAR ESTUDANTES À CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE EQUAÇÃO 104	
4.5.1	<i>Descrição das turmas</i> .....	104
4.5.2	<i>Atividades de revisão de pré-requisitos</i> .....	104
4.5.3	<i>Material utilizado</i> .....	105
4.5.4	<i>Procedimentos</i> .....	105
4.6	ATIVIDADES PARA LEVAR ESTUDANTES À CONSTRUÇÃO DA NOTAÇÃO POSICIONAL DOS NÚMEROS.....	112
4.6.1	<i>Descrição das turmas</i> .....	112
4.6.2	<i>Material utilizado</i> .....	113
4.6.3	<i>Procedimentos</i> .....	113
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....</b>	<b>125</b>
5.1	CONCLUSÕES .....	125
5.2	RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS .....	126
<b>6</b>	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>128</b>

## Índice de Ilustrações

Ilustração 1: Modelo para representação de posição em superfície plana na etapa 1 .....	45
Ilustração 2: Modelo para representação de posição em superfície plana para a etapa 2.....	46
Ilustração 3: Modelo para representação de posição em superfície plana para a etapa 3.....	47
Ilustração 4: Representação cartesiana a ser feita, no pátio, pelo professor.....	48
Ilustração 5: Representação gráfica de ângulo e identificação de segmentos verticais e horizontais. ....	50
Ilustração 6: Representações de segmentos perpendiculares à direção vertical escolhida.....	51
Ilustração 7: Representação de ângulo obtuso.....	52
Ilustração 8: Representações de quatro ângulos diferentes .....	54
Ilustração 9: Esboço gráfico indicando projeção de luz solar sobre um mastro e uma haste menor.....	55
Ilustração 10: Peças com valores de pesos conhecidos.....	56
Ilustração 11: Peças com valores desconhecidos de peso.....	57
Ilustração 12: Conjunto de peças para montagem de balança de equilíbrio.....	57
Ilustração 13: Uma barra e equivalentes dez cubinhos.....	61
Ilustração 14: Um conjunto de dez barras e seu equivalente, uma placa. ....	61
Ilustração 15: Dez placas empilhadas e um cubo grande. ....	62
Ilustração 16: Dados para o jogo da primeira variação do modelo. ....	63
Ilustração 17: Dados para serem utilizados na segunda variação do modelo proposto.....	65
Ilustração 18: Dados com valores maiores para jogos com o cubo grande.....	67
Ilustração 19: Elaboração de uma soma de dois números através de um procedimento diferente do clássico. ....	69
Ilustração 20: Material alternativo ao Material Dourado, representando unidades, dezenas e centena na ordem de cima para baixo.....	70
Ilustração 21: Princípio da notação posicional de números não inteiros.....	71
Ilustração 22: Material utilizado pelos alunos na experiência.....	75
Ilustração 23: Construção de uma pista por onde o carro andaria.....	75
Ilustração 24: Carro andando numa pista. ....	76
Ilustração 25: Execução de tomada de tempo com cronômetro.....	76
Ilustração 26: Alunos realizando tomadas de tempo com o carrinho deslocando-se sobre uma pista marcada num pedaço de formulário contínuo em sala de aula. ....	78
Ilustração 27: Alunos fazendo tomadas de tempo com o carrinho deslocando-se sobre a mesa de um laboratório de química. ....	78
Ilustração 28: Pista desenhada com giz no piso de um laboratório de química. ....	79
Ilustração 29: Primeiro gráfico do grupo "Therê". ....	80
Ilustração 30: Primeiro gráfico do grupo "Temporal".....	81
Ilustração 31: Croqui representando o prédio e o pátio da escola onde se realizou a experiência.....	85
Ilustração 32: Alunos ajudando um dos observadores da experiência a enterrar as estacas. ...	86
Ilustração 33: Alunos tentando encontrar as estacas de suas equipes. ....	86
Ilustração 34: Parte da primeira Representação da equipe vermelha na etapa 1.....	87
Ilustração 35: Primeira representação da equipe rosa na etapa 1.....	87
Ilustração 36: Segunda representação da equipe rosa na etapa 1.....	88
Ilustração 37: Primeira representação da equipe preta na etapa 1.....	88
Ilustração 38: Parte da primeira representação da equipe marrom na etapa 1.....	89
Ilustração 39: Parte da segunda representação da equipe marrom na etapa 1.....	89



Ilustração 40: Primeira representação da equipe verde na etapa 1.....	90
Ilustração 41: Segunda representação da equipe verde na etapa 1.....	90
Ilustração 42: Parte da primeira representação da equipe azul na etapa 1.....	91
Ilustração 43: Primeira representação da equipe amarela na etapa 1.....	91
Ilustração 44: Segunda representação da equipe amarela na etapa 1.....	92
Ilustração 45: Representação da equipe azul - etapa 3.....	93
Ilustração 46: Representação da equipe marrom - etapa 3.....	93
Ilustração 47: Representação da equipe verde - etapa 3.....	93
Ilustração 48: Croqui representando o local onde foi fixada a placa na qual estava escrito "4,2".....	94
Ilustração 49: Croqui mostrando a posição, no pátio, da estaca da equipe vermelha na primeira fase da etapa 4.....	95
Ilustração 50: Primeira representação da equipe vermelha na etapa 4.....	95
Ilustração 51: Croqui representando a posição B (segunda fase da etapa 4) da equipe amarela no pátio da escola.....	96
Ilustração 52: Representação da posição B do pátio (fase 2) na etapa 4 feita pela equipe amarela.....	96
Ilustração 53: Croqui representando a posição do símbolo da equipe verde no pátio da escola na terceira fase da etapa 4.....	97
Ilustração 54: Representação da posição do símbolo da equipe verde no pátio (terceira fase da etapa 4).....	97
Ilustração 55: Aluna traçando segmentos perpendiculares à direção horizontal.....	99
Ilustração 56: Representação de um obtusângulo.....	100
Ilustração 57: Desenho de ângulo e tabela com valores de catetos e divisões entre eles.....	100
Ilustração 58: Tabela com medidas de segmentos e resultados de divisões.....	101
Ilustração 59: Aluna fixando o trabalho na parede.....	102
Ilustração 60: Quatro ângulos representados.....	102
Ilustração 61: Conjunto de peças para montagem de balança de equilíbrio.....	106
Ilustração 62: Balança de equilíbrio montada sendo utilizada pelos alunos.....	106
Ilustração 63: Alunos trabalhando com a balança de equilíbrio.....	108
Ilustração 64: Representações de estruturas feitas pelos alunos com o Material Dourado....	114
Ilustração 65: Tabela com resultado parcial do primeiro jogo realizado pela turma de sexta série.....	115
Ilustração 66: Dado grande lançado ao chão.....	116
Ilustração 67: Tabela apresentando resultados parciais da equipe <i>Apocalipse</i> no jogo.....	116
Ilustração 68: Resultados dos pontos das equipes no quadro-negro.....	117
Ilustração 69: Tabela com pontos marcados durante o jogo.....	119
Ilustração 70: Aluno lançando o dado ao chão.....	120
Ilustração 71: Dado lançado ao chão.....	120
Ilustração 72: Quadro utilizado para os alunos da 1a série marcarem seus pontos no jogo...	121
Ilustração 73: Anotações de pontos do aluno Guilherme.....	122
Ilustração 74: Representação de número de valor metade da unidade.....	124

## Índice de Tabelas

Tabela 1: Cálculo de quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo.....	53
Tabela 2: Descrição das peças de valores desconhecidos, inicialmente, pelos alunos.....	58
Tabela 3: Tabela para os alunos anotarem suas quantidades de cubinhos e barras durante o jogo.....	64
Tabela 4: Folha para os alunos anotarem suas quantidades de cubinhos, barras e placas durante o jogo.....	66
Tabela 5: Tabela de anotações de pontos no jogo da segunda variação do modelo.....	68
Tabela 6: Primeira tabela construída pelo grupo “Therê”.....	79
Tabela 7: Primeira tabela construída pelo grupo “Temporal”.....	80
Tabela 8: Identificação e descrição dos conjuntos de peças fornecidos aos grupos de alunos. .....	107

## RESUMO

O presente trabalho trata da pesquisa e produção de novos materiais e métodos para o ensino de matemática no Nível Básico. A partir de um levantamento feito pelo autor, constatou-se a existência de uma grande demanda por orientações de como se proceder para levar estudantes desse Nível de Ensino a aprenderem matemática e a pouca oferta de referências que indicam procedimentos aos professores dos Níveis Fundamental e Médio de Ensino para atuarem nesse sentido. Assim, foram produzidos materiais e elaboradas estratégias didáticas com a finalidade de suprir a demanda existente. Os modelos de aulas que foram produzidos orientaram-se pela perspectiva da construção do conhecimento pelo próprio aluno através de sua participação em atividades recreativas ou de investigação. Essas estratégias foram experimentadas em escolas desde as primeiras séries do Nível Fundamental até as séries do Nível Médio de Ensino. Antes das experiências, foram feitas investigações, através de entrevistas com alunos e seus professores, com o intuito de verificar as condições do trabalho desses professores com esses estudantes. Também depois das experiências, foram feitas entrevistas com esses mesmos alunos e professores para ver que efeitos essas experiências tiveram. As observações das experiências realizadas e as entrevistas feitas mostraram que os modelos propostos são eficazes para a aprendizagem de matemática dos alunos envolvidos com elas. Foi evidenciado, também, que essas experiências levaram os professores desses alunos a refletirem mais sobre suas práticas educativas e a perceberem novas alternativas para suas aulas de matemática.

Palavras-chave: Ensino. Aprendizagem. Matemática. Método. Materiais.

## **ABSTRACT**

The present work deals with research and production of new tools and methods for teaching mathematics in Elementary School. A survey had shown that exists a great demand for orientations about how to lead students of this Level of Education to learn mathematics and very few offers of references that indicate procedures to the teachers of Elementary and Middle Levels of Education to act in that direction. Thus, It had been produced tools and elaborated didactic strategies for supplying the existing demand. The lessons models that had been produced had been based upon the perspective of pupil constructing his own knowledge by participating in ludic or investigative activities. These strategies had been experimented in Elementary and Middle School series mathematics classes. Before the experiences, inquiries had been made, by interviewing pupils and its teachers, to verify the conditions of the work of these professors with these students. After the experiences, the same pupils and teachers had also been interviewed in order to verify how these experiences affected them. Observations of the experiences and the interviews had shown that the considered models are efficient for teaching mathematics. It has also been shown that these experiences had led the teachers to reflect more upon their practices and to perceive new alternatives for their mathematics lessons.

Keywords: Teaching. Learning. Mathematics. Methods. Tools.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização

É de conhecimento geral que o ensino, no Brasil, tem obtido precários resultados, tanto no que diz respeito aos estudos que envolvem principalmente habilidades na leitura e escrita (que aparece com maior clareza, uma vez que se trata de comunicação com outras pessoas), quanto no desenvolvimento de estudos de matemática. Particularmente, em se tratando desses últimos, as limitações com que as crianças chegam, por exemplo, à quinta série do nível Fundamental dificultam seus estudos nesse estágio e nos seguintes. De acordo com os dados do Sistema Nacional de Avaliação da Escola Básica (SAEB) em 2001, 59% dos alunos brasileiros da 4ª série do ensino fundamental não desenvolveram competências elementares de leitura e 52% demonstram profundas deficiências em Matemática. Ainda, de acordo com o SAEB, apenas 6% dos alunos tem o nível desejado<sup>1</sup> em matemática (Araújo<sup>2</sup> & Nildo<sup>3</sup>, 2004).

Muitos professores de matemática das séries de 5ª a 8ª do Nível Fundamental, simplesmente, entendem que a eliminação dessas dificuldades dos alunos é da responsabilidade única dos professores das séries iniciais. Dos que entendem que faz parte do seu trabalho resolver esses problemas de "pré-requisitos", alguns não têm formação suficiente para realmente resolver esses problemas, pois as universidades não os preparam para o trabalho no nível das séries iniciais, uma vez que este envolve outros tipos de habilidades que não as necessárias para o ensino nas séries seguintes às iniciais do Ensino Fundamental.

Poder-se-ia especular que essa situação existe por causa dos limites em termos de desenvolvimento de nosso país, não fosse a situação de países desenvolvidos como, por exemplo, os Estados Unidos da América. Pela avaliação elaborada durante os anos de 1991 e

---

<sup>1</sup> Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais.

<sup>2</sup> Diretor de Avaliação da Educação Básica do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP/MEC)

<sup>3</sup> Assessor da Diretoria de Avaliação da Educação Básica do INEP

1992 pelo “U.S. Department of Education”<sup>4</sup> com estudantes cursando as últimas séries do equivalente Nível Fundamental e do Nível Médio nos EUA, percebe-se a grande limitação na aprendizagem de conceitos e habilidades matemáticos do Nível Básico de ensino naquele país. Nesse levantamento, estudantes, escolhidos aleatoriamente, foram submetidos a testes envolvendo habilidades e compreensão de conceitos básicos de matemática. O resultado evidenciou o baixo nível de aprendizagem de matemática. Outro levantamento, feito em 2003, mostrou que a situação do ensino de matemática naquele país ainda se encontrava difícil (NAEP, 2004).

Entende-se que, além de se observar a necessidade de se levarem os estudantes à construção de saberes que se consideram importantes, precisa-se salientar a relevância do desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático para todas as áreas do conhecimento humano. Embora, para muitas áreas, a superação de alguns conceitos de lógica matemática é necessária, os princípios básicos mantêm-se válidos em grande parte do pensamento científico em geral. Assim, os problemas citados no parágrafo anterior devem fazer parte da preocupação dos educadores envolvidos com o Nível Fundamental de Ensino.

Parte do resultado desses problemas foram observados nos alunos de cursos das áreas de “ciências exatas”<sup>5</sup>, como as Engenharias, Informática, Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física por exemplos. O que chama, particularmente, a atenção, é o fato de que os alunos que entram nesses cursos, em geral, declaram “gostar”<sup>6</sup> de estudar matemática. Ainda assim, muitos deles chegam à universidade com dificuldades em interpretar (e expressar) resultados matemáticos elementares, que entendemos como o “bê-a-bá” da área nos níveis básicos de ensino. Especula-se que em outras áreas o problema deve ser muito maior.

Particularmente, num levantamento feito em duas turmas de primeiro semestre de Licenciatura em Matemática (na Universidade Federal de Pelotas), constatou-se um indício de forte relação entre as dificuldades de raciocínio lógico-matemático e as dificuldades com a interpretação e produção textual. Os alunos ingressantes no curso passaram por uma avaliação (elaborada por professores do Curso de Letras da UFPel) que objetivava identificar limitações

---

<sup>4</sup> Equivalente ao Ministério de Educação no Brasil.

<sup>5</sup> Não interessa tratar, aqui, das confusões e preconceitos que essa expressão carrega consigo.

dos ingressantes no curso em termos de leitura e produção de textos. Identificou-se um grupo de alunos que apresentavam dificuldades em interpretar textos e em se expressar com clareza ao escrever. Durante a disciplina de Lógica Matemática, esses mesmos alunos foram os que mostravam maior dificuldade para entender as construções formais de lógica matemática. Também, esses mesmos alunos apresentavam dificuldades maiores do que os demais em outras disciplinas de matemática, como cálculo, geometria e álgebra.

O ensino da matemática tem passado por grandes mudanças nos últimos anos. É verdade que, com frequência, professores de matemática ainda ministram suas aulas como se fazia a cem anos atrás. Por outro lado, alguns educadores da área têm buscado novas alternativas de como abordar os conteúdos que se julgam importantes para a formação dos jovens. A principal preocupação é com a perspectiva utilizada: enquanto, tradicionalmente, a tarefa de ensinar é centrada no professor, em contraposição a isso, as novas tendências buscam retomar o caminho por onde a aprendizagem realmente acontece: é o aprendiz quem aprende e é a partir dele que se devem construir os saberes.

Nas muitas ocasiões em que o autor desta Tese tem ministrado cursos a professores do Nível Básico de Ensino, constatou-se que a maior reclamação dos professores desse nível de ensino, imediatamente depois dos baixos salários, é a de que eles carecem de orientações de como ensinar. Grande parte desses professores queixa-se das dificuldades em fazer com que seus alunos aprendam matemática.

Considerando-se que muitos desses mesmos professores que se queixam da falta de orientação carregam, consigo, uma concepção de ensino baseada na idéia de "transferência" de conhecimento de uma pessoa para a outra, entende-se que essa queixa se justifica em muitas ocasiões. Se, por um lado, ainda a maioria dos professores de séries iniciais no Brasil tem apenas formação de Nível Médio - Magistério (Araújo & Nildo, 2004), por outro, também, muitos cursos de Licenciatura não oferecem a seus alunos uma adequada orientação no que diz respeito à prática de sala de aula. Assim, entende-se que é de extrema importância que se desenvolvam modelos práticos a serem aplicados (ou adaptados para aplicação) em aulas de matemática do Nível Básico de Ensino. Longe de se pensar em fórmulas milagrosas

---

<sup>6</sup> Para se fazer essa afirmação, está-se baseando, apenas, em expressões utilizadas pelos alunos desses cursos em discussões com eles sobre a questão da necessidade das disciplinas de matemática para seus cursos. Não se está, aqui, querendo analisar o que a palavra "gostar" pode significar para eles.

ou receitas de como se ensinar matemática, entende-se que esses modelos poderão servir de exemplos que estimulem o professor a criar suas próprias estratégias com esse objetivo.

A presente Tese de Doutorado propõe alternativas de como se pode fazer com que alunos dos Níveis fundamental e Médio de Ensino construam conceitos de matemática que se julgam importantes para sua formação básica.

É importante salientar que não se pretende, neste trabalho, discutir profundamente os currículos escolares e o papel da matemática nestes. Não será tratada, nesta tese, a questão do que é importante que se aprenda de matemática no Nível Básico. Este trabalho somente tratará do currículo em um de seus aspectos metodológicos; i.e., dentro dessa realidade curricular das escolas do Brasil, como se pode provocar a aprendizagem de conceitos e habilidades matemáticas que hoje fazem parte dos conteúdos trabalhados nesse Nível de Ensino.

Todavia, ainda que não tenham sido objetos desta pesquisa, as questões relativas ao que se entende como importante em termos de conhecimento matemático na educação básica perpassam este trabalho.

Os modelos de estratégias de ensino propostos nesta tese pretendem facilitar a aprendizagem de conceitos e habilidades que se entendem como imprescindíveis à clara compreensão de nosso mundo. Nesse sentido, esse trabalho vai, também, na direção do que Freire (1997) reitera, repetidas vezes, como necessário no processo educativo: que o aprendiz desenvolva a compreensão do mundo e de si mesmo com o mundo, de maneira que possa representar perspectiva de tornar mais justa a vida em sociedade. Afinal, acredita-se que esse mundo e os próprios seres humanos são, também, constituídos de coisas que são mais bem entendidas por aqueles que desenvolvem seu raciocínio lógico-matemático, percebem relações entre quantidades e têm habilidades em processar, ao menos minimamente, esses conhecimentos.

Nessa direção, propõe-se a produção de novos materiais a serem utilizados pelos professores em suas aulas de matemática e a elaboração de estratégias de ensino utilizando-se materiais já existentes no mercado há muitas décadas, mas que carecem de orientação de como se podem utilizá-los.

As idéias que serão apresentadas foram desenvolvidas nos últimos anos durante o envolvimento do autor desta Tese na execução de quatro projetos de ensino/extensão da



Universidade Federal de Pelotas (UFPel)<sup>7</sup>, nas disciplinas cursadas no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFSC e em diversas oficinas oferecidas por ele para professores de séries iniciais nas cidades de Florianópolis e Imbituba (SC), e nas cidades de Pelotas, Herval e Cerrito (RS).

Nos cursos de ensino/extensão citados, professores de matemática e de física da cidade de Pelotas e de cidades vizinhas participaram de experiências e estudos com professores da UFPel na busca de aprofundar seus conhecimentos nessas duas áreas e encontrar alternativas de mudanças em suas práticas de sala de aula.

À guisa de ilustração, apresenta-se, dentre as diversas propostas construídas durante a execução desses cursos, aquela descrita na Dissertação de Mestrado do autor desta tese (Brettas, 2002), que tem como objetivo levar os alunos à construção do conceito de função polinomial de primeiro grau a partir da observação do movimento de carrinhos elétricos de velocidade (aproximadamente) constante.

As oficinas oferecidas pelo autor desta tese a professores das séries iniciais constituíram-se de envolvimento desses professores em situações que se propunham levar os envolvidos à construção de conhecimentos de matemática. A maioria das atividades tratava-se de jogos que pretendiam levar os jogadores a perceberem, por si mesmos, relações entre os elementos constituintes desses jogos e a construir algoritmos para elaboração de cálculos e resolução de problemas cujas soluções envolviam, essencialmente, matemática.

Dentre as propostas construídas durante essas oficinas, destaca-se a do envolvimento de alunos das séries iniciais em um jogo utilizando o ábaco chamado de Material Dourado<sup>8</sup> para a construção da notação posicional dos números e na construção de algoritmos para a operação de soma.

No capítulo 3, são descritos os modelos que foram objetivo de estudo durante a elaboração desse trabalho. Esses modelos foram testados, inicialmente, com professores e, posteriormente e com algumas modificações sugeridas por esses, em salas de aula reais nas escolas das redes pública e particular em que trabalhavam.

---

<sup>7</sup> Curso de Atualização em Funções (1997), Curso de Atualização Superior em Funções (1998-1999), Curso de Atualização Superior em Geometria (1998-1999) e Estratégias para a Construção de Conhecimento de Física e Matemática (2003-2004).

<sup>8</sup> Material criado pela educadora Montessori no início do século XX.

## 1.2 Relevância e Originalidade

Como já foi relatado anteriormente, entendemos que a situação do ensino em geral, mas, particularmente, de matemática, no Nível Básico, é suficientemente preocupante para que se despenda algum esforço na direção de melhorá-lo. Nas diversas ocasiões em que professores de matemática da Universidade Federal de Pelotas se envolveram com educadores do Nível Básico de ensino, foram levantados, por esses, diversos fatores que levam ao baixo rendimento de seus alunos nessa área específica. Desde as condições em que seus alunos vivem e os baixos salários dos professores até os limites em termos de formação que esses próprios professores admitem ter, muitos foram os problemas apontados. Um desses problemas, que teve papel preponderante na execução desta tese, é apresentado nos próximos parágrafos.

Todos os professores dos Níveis Fundamental e Médio que participaram dos cursos citados anteriormente, dos quais participou, como ministrante, o autor desta tese, queixaram-se da falta de material de referência para professores que objetivassem a orientação para a preparação de situações de aprendizagem que levassem o aluno à construção de conceitos e ao desenvolvimento de habilidades no trato com elementos de matemática.

Para o Nível Médio, dispõe-se, apenas, de textos tradicionais que nada mais apresentam do que o conteúdo, mudando apenas a forma de organização ou, em alguns casos, apresentando exemplos de aplicação de conteúdos em situações reais ou atividades recreativas de fixação. Na busca de material alternativo na direção da construção do conhecimento pelo próprio aluno, encontram-se apenas referências esparsas e que não oferecem opções concretas nesse sentido.

Para o Nível Fundamental, já existe muita referência em termos de materiais e métodos para a sala de aula. O problema, nesse caso, é com o tipo de referência que é encontrada. Em geral, do que se encontra a disposição de professores, há dois tipos básicos de orientação do que fazer para ensinar matemática. Um primeiro tipo, que orienta na utilização de materiais concretos, mas no sentido de indicar aos alunos, passo a passo, as relações entre os elementos desses materiais, explicando a eles os significados dessas relações. É comum, nesses casos, o professor já ter trabalhado esse conteúdo antes de utilizar esses materiais e utilizá-los como ilustração, ou evidência, do que ele já tinha dito aos alunos. Um segundo tipo, o de estratégias que envolvem o elemento lúdico. Nesses casos, em geral, as atividades

apenas envolvem utilizar conhecimentos que, supõe-se, tenham sido construídos em aula anterior para que se fixem melhor na memória do educando.

Livros como os de Singer & Miller (2000), Pereira (Org., 1989), servem de exemplos do que se fala no parágrafo anterior.

Obras como de Dienes-Golding (1974) têm o cuidado de proporem situações que levem os alunos a perceberem, por si mesmos, relações matemática e a desenvolverem habilidades nessa área sem que seja dito ou apresentado diretamente a eles essas relações ou explicações sobre essas habilidades. Guardam, também, espaço essencial ao lúdico. Todavia, as propostas apresentadas por esses dois autores apresentam a limitação de exigir o acompanhamento de um educador para cada grupo de, aproximadamente, seis crianças. A realidade das salas de aula de escolas brasileiras não oferece condições de aplicabilidade dos modelos oferecidos nesses textos.

Assim, grande parte do que existe de referência nessa direção ainda está limitado à concepção de ensino baseada na idéia da transmissão de conhecimentos. Não é de se admirar que essas estratégias, em geral, não conseguem provocar a aprendizagem. Apesar de algumas delas serem agradáveis aos alunos, não os envolvem em situações que façam com que eles percebam, por si mesmos, relações entre elementos de uma dada situação de modo que construam conhecimentos de matemática, nem representam algo com significado que possa fazê-los relacionar a elementos de sua estrutura cognitiva na direção dessa construção.

Assim, há uma grande demanda de orientação do que fazer para que alunos do Nível Básico de Ensino aprendam matemática.

Este trabalho vem ao encontro dessa demanda. Por um lado, oferecendo orientações sobre a utilização de materiais que levem à construção de conceitos matemáticos desde as séries iniciais do Nível Fundamental até o Nível Médio; por outro, oferecendo referências e indicações de como se podem construir outras situações de aprendizagem relacionadas a outros conceitos.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

Pesquisar e produzir um conjunto de novos materiais e de novas estratégias para o ensino de matemática nos níveis Fundamental e Médio.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Apresentam-se os objetivos específicos em três blocos. Essa tese pretende:

1) Oferecer a professores do Ensino Fundamental um conjunto de propostas de como, usando material concreto em atividades agradáveis aos alunos, se pode:

- Envolver os alunos em seu processo de aprendizagem;
- Provocar a construção do conceito de equação e de algoritmos para resolução de equações elementares;
- Provocar a construção do sistema referencial cartesiano no plano;
- Provocar a construção de conceitos de lógica matemática;
- Provocar a construção de conceitos da teoria dos conjuntos;
- Provocar a construção do conceito de divisão.

2) Oferecer a professores do ensino médio de matemática uma proposta de como, usando material concreto que faz parte da realidade dos alunos, se pode:

- Envolver os alunos em seu processo de aprendizagem;
- Provocar a aprendizagem dos conceitos de função linear e função afim (ou “função polinomial de primeiro grau”);
- Provocar a compreensão das relações entre representações algébricas, representações geométricas e uma realidade concreta;
- Provocar a identificação de relações funcionais lineares com possíveis realidades que possam representar;
- Levar os alunos a perceberem relações entre os conceitos matemáticos envolvidos e os fenômenos físicos a partir dos quais se podem construir esses mesmos conceitos.

3) Oferecer um conjunto de referências que provoquem, no professor de matemática:

- A busca de novas competências, desejáveis para esse tipo de proposta;
- A consciência da necessidade de se centrar a aprendizagem na realidade do aluno e não nos livros técnicos, no estado cognitivo do professor ou no estado em que o mesmo espera que os alunos se encontrem;
- Uma avaliação geral de sua prática;
- A consciência de que são necessárias mudanças profundas nas práticas dos professores em sala de aula;
- A consciência de que é possível essa mudança em sua concepção de como se deve ensinar;
- Um novo estudo do que realmente significam os conceitos matemáticos que pretende que seus alunos aprendam;
- O aumento da observação da realidade a sua volta, particularmente no que diz respeito às atividades em que se envolvem seus alunos, na busca de alternativas viáveis de serem usadas para ensinar.

#### **1.4 Metodologia da Pesquisa**

O processo metodológico que orientou esta pesquisa constituiu-se, essencialmente, de sete itens a serem executados:

- Planejamento e produção de materiais e estratégias para ensino
- Experiências de envolvimento de professores com esses materiais e estratégias
- Observações dessas experiências
- Entrevistas com professores
- Experiências de envolvimento de alunos com esses materiais e métodos
- Observações dessas experiências
- Entrevistas com alunos

Naturalmente, o planejamento e a produção de materiais antecederam qualquer utilização dos mesmos em experiências didáticas. Algumas entrevistas com professores aconteceram antes, outras depois das experiências com eles mesmos ou com seus alunos. As entrevistas com os alunos somente aconteceram após as experiências.

As entrevistas seguiram roteiros amparados nas orientações de BOGDAN & BIKLEN (1994) e MOREIRA & SILVEIRA (1993). Essas entrevistas foram o que se consideram de semi-estruturadas, tanto com os professores, quanto com os alunos. Essa modalidade de entrevista, semi-estruturada, é um tipo de entrevista que tem sido muito utilizado nas Ciências Humanas devido, principalmente, a sua característica de flexibilidade (tanto no ato de interação entrevistado/entrevistador, quanto na organização das perguntas). Diferentemente do tipo de entrevista estruturada que parte de um roteiro fixo, rígido e hierarquizado de questões que são respondidas passo a passo, a semi-estruturada possibilita uma interação mais informal entre entrevistador e entrevistado, um tipo de conversação orientada.

Com os professores, quando feitas antes das experiências, as entrevistas tiveram como objetivo estabelecer um princípio de diálogo com esses educadores para se conhecerem as concepções de ensino que os orientam em suas práticas de sala de aula; quanto feitas após as experiências, tiveram como objetivo compreender o quanto da experiência foi significativo para eles.

As entrevistas com alunos tiveram o objetivo de se obterem dados que nos permitam entender as diversas visões que esses alunos tinham das aulas de seus professores e o que representou a eles a participação na experiência.

Cabe, aqui, observar que todos os nomes de pessoas (professores ou alunos) que aparecem neste texto não são próprios deles, excetuando-se situações em que a identificação da pessoa envolvida não corra risco de ser identificada.

## **1.5 Estrutura do Trabalho**

No primeiro capítulo, apresenta-se uma breve descrição do contexto em que o trabalho foi desenvolvido e em que ele se constitui, seus objetivos, em que ele se apresenta como original e a relevância que tem dentro do cenário da educação no que diz respeito ao ensino de matemática. Também nesse capítulo, descreve-se o método utilizado na pesquisa desenvolvida.

No segundo capítulo, apresentam-se os aspectos teóricos envolvidos direta e indiretamente com essa proposta. Apresentam-se, também, posições de diversos pesquisadores sobre as questões que intervêm no ofício de ensinar. Entende-se que essa seção representa um conjunto de justificativas suficientes para embasar a defesa da utilidade dessas propostas como modelos para aulas de matemática cujos objetivos sejam as construções daqueles conceitos.

No terceiro capítulo, apresentam-se descrições detalhadas das propostas, bem como comentários sobre algumas alternativas a elas no caso em que não se tenham condições materiais para se utilizá-la ou que essas condições não se caracterizem como adequadas ao contexto envolvido.

No quarto capítulo, apresentam-se relatos das experiências realizadas em que estiveram envolvidos professores e alunos dos Níveis Fundamental e Médio de Ensino. Junto a esses relatos são apresentadas descrições de observações de experiências e de entrevistas realizadas com professores e alunos. Também se apresentam, neste capítulo, comentários que se julgaram pertinentes a respeito desses relatos e descrições.

O último capítulo é constituído das conclusões tiradas da pesquisa realizada e dos estudos que levaram a elaboração desta tese, bem como são apresentadas recomendações para futuros trabalhos.

Finalmente, a bibliografia utilizada no desenvolvimento deste trabalho é listada.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Considerações Iniciais

No mundo todo, pensadores têm-se voltado à questão da educação. Os mais diversos aspectos dessa questão (políticos, de fundamentação pedagógica, de práticas de ensino, etc.) têm ocupado espaços cada vez maiores nas edições de revistas e livros científicos.

Esse fato não deve representar algo espantoso para professor algum, uma vez que a educação é a chave da sobrevivência humana.

A capacidade de entendermos o mundo a nossa volta, de interferir nos processos naturais, de criar novos processos que possam alterar possíveis realidades futuras e de avaliar resultados dessas interferências e criações foram as características que nos permitiram chegar até onde chegamos em ciência e tecnologia.

Por outro lado, é de conhecimento geral que poucos dos objetivos de se educarem as populações têm sido alcançados, mesmo em países desenvolvidos (SCHANK & CLEARY, 1995). Estudos recentes mostram que as dificuldades encontradas pelos sistemas educacionais de países desenvolvidos ainda existem e estão longe de serem eliminadas, como se apresentou na introdução deste trabalho.

Particularmente no Brasil, passa-se ainda por uma dura realidade. Para ilustrar isso, cite-se que o aproveitamento escolar no primeiro grau<sup>9</sup>, em 1993, girava em torno de 30% (DEMO, 1993). Isso representava, no mínimo, um imenso desperdício de recursos humanos e materiais. Embora aquela situação tenha sido largamente discutida na mídia e nos meios acadêmicos, pouco se fez para mudá-la. Em 2001, quase dez anos depois daquele levantamento, encontramos o quadro crítico já descrito, também, na introdução deste trabalho.

Muitas são as razões apontadas como causas desse tipo de problema. Listamos algumas delas:

---

<sup>9</sup> Equivalente ao, hoje chamado, Nível Fundamental de Ensino.



- Boa parte de nossas crianças vive em condições de miséria, onde não encontram estímulos para se desenvolverem intelectualmente;
- Nossas escolas não dispõem de infra-estrutura adequada;
- Boa parte de nossos professores tem formação precária;
- Os salários dos professores não representam um mínimo aceitável para a sobrevivência digna dos mesmos, o que leva os professores a trabalharem em mais de uma escola, não dispondo, assim, de tempo suficiente para prepararem melhor suas aulas;
- O material didático de referência (principalmente, livros) é de qualidade discutível;
- Os programas das disciplinas não são flexíveis e não têm sido adaptados à medida que a sociedade evoluiu.

Tornou-se lugar-comum para os professores colocarem as culpas do pobre desempenho das escolas na educação dos alunos em outro lugar que não em si mesmos. Tendem a supervalorizar os cinco primeiros itens acima e a esquecer que a prática de sala de aula acontece devida a suas próprias posturas ante o processo: como planejam as aulas, se pesquisaram a respeito dos assuntos das mesmas para se atualizarem, se conhecem realmente seus alunos (e se levaram em conta esse conhecimento quando da preparação das atividades escolares).

Porém, um fato altamente relevante que se pode lembrar aqui é que as dificuldades de se conseguirem bons resultados em seus trabalhos nas escolas não existem somente para professores brasileiros (ou de países menos favorecidos), mas, também, em países altamente desenvolvidos como os EUA, onde os itens supervalorizados citados acima não representam problema significativo para as atividades de ensino nas escolas. Schank & Cleary já alertavam, em 1995, para a precária situação do ensino básico naquele país. Em 2003, ainda encontramos uma situação difícil, ao menos no que diz respeito ao ensino de matemática (NAEP, 2004).

Assim, levando em conta que, na prática, é o professor quem determina como deverão ser suas aulas, esse pode ser um ponto de partida para que se proponham alternativas na direção da melhoria do ensino.

Tem-se consciência que, ainda hoje, o professor exerce um papel, muitas vezes, semelhante ao de um apresentador de um monólogo num anfiteatro. Ainda que, algumas vezes, ele solicite a participação dos alunos com respostas a perguntas propostas por ele

próprio, via de regra o único a atuar ativamente no processo é o professor. Ele espera que seu discurso obtenha o sucesso desejado, que ele represente uma igualdade de tratamento para seus alunos; enfim, que suas aulas representem oportunidades para todos os alunos aprenderem. A falácia que diz que, se apresentarmos uma mesma coisa de uma mesma maneira para todos, estaremos sendo democráticos, foi a grande geradora do molde para nossas aulas tradicionais.

Por outro lado, existem professores que tentam, sem muito sucesso dentro de suas limitações conceituais (a respeito de como a aprendizagem ocorre), melhorar a qualidade de seu trabalho. Whitehead, em seu “The aims of education”<sup>10</sup> (1951), já alertava para um dos erros comuns que são cometidos pelos professores que é o de pensar que a mente precisa ser “afiada” primeiro pelo aprendizado da teoria para depois aplicar essa teoria em situações hipotéticas ou reais.

“A mente não está, em momento algum, passiva; ela está em perpétua atividade, delicada, receptiva e responsiva a estímulos. Você não pode fazer com que ela espere para viver enquanto você da forma a ela” (WHITEHEAD, 1951, p. 18).

Por muito tempo, tinha-se acreditado que as competências básicas de um bom professor eram o conhecimento profundo do assunto que ele deve ensinar e capacidade de organizá-lo de forma eloqüente a seus alunos.

É evidente que essas competências são necessárias para o ensino, mas não representam o suficiente.

Whitehead (1951) lembra de um provérbio sobre a dificuldade de se ver a madeira por causa das árvores, observando que esse provérbio toca exatamente no ponto onde ele deseja: que, na verdade, o problema da educação é fazer com que o estudante veja a madeira *por meio das árvores*. Além disso, ele salienta que não são as palavras, por mais bem escolhidas que sejam, que determinarão o engajamento dos estudantes num aprendizado.

“Eu não consigo contemplar uma leitura estimulando, de uma vez por todas, uma classe admirada. Essa não é a maneira como a educação funciona... É preciso fazer com que os alunos sintam que estão estudando alguma coisa, e não meramente executando danças intelectuais” (Whitehead, 1951, p. 21).

---

<sup>10</sup> “Os objetivos da educação”

À medida que se tem pesquisado bastante como acontece a aprendizagem e como ela deve ser conduzida pelos professores, diversos aspectos que, há algumas décadas atrás, não eram sequer levados em conta pelos professores, hoje estão no topo de suas preocupações.

Na próxima seção, destacam-se alguns desses aspectos.

## 2.2 Aspectos Intervenientes da Aprendizagem

Nesta seção, são apresentados alguns aspectos que se julgam importantes no processo de aprendizagem e que tiveram papel preponderante na construção dos modelos propostos neste trabalho.

### 2.2.1 O aluno é o agente da aprendizagem

As atividades, as condições para execução das mesmas e os conceitos que se deseja que os estudantes construam devem levar em conta principalmente o nível cognitivo em que se encontram os próprios, uma vez que uma falha nesse sentido pode levar a uma grande frustração ou decepção. Há, ainda, professores que tendem a pensar nos conceitos que devem ser trabalhados com seus alunos como algo pronto e acabado e que, por isso, é suficiente apresentá-los ao aluno que ele os absorverá.

"O saber não é algo pré-fabricado. Cada um precisa reconstruí-lo. O aluno necessita ser guiado na construção de seu saber. É a relação de mediação que assegura a qualidade do encaminhamento do aluno em sua busca do saber. Ao longo da interação que se estabelece entre a professora ou professor e o aluno, encontram-se atividades que visam aos processos intelectuais de pensamento e de raciocínio" (SAINT-ONGE, 1999, p. 214).

Particularmente os professores de matemática costumam apresentar conceitos e relações importantes, do ponto de vista da área, como se não houvesse necessidade de (re)construções pelo aluno. Não é dada a chance para que o aluno reflita sobre uma situação (que pode ser real, representação de uma possível realidade ou, mesmo, abstrata) e perceba, ele próprio, as relações que nela aparecem. Um exemplo clássico de como isso acontece é a tentativa de se ensinar aos alunos o Teorema de Pitágoras. A maneira bastante comum de se tentar ensiná-lo é a de apresentar o teorema (com um desenho bem feito de um triângulo retângulo genérico, onde estão identificadas as medidas dos catetos  $a$  e  $b$  e a hipotenusa  $c$ ); depois, apresentar outros exemplos que “confirmam” a relação  $a^2 + b^2 = c^2$ . Se, ao invés desses procedimentos, fosse solicitado aos alunos que representassem alguns triângulos,

identificassem suas medidas e calculassem, para cada um desses triângulos, as expressões  $a^2 + b^2$  e  $c^2$ , pode-se ter certeza de que eles perceberiam a igualdade desses dois valores, a menos de pequenos erros de medidas. Esses pequenos erros podem ser minimizados através da construção de triângulos grandes - essa atividade pode ser feita, inclusive, na quadra de esportes ou no ginásio da escola, medindo-se com fitas métricas adequadas. Os próprios estudantes teriam identificado essa relação; ela não teria “caído do céu do conhecimento construído pelos gênios da antiguidade”.

### 2.2.2 Do prazer na aprendizagem

Muitos são os esforços de professores na direção de incentivar seus alunos para a aprendizagem, de levá-los a *ter um motivo* para aprender.

Etimologicamente falando, a palavra *motivo* tem origem no latim, *movere*, que significa movimentar, aquilo que faz mover. Assim, motivar é provocar movimento.

Entende-se que o sentido da motivação é o de levar a satisfação para atender carências latentes. A carência de uma determinada pessoa faz com que ela organize seu comportamento na direção de conseguir suprir essa carência. Tão logo é atendida essa necessidade, aparece outra que não tenha sido suprida, a qual provoca a reorganização das ações da pessoa noutra direção.

Em se tratando da relação da motivação com a aprendizagem, entende-se que a mesma é, naturalmente, complexa. Não faltam exemplos de alunos que se sobressaem em suas aulas em determinada área porque seus pais são profissionais bem sucedidos trabalhando em áreas correlatas – suas motivações podem ter origem no desejo de seguir o exemplo desses. Também existem alunos que se sobressaem por serem constantemente estimulados pela família ou por professores com os quais simpatizam. Acredita-se que se podem listar inúmeros exemplos diferentes de motivações para os estudos.

Apresenta-se, nesta seção, uma breve discussão sobre uma das possíveis maneiras de se motivar alunos à aprendizagem: a partir do envolvimento deles em atividades lúdicas, ou que guardam íntimas relações com seus interesses, carregadas de significação na direção do que se quer ensiná-los.

Entende-se, como Huizinga (2004), que o ser humano está impregnado do lúdico em todas as suas atividades culturais (ou em suas atividades profissionais mais especificamente). Desde as crianças com suas brincadeiras, que envolvem regras não necessariamente aceitas

(ou mesmo conhecidas) pela sociedade em geral, até os grandes empresários, quando utilizam estratégias para aumentarem sua parcela de poder no ambiente em que vivem, estão sob a influência dessa característica natural do ser humano – uma tendência à valorização do lúdico, ainda que esse não seja explicitado em suas consciências.

Uma das atividades que se considera como lúdica é o jogo. Quando crianças participam de jogos, elas se envolvem com os mesmos de uma maneira que dificilmente se conseguiria que elas se envolvessem em atividades didáticas de outro tipo. Durante o jogo, o ser humano alivia parte de suas tensões, criando e satisfazendo pequenos desejos.

“... O mais simples raciocínio nos indica que a natureza poderia igualmente ter oferecido a suas criaturas todas essas úteis funções de descarga de energia excessiva, de distensão após um esforço, de preparação para as exigências da vida, de compensação de desejos insatisfeitos, etc., sob a forma de exercícios e reações puramente mecânicos. Mas não, ela nos deu a tensão, a alegria e o divertimento do jogo”.(HUIZINGA, 2004, p. 5)

Uma das mais importantes características do jogo é a sua separação espacial em relação ao cotidiano. Em termos ideais ou materiais, reserva-se a ele um espaço determinado, limitado, isolado da vida cotidiana. Dentro desse espaço, processa-se o jogo e é onde têm validade suas regras (HUIZINGA, 2004).

Entende-se, assim, que o jogo é parte da realidade das pessoas, particularmente das crianças. Utilizar-se do envolvimento delas em atividades de jogo didáticas é, como largamente preconizado por diversos pensadores, levar em conta, no processo de ensino, a realidade do educando.

Entretanto, pretende-se salientar que o mero envolvimento de estudantes em jogos enquanto se trabalha, de alguma maneira, com conteúdos escolares, pode não representar uma mudança significativa na direção da aprendizagem efetiva desses conteúdos. As regras desse jogo, tanto as negociadas quanto as não negociadas com os alunos, devem, no decorrer do mesmo, levá-los a perceberem relações, a construírem representações simbólicas ou a adquirirem habilidades tais que, antes do jogo, ainda não haviam feito. Ademais, devem-se respeitar os limites impostos por essas regras e os conhecimentos mínimos necessários para que os estudantes possam participar de todos os aspectos do jogo, sem que eles necessitem superar obstáculos acima de suas condições para tanto; nesse último caso, pode-se gerar um alto grau de frustração ao invés de aprendizagem de conteúdos escolares novos.

Freire e Shor (1986), também, apresentam-nos indicações de que, se as aulas vão ao encontro dos interesses dos alunos, o resultado pode ser muito melhor. Estudantes que

resistem a fazerem uma tarefa escolar, quando motivados em alcançar determinado objetivo, esforçam-se na direção de atender essa motivação ainda que esse esforço dispensado seja muito superior ao exigido para aquela tarefa (FREIRE & SHOR, 1986).

Exemplifica-se como pode isso ser levado em conta em atividades de sala de aulas. Tomemos a consciência de um fato conhecido: a grande maioria dos estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio tem contato freqüente com bicicletas, possui e usa bicicletas ou, ao menos, gostaria de ter uma. É natural, e esperado, que todas as crianças se perguntem, ao menos uma vez, como funcionam esses mecanismos que permitem a eles pedalam e se divertirem em suas bicicletas. De um lado, o que acontece muitas vezes (especula-se que seja a maioria das vezes) é que eles não dispõem de alguém que os ajude a conseguir as respostas a suas perguntas quando eles têm interesse em perguntar. Por outro lado, o próprio uso desses veículos, a velocidade, o deslocamento, o equilíbrio, a química e a física envolvida na lubrificação de alguns componentes são conceitos que se pretende que os estudantes construam.

Uma observação importante de se fazer é que certas atividades úteis na construção de conhecimentos podem surgir desde as manifestações dos próprios estudantes. A simples menção do uso de bicicletas pode incitar os estudantes a pedir para serem realizadas corridas, testes de equilíbrio ou desmontagem, regulagem e montagem de componentes das bicicletas.

Particularmente, no ensino da matemática, há exemplos de conceitos que podem ser trabalhados usando-se componentes da bicicleta. Apresentam-se dois deles. O conceito de mínimo múltiplo comum aparece quando estudamos a relação existente entre as rodas dentadas do pedal e da roda traseira. A identificação da relação que gera o número Pi aparece quando estudamos a relação entre o raio de roda (tomando-se o cuidado de se diferenciar o significado de “raio” no sentido da parte da roda da bicicleta do significado de “raio” no sentido matemático) e o comprimento da circunferência determinada pelos pneus das mesmas. Essas idéias seguem-se, também, no sentido do que é tratado na próxima seção: a importância do significado do que se está estudando.

### 2.2.3 O que se tem para aprender deve representar algum significado para o aluno

Conquanto o agente da aprendizagem é o próprio estudante, os conceitos a serem construídos pelos alunos, as informações que se desejam que eles aprendam e as habilidades que se quer que eles obtenham devem ter claros significados para eles. Com freqüência, os

assuntos que são tratados nas aulas de uma determinada disciplina não se apresentam claramente relacionados a assuntos de outras disciplinas ou a outros conceitos e fatos da realidade não escolar (embora, em sua totalidade, os assuntos previstos nos programas oficiais sejam sempre relacionados a outras áreas além daquela na qual está sendo tratado oficialmente).

Esse aspecto interdisciplinar de qualquer conhecimento tem merecido bastante atenção de pesquisadores da área da educação nas últimas décadas. Já Descartes, no século XVII, observava a importância dele.

“...Então nós precisamos acreditar que todas as ciências estão assim interligadas, que é muito mais fácil estudá-las todas juntas do que isolando uma de todas as outras. Se, portanto, qualquer um deseja pesquisar sobre a verdade das coisas de forma séria, ele não deve selecionar uma ciência especial; pois todas as ciências estão ligadas entre si e são interdependentes; e precisa, sim, pensar em como aumentar a luz natural da razão, não com o propósito de resolver esta ou aquela dificuldade do tipo escolástico, mas para que sua compreensão possa iluminar sua vontade para sua própria escolha em todas as contingências da vida” (DESCARTES, 1955, p. 1).

Entende-se por interdisciplinaridade a transposição ou deslocamento de um sistema construído para o outro. Assim, na utilização de determinado mecanismo de uma determinada área de conhecimento em outra com o objetivo de resolver problemas inerentes à última não constituiria, conceitualmente, em algo interdisciplinar, enquanto não for levada em conta a relação entre os conceitos referentes à situação de cada uma dessas áreas.

É importante observar-se que não se pode esperar que os alunos possam descobrir, sem orientação adequada, essas relações entre conceitos de áreas diversas.

"Quando a aprendizagem significa a memorização de informações significativas, a construção de modelos úteis na interpretação da realidade e na elaboração de métodos que guiam a ação, o ensino não se limita ao registro das informações. Para que aprender signifique construir seu próprio saber, é preciso pensar. Aprender é pensar, é fazer operações por meio das informações. A aprendizagem escolar é pensar em conjunto de uma forma nova, a fim de descobrir novas significações, de guiar nossa ação de maneira mais satisfatória... Ora, para pensar bem é preciso conectar as informações, organizá-las, estruturá-las, relacioná-las a outros conhecimentos... Essas operações complexas não são instantâneas nem mesmo automáticas. Elas devem ser suscitadas e guiadas. O papel do ensino é igualmente guiar o conjunto do processo de aprendizagem" (SAINT-ONGE, 1999, p. 83).

Ainda nessa direção, Saint-Onge (1999) chama a atenção para a importância do trabalho do professor na organização do conteúdo.

“Por mais atraentes que possam parecer as atividades de aprendizagem propostas pelo professor, é preciso que o conteúdo pareça pertinente aos alunos para que eles queiram aprendê-lo. É por isso que o professor, se deseja envolver os

alunos no estudo, precisa organizar o conteúdo de seu curso de maneira a ser significativo para eles”. (SAINT-ONGE, 1999, p. 57)

A compreensão de uma realidade depende do poder de estabelecer vínculos entre as informações a ela relacionadas. São necessárias a identificação da natureza desses vínculos e a coerência nas proposições geradas a partir do estabelecimento dos mesmos. Também devem ser identificadas relações de inclusão, estruturadas as seqüências, estabelecidas comparações, etc. (Saint-Onge, 1999).

#### 2.2.4 É importante que os alunos realizem tarefas coletivas

Um dos objetivos principais da educação é a de formar cidadãos capazes de participarem ativamente de empreendimentos em grupos, sejam esses com fins comunitários e sociais ou com finalidade a satisfazer os desejos de um conjunto restrito de pessoas, como é o caso do trabalho em empresas.

Assim, é importante que os estudantes apreendam a trabalhar em grupo.

Os primeiros anos de vida das crianças são, via-de-regra, envoltos em atividades de grupo. Desde cedo, elas brincam com familiares, amigos da vizinhança onde moram ou com colegas de creche. A escola formal é que tem, em geral, quebrado esse costume salutar. Além disso, é sabido que os estudantes conseguem resultados muito melhores quando desenvolvem seus estudos em grupos, de acordo com o que afirmam Crawford & White (1999, p. 37):

“Muitos exercícios de resolução de problemas, especialmente quando eles envolvem situações reais, são complexos. Estudantes, trabalhando individualmente, algumas vezes, podem não fazer progressos significativos no período de uma aula e podem se tornar frustrados a menos que o professor os guie passo a passo. Mas estudantes trabalhando em grupos podem suportar esses problemas complexos sem ajuda externa. Quando a Sr<sup>a</sup> Herrera, o Sr. Anderson e a Sr<sup>a</sup> Hayes<sup>11</sup> usam grupos liderados pelos próprios estudantes para executar exercícios ou atividades manuais, eles estão usando a estratégia da aprendizagem cooperativa no contexto da troca, resposta e comunicação com outros aprendizes.

A maioria dos estudantes sente-se mais confortável quando trabalha em pequenos grupos com seus colegas. Nessas ocasiões, os estudantes fazem perguntas sem a ameaça de se sentirem embaraçados. Nesse tipo de situação, também, eles expõem suas idéias a seus colegas, apresentam interpretações dos conceitos estudados e, até, recomendam enfoques para

---

<sup>11</sup> Herrera, Anderson e Hayes foram os pseudônimos de professores reais cujos trabalhos foram estudados por Crawford e White.



a resolução de problemas ao grupo. Quando os estudantes escutam uns aos outros, refazem suas próprias avaliações, reformulando seu senso de compreensão. Nesse processo, aprendem a dar valor às opiniões dos colegas, porque percebem que algumas estratégias diferentes das suas mostram-se como um enfoque melhor nos problemas sobre os quais se debruçam (CRAWFORD & WHITE, 1999).

Enquanto os professores acharem que representam a única fonte capaz de impulsionar e regular a aprendizagem dos alunos, estarão perdendo oportunidades de oferecer, a estes, situações onde as interações sociais levem à construção do conhecimento. Num trabalho cooperativo, as trocas de experiências ocorrem com maior frequência do que num estudo feito unicamente a partir do professor ou mesmo no caso do estudo a partir do aluno só que desenvolvido individualmente. É claro que a administração desse tipo de atividade precisa ser feita cuidadosamente. Uma atividade em que se envolvam alunos com diferentes níveis de compreensão do assunto a ser tratado, por exemplo, pode levar à frustração de alguns que se vêm com mais dificuldade de entender o que está se estudando.

#### 2.2.5 O conhecimento precisa ser construído em sala de aula

Grande parte dos professores tem como prática em sala de aula a apresentação de conteúdos que eles consideram prontos que não carecem de uma (re)construção ou mesmo de elaborações adicionais pelos alunos. Esclarece-se, aqui, que a *sala de aula* é apenas uma referência; as aulas podem acontecer em outros lugares, como no pátio da escola, na sala de esportes, etc. O que se quer salientar é a importância de que a aprendizagem ocorra durante as aulas.

Todo aluno dispõe, no momento da aprendizagem, de uma estrutura cognitiva prévia. A aprendizagem deve gerar alterações positivas em termos quantitativos e qualitativos nessa estrutura (SAINT-ONGE, 1999). Uma vez que um dado conhecimento é apresentado em sua síntese como completo, não é dada ao aluno a oportunidade de estabelecer as relações entre as variáveis ou fatos determinantes na construção desse conhecimento e os constituintes da estrutura cognitiva prévia de sua mente. Esse tipo de prática ainda é predominante. A respeito, escrevem Freire & Faundez (1985, p. 64):

“(Antonio falando): ... a verdadeira ciência é a que, partindo do concreto e mediada pelo conceito, retorna ao concreto. E este é um ciclo permanente. No entanto, a Ciência, tal qual os intelectuais a entendem atualmente e tal qual é ensinada nas Universidades, consiste em partir do conceito, retornar ao concreto e em seguida regressar novamente ao conceito.”

Um conteúdo que foi construído pelo aluno será muito mais facilmente resgatado quando necessário, uma vez que a rede de informações estabelecida na mente do aluno para entender esse conteúdo foi criada usando sua própria estrutura cognitiva prévia com as informações que nela já estavam contidas.

Considere-se, novamente, o exemplo da seção 2.2.2 sobre o conceito do número Pi. Intrínseca a esse conceito está à equação que permite o cálculo do comprimento de uma circunferência. A maneira que se trabalha esse assunto em sala de aula, muitas vezes, é a seguinte: apresenta-se aos alunos a relação  $c = 2\pi r$  (que permite o cálculo do comprimento da circunferência a partir de seu raio), em que  $c$  é o comprimento da circunferência de raio  $r$  e se diz que  $\pi$  significa “o número de vezes que o comprimento do raio cabe no comprimento da semi-circunferência” (como consta em diversos livros de matemática básica), mostrando com exemplos a veracidade do fato. O professor poderia obter melhores resultados colocando os alunos na condição de estudarem diversas circunferências (que podem, inclusive ter sido escolhidas por eles mesmos) e verificarem o que acontece com o quociente  $\frac{c}{r}$  para cada uma das circunferências. Haveria a percepção de que esse quociente é sempre um valor próximo de 6,2 (com exceção de pequenos erros de medidas) e a suspeita de que  $\frac{c}{r} = 6,2$  para qualquer circunferência de raio  $r$ . Se o professor solicitar que eles isolem  $c$  na equação, os alunos obterão a equação  $c = 6,2r$ . No momento que os alunos chegam nesse estágio, é importante que o professor informe-lhes sobre o que eles perceberam, dizendo-lhes que o número que calcularam é dobro do famoso número Pi (apresentando-lhes o símbolo e um pouco da história do mesmo). Observa-se que, deste modo, o aluno estaria “descobrendo”<sup>12</sup> o conceito desse número  $\pi$  e a equação  $c = 2\pi r$ .

Ainda nessa direção, Baraldi (1999, p 62) disserta sobre o que chama de *ensino por descoberta*, que é o ensino que possibilita aos alunos *construírem*, por si mesmos, o conhecimento, indicando que:

“O ensino por descoberta representa um meio para ocasionarmos a aprendizagem significativa.

---

<sup>12</sup> Salienta-se que, na maioria das vezes neste texto, se prefere o uso do termo “construindo”, uma vez que se entende que não há um conhecimento pronto apenas esperando “por ser descoberto”, mas, sim, conhecimentos que podem ser *construídos* pelos professores e seus alunos.

“Numa situação de ensino e aprendizagem por descoberta, os conceitos e princípios não estão apresentados explicitamente, cabendo ao aluno 'induzi-los', através de exemplos ou problemas propostos pelo professor.

A geração de novos conceitos pelo aluno acontece quanto ele distingue, elabora e reorganiza situações e conceitos aprendidos, enquanto age sobre determinadas situações ou objetos. A percepção de relações entre conceitos já construídos, estabelecendo novas extensões, semelhanças e diferenças entre eles a partir de sua própria estrutura cognitiva, leva o aluno à assimilação ou à formulação de novos conceitos. O processo de construção do conhecimento pertence ao aluno e não somente o produto acabado, final. Assim, a aprendizagem por descoberta favorece a oportunidade de resolver problemas, estimulando o aluno no caminho para compreender a estrutura fundamental de um conceito ou de uma disciplina (BARALDI, 1999, p. 71).

“O ensino por descoberta, então, pode-nos ser útil de duas formas: como um meio de proporcionar a aprendizagem de um conceito; ou como um fim, no sentido de proporcionar a aprendizagem de descobrir.”

Entende-se, assim, que se o professor estiver atento a essas questões e tiver competências adequadas para lidar com elas, certamente suas aulas terão o efeito desejado, ao menos dentro do micromundo no qual ele tem poder de influenciar.

### **3 MODELOS PROPOSTOS**

Em cada uma das seções deste capítulo, é descrito um dos modelos propostos nesta tese. As estruturas dessas seções diferem em razão das especificidades de cada um desses modelos.

Essas descrições envolvem, basicamente, os aspectos logísticos para utilização dos modelos, os aspectos relativos às condições cognitivas prévias dos alunos que estarão envolvidos em suas aplicações e, claro, os procedimentos, passo a passo, para essas aplicações. Nessas descrições são, também, sugeridas alternativas aos modelos, associadas a eventuais faltas nas condições materiais da escola ou associadas às limitações cognitivas dos alunos para sua execução. Algumas sugestões de atividades que podem servir de continuidade em aulas seguintes às de aplicação do modelo (ou de sua adaptação) são também apresentadas.

#### **3.1 Construção de conceitos e gráficos relativos a funções polinomiais de primeiro grau**

##### **3.1.1 Considerações Iniciais**

O modelo proposto trata-se de um conjunto de atividades que podem ser feitas por alunos a partir da oitava série do Ensino Fundamental com a finalidade que eles construam os conceitos de função linear e função afim.

##### **3.1.2 Modelo Proposto**

Essa proposta consiste em colocar os alunos na condição de estarem pesquisando sobre o movimento de carrinhos elétricos. Para tanto, são apresentados aos alunos carrinhos elétricos cuja capacidade de movimento seja unicamente numa direção em velocidade constante; fitas métricas, cronômetros e folhas milimetradas (aconselháveis, mas não necessárias). Num primeiro momento, os alunos familiarizam-se com o material. Não há necessidade de uma grande quantidade de fitas métricas, já que elas não serão utilizadas todo o tempo (apenas para identificar e marcar distâncias no chão ou em faixa de papel que o

professor pode fornecer aos alunos). É importante que o trabalho seja executado em pequenos grupos, cada grupo com um carrinho para estudar (e um cronômetro). O aconselhado é que seja feito um sorteio dos carrinhos entre os grupos. As diferentes velocidades (constantes) oferecerão situações onde haverá a construção dos mesmos conceitos – os diferentes valores que serão medidos e calculados entre os grupos oferecerão as variadas situações (todas idênticas em termos de conceitos matemáticos) que serão analisadas por toda a turma durante as etapas onde serão identificados os nomes (convencionados pelos matemáticos) dos conceitos construídos pelos alunos.

A necessidade de que o trabalho seja realizado em grupo vem do fato de que serão necessárias tomadas de tempo para diferentes deslocamentos do carrinho. Alguém precisa controlar as arrancadas e paradas do carrinho (dois estudantes) e outro, o tempo transcorrido (com o uso de cronômetros). Assim, bastam três alunos em cada grupo. Grupos de quatro, ou até cinco, alunos podem funcionar muito bem, já que eles próprios podem se dar conta da necessidade de se tomarem tempos de movimentos do carrinho com diferentes pessoas largando, parando o carrinho e controlando o cronômetro em rodízio (utilizando médias dessas tomadas de tempo com as diversas situações). o próprio professor pode sugerir essa maneira de controlar a precisão das medidas feitas.

Uma necessidade que se apresenta claramente aos estudantes (sem que o professor precise dizer a eles) é a de se construir uma “pista” em linha reta por onde o carrinho vai andar. Tanto a concepção da mesma, como as marcações que eles farão nela serão da escolha do grupo. O que se espera que aconteça é que os alunos, naturalmente, fixem uma ponta da pista como ponto de partida do carrinho e a identifiquem como sendo “0” (zero). Caso isso não ocorra, o professor precisa sugerir a eles que o façam.

O professor orienta os alunos para que construam uma tabela em duas colunas indicando os valores de cada posição e do tempo (gasto para que o carrinho alcance a posição). A decisão de que medida será representada na primeira coluna será da escolha dos alunos. O professor pode, por exemplo, sugerir que os alunos identifiquem a coluna dos tempos pela letra “ $x$ ” e a coluna das posições pela letra “ $y$ ”.

Cabem, aqui, algumas observações importantes. Pode acontecer que, em momentos futuros, os alunos precisem estar familiarizados com notações diferentes. Assim, é aconselhável que os alunos utilizem notações algumas vezes à sua própria escolha e, em outras, dentro de um critério de convenções internacionais. Uma vez que os conceitos estejam compreendidos, isso deverá se tornar irrelevante para os alunos. Por outro lado, o uso de

algumas notações convencionadas internacionalmente facilitará a eles a leitura de material bibliográfico relacionado ao assunto. A notação das medidas de tempo, por exemplo, pela variável “ $t$ ” é altamente coerente para nossa língua. No desenvolvimento de aulas como a dessa proposta, aparece o conceito de velocidade (é esperado que os alunos, na generalização das igualdades conseguidas ao fim, a identifiquem por “ $v$ ” por óbvias razões).

Após as tomadas de tempo e seus registros na tabela construída, o professor orienta os grupos para que todos ampliem a tabela, construindo uma terceira coluna, onde representarão o quociente dos valores da coluna das posições pelos valores das medidas de tempo linha a linha respectivamente.

Os alunos perceberão, imediatamente, que os valores desses quocientes, salvo por pequenas variações, são iguais. Sempre haverá o risco de algum grupo executar de forma imprecisa as tomadas de tempo. A comparação que eles farão com os resultados dos outros grupos deverá levá-los a perceber o que aconteceu. Caso os alunos não sugiram a escolha da média dessas “quase” constantes como representante “da” constante, o professor pode fazer isso (o conceito de média precisa já ter sido construído por esses alunos).

Nesse estágio de seu desenvolvimento, os alunos já devem ter construído o conceito de velocidade (ou, ao menos, estar familiarizado a ele). Assim, espera-se que os grupos que tomaram os tempos com boa precisão orientem os colegas na percepção de que a constante conseguida representa a velocidade do carrinho (que, embora possa ser diferente para diferentes grupos, é constante em todos eles). Num caso no qual *todos os grupos* medirem de forma muito imprecisa os tempos gastos pelos carrinhos, fato extremamente improvável se a turma constituir-se de três ou mais grupos, o professor deve sugerir a pergunta sobre o que significa o quociente calculado.

A percepção de que os quocientes são os mesmos para as diversas tomadas de tempo indica a existência de uma relação de proporcionalidade entre as duas variáveis observadas pelo grupo no processo. O professor precisa, nesse momento, sugerir que os alunos escrevam uma igualdade que identifique essa relação. É esperado que construam a equação  $\frac{y}{x} = v$ , onde  $x$  representa os valores dos tempos e  $y$ , as diversas posições do carrinho (que se identificam, aqui, com os diversos tamanhos de percursos ou *deslocamentos*). Os valores de  $v$  serão diferentes para dois grupos que trabalhem com carrinhos de diferentes velocidades.

Agora será solicitado aos alunos que construam um gráfico que represente o movimento do carrinho. A construção desse gráfico envolve o estabelecimento de uma escala adequada para as medidas de tempo e comprimento, de maneira que o gráfico possa caber na folha que utilizarão (milimetrada ou não). O resultado é a percepção de que os pontos apresentados no gráfico estão alinhados segundo uma única reta (exceto, talvez, por diminutos desvios). Torna-se útil orientar os alunos para proceder a uma confirmação do que, a essa altura, todos suspeitam – se escolhermos outras distâncias a percorrer (ou outros tempos) e verificarmos os tempos gastos pelo carrinho para fazê-lo (ou os percursos feitos nesses tempos escolhidos), obteremos pontos no gráfico alinhados, também, aos demais.

A partir disso, a orientação será para que os alunos isolem a variável  $y$  na igualdade obtida e construam um esboço de gráfico em plano cartesiano que represente essa ( $y = vx$ ). O resultado será a passagem dessa reta praticamente sobre todos os pontos calculados pelas tomadas de tempo. Nesse momento, o professor pode apresentar ao alunos o nome do tipo de função que eles acabaram de construir – *função linear*. Cabe uma breve discussão para esclarecer o porquê do termo *linear*.

Nesse estágio das atividades, pode ser feita a identificação da relação entre os quocientes calculados e a representação gráfica construída. Caso, como é esperado, os alunos já tenham construído o conceito de *tangente*<sup>13</sup>, pode ser feita a identificação da relação geométrica com a velocidade e a tangente do ângulo que a reta determina com o sentido positivo do eixo das *abscissas*. Para efeito de construção do conceito de função linear (ou de função afim) essa identificação não é imprescindível. Isso pode ser feito em aulas futuras.

A generalização da relação que existe entre *a equação na forma construída e o gráfico obtido* podem ser feitos com toda a turma. É interessante a exposição de um gráfico representando uma reta genérica, construído pelo professor, sem identificação de pontos nos eixos, mas apresentando uma inclinação aproximada à média das inclinações dos gráficos dos alunos. Junto a esse gráfico, apresenta-se a equação  $y = vx$  (ou usando a notação com as variáveis que os alunos escolheram caso tenha havido unanimidade).

Esse momento da aula pode ser de fechamento. Podem-se propor atividades de fixação, através da resolução de problemas considerando situações hipotéticas com carros que andem com outras velocidades (até com carros reais). Esses problemas podem ser do tipo

construção de equação e gráfico a partir de velocidade conhecida, identificação de velocidade e construção da equação a partir de gráfico desenhado. Esse último tipo de problema pode representar um pequeno, mas interessante, desafio, pois essa atividade exige a construção de triângulo retângulo e posição adequada no gráfico, cálculo e construção da equação.

Para os próximos passos, pode ser necessário um outro dia (se o professor não dispuser de tempo para essa continuidade).

Dependendo das condições cognitivas prévias dos alunos, se o conceito de plano cartesiano e a habilidade em manuseá-lo foi bem construída<sup>14</sup>, eles não terão maiores dificuldades em resolver o seguinte problema: apresenta-se um gráfico para cada grupo que represente uma reta paralela a que eles encontraram antes (inclusive desenhado sobre o mesmo sistema de referência deles), mas deslocada de tal maneira a interceptar o eixo das ordenadas em um ponto  $y_0$  escolhido pelo professor e propor que o estudem com a finalidade de descobrir o que ele representa com respeito ao movimento do carrinho. Os alunos identificarão, por si mesmos, a posição  $y_0$  com o ponto de partida do carrinho (pode acontecer que algum grupo faça tomadas de tempo para confirmar essa afirmação). É recomendável escolher-se um ponto  $y_0$  positivo numa primeira provocação – um valor negativo poderá se tornar uma dificuldade grande demais (o esperado é que as pistas não apresentem posições “negativas”).

O professor pode propor que os grupos escolham pontos de partida diferentes dos anteriores (todos na origem “0” da pista) e elaborem um processo análogo ao anterior. Um ou mais grupos podem optar por um ponto de partida antes do “0” da pista. Isso resultará em uma representação interessante nesse estágio. Essa atividade poderá oferecer a construção imediata do gráfico correspondente (no mesmo plano anterior) por alguns grupos de alunos, mas a construção da equação que define a relação entre as variáveis estudadas não é imediata. O professor propõe que os grupos construam tabelas como anteriormente, só que com três colunas, a terceira coluna será usada para representar os valores de  $y - y_0$ , onde  $y_0$  representará a posição que eles escolheram. Depois, os alunos calcularão os valores de uma quarta coluna, constituída pelos quocientes  $\frac{y - y_0}{x}$  de cada linha. Os alunos identificarão os valores conseguidos com a velocidade constante do carrinho. A construção da equação dar-se-á pela

---

<sup>13</sup> Ver Seção 3.3 deste capítulo.



percepção de que  $\frac{y - y_0}{x} = v$ . A solicitação do professor para que isolem  $y$  nessa equação e construam o gráfico correspondente produzirá a equação *reduzida* de outra reta paralela a anterior, só que deslocada para a posição  $y_0$  no eixo das ordenadas.

Nessa etapa, pode ser lançado outro desafio: o professor apresenta um gráfico (para cada grupo e no próprio plano cartesiano representado por eles) que apresente o esboço de uma reta passando por um ponto  $y_0$ , com inclinação em módulo igual à anterior, só que negativa. Eles deverão interpretar o que esse gráfico significa com relação ao movimento do carrinho. Nesse caso, se não identificarem de imediato o sentido contrário de percurso do carrinho, poderão representar, na pista, as posições do carrinho associadas a cada ponto do gráfico apresentado a eles. Essa estratégia pode ser sugerida pelo professor.

Novamente, o professor pode propor que os grupos sigam os mesmos passos de tomadas de tempo, construção de equação e gráfico como feito na última vez (com a tabela de quatro colunas). O resultado será análogo ao anterior, com o gráfico de inclinação negativa (de módulo igual à anterior).

Em aulas seguintes, podem ser propostas novas provocações com gráficos exibindo retas representando relações entre outros tipos de variáveis e serem solicitadas interpretações dos significados desses gráficos com respeito às variáveis intervenientes. Uma vez que eles tenham compreendido o sentido da inclinação positiva/negativa, não terão dificuldades em associar esses conceitos a outras situações.

Existem muitas situações reais que poderiam gerar funções lineares e afins. Na verdade, qualquer situação onde aparecem duas variáveis envolvidas que sejam *proporcionais* tem essa propriedade. A opção pelo uso dos carrinhos tem sua origem nos desejos de:

- fazer com que os alunos manuseiem objetos e observem fenômenos que fornecem essas associações sem esforços adicionais além das condições cognitivas em que se encontram;
- que os objetos utilizados façam parte da realidade dos alunos (se não da realidade imediata, do passado ou de algum anseio);

---

<sup>14</sup> Ver Seção 3.2 deste capítulo.

- que a proposta não represente maiores dificuldades em termos materiais – em boa parte das escolas, é comum que alunos tenham relógios com cronômetros ou os mesmos podem, assim como os carrinhos, ser comprados a baixíssimo preço atualmente – importados da China;

- oferecer oportunidade para que os alunos percebam as íntimas relações existentes entre o movimento de objetos (normalmente, só estudado nas aulas de física), o conceito de função e representações geométricas (normalmente, só estudadas na matemática);

- que os alunos se tornem agentes reais desse tipo de construção, mitificada por muito tempo pelos professores quando falam de cientistas famosos do passado (como, por exemplo, Isaac Newton);

- que os estudantes percebam que a observação criteriosa e sistemática de certos fenômenos pode permitir construções bastante curiosas (e, eventualmente, úteis) sem que para isso seja necessário ser um “nerd”, ou, para usar uma expressão autóctone, um “cdf”.

### 3.1.3 O mesmo Modelo: Uma outra Proposição

Cabe observar, no entanto, que pode haver situações onde o uso dessa proposta não represente algo tão tranquilo assim. No Brasil há regiões onde o grau de pobreza material é muito grande, escolas praticamente sem infra-estrutura decente, professores que ganham um salário-mínimo ou até menos. Cabe, nesses casos, se não houver mudanças na situação material, buscar outros caminhos para colocar os alunos em situação que os leve a construir esses conceitos. Embora isso possa parecer utópico para alguns céticos, uma alternativa, se não excelente, bastante razoável, é a de construir trilhos de madeira, por exemplo, com encaixe ou pregados em forma de “V” longitudinalmente. Esses trilhos precisam ter um comprimento de três a cinco metros. A turma precisará de pelo menos um relógio com cronômetro, trena, régua de prumo e bolinhas de gude. Uma vez que pode ser necessário compartilhar um relógio por vários grupos de alunos, o tempo que será gasto no processo será um pouco maior. Esses materiais podem ser conseguidos com o auxílio de profissionais da comunidade, como carpinteiros e marceneiros que podem, inclusive, envolver-se na orientação dos alunos durante a manufatura dos materiais – esse envolvimento inclusive é interessante para os alunos entenderem melhor como trabalham esses profissionais e a importância de seu trabalho para a comunidade onde vivem. A experiência se dá da seguinte maneira: O trilho deve ser fixado com inclinação extremamente pequena em relação

à horizontal bem fixada com a régua de prumo (por exemplo, uma das pontas com um apoio de um ou dois milímetros de altura). Uma pequena esfera (que pode ser uma bolinha de gude) solta na ponta mais elevada andarà para a outra direção praticamente com velocidade constante (a inclinação é pequena, o que faz com que a aceleração devida à gravidade é eliminada pelo atrito com o ar e o contato com a madeira). O professor deve testar essa inclinação antes para saber qual é a apropriada. Os alunos farão marcas nos trilhos usando a trena.

Essa estratégia não tem a riqueza de possibilidades que o uso dos carrinhos tem, uma vez que não se poderia largar a bolinha de gude antes do ponto zero, a menos que o mesmo esteja marcado longe dos extremos do trilho, e ainda tem a impossibilidade do deslocamento no sentido contrário (não permitindo a construção natural de função linear ou afim cuja reta representante no gráfico tenha inclinação negativa). Para escapar desses dois problemas, existe a alternativa de se marcarem as posições da pista fora (independente) do trilho, de modo que o trilho possa ser posicionado para que a bolinha de gude desloque-se a partir de qualquer ponto e em qualquer sentido em relação à pista.

## **3.2 Construção da representação cartesiana plana**

### **3.2.1 Considerações Iniciais**

Este modelo trata-se de um conjunto de atividades que podem ser feitas por alunos de sexta série do Nível Fundamental de Ensino com a finalidade que eles construam o conceito de representação cartesiana de pontos de um plano e esboços gráficos com base nesse conceito.

A representação cartesiana de pontos do plano é envolvida em qualquer área do conhecimento humano em que aparecem duas variáveis numéricas dependentes uma da outra, para as quais se pretende explicitar a relação entre elas através de representações gráficas. Particularmente, aquela representação aparece em estudos de fenômenos físicos como os da cinemática, um dos quais, movimento retilíneo uniforme, é tratado no modelo descrito na seção 3.1.

Em muitas ocasiões, têm-se evidenciado que o ensino desse assunto tem tido um tratamento insuficiente nas escolas de Nível Fundamental, onde deveria ser, oficialmente,

ensinado. Muitos alunos de nível médio não conseguem identificar pontos em representações gráficas cartesianas por suas coordenadas ou associar coordenadas a pontos conhecidos por eles. Também, são muitas as dificuldades de grande parte dos alunos em associar relações algébricas a posições ou regiões de um plano num referencial ortogonal. Entende-se que essas dificuldades têm suas origens na falta da construção que se julga adequada do conceito de representação gráfica cartesiana de pontos de uma região plana de que este modelo trata.

Entende-se, assim, que esse modelo, conquanto simples, tem grande importância para o ensino de matemática no Nível Básico.

### 3.2.2 Modelo Proposto

A estratégia didática que constitui esse modelo é a de envolvimento dos alunos em um jogo que pretende levá-los à construção de representações simbólicas que identifiquem posições de pontos numa superfície plana. Para esta atividade, a escola deve dispor de um pátio razoavelmente plano, de dimensões adequadas, no qual se possam enterrar pequenos objetos (por exemplo, cilindros de 5cm de comprimento e 2cm de diâmetro). Calcula-se que dimensões do pátio de 6m por 8m sejam suficiente para turmas pequenas de alunos (em torno de 16 alunos), mas essa limitação deve ser verificada pelo professor previamente.

Para acontecer o jogo, os alunos devem-se distribuir em equipes de até quatro pessoas. Cada equipe deverá escolher um símbolo, que pode ser uma cor escolhida de um conjunto de cores por exemplo. O jogo é constituído de quatro etapas descritas a seguir.

#### 1ª Etapa

Um aluno representante de cada equipe (ou dois alunos de cada equipe, caso cada uma delas tenha quatro membros) vai até o pátio da escola com o professor, enquanto seus colegas ficam em sala de aula participando de outra atividade não necessariamente relacionada ao jogo.

No pátio, o professor esconde enterrado um pino (ou outro objeto parecido) que represente o símbolo da equipe (caso os símbolos sejam cores, o pino será da cor correspondente para cada equipe) em algum lugar do pátio. Cada representante de equipe observa onde está o pino de sua equipe. Este(s) representante(s) dispõe de um papel onde está escrito algo análogo ao quadro representado na Ilustração 1.

<p>1ª Etapa</p> <p>Nome da equipe: _____</p> <p>Nome do representante: _____</p> <p>Ação: representar, no espaço abaixo, o local onde se encontra o símbolo da equipe.</p>
--

**Ilustração 1: Modelo para representação de posição em superfície plana na etapa 1**

O professor deixará disponíveis fitas métricas em número suficiente de um para cada equipe.

Nesta primeira etapa, cada representante poderá representar, no papel que o professor lhe forneceu, a posição do símbolo de sua equipe como bem lhe aprouver (desenhos, escritos, etc.). Entende-se que, nesta etapa, os estudantes representem mapas descritivos dos locais onde se encontram os objetos de suas equipes.

Esse papel será entregue ao(s) membro(s) da equipe que ficou(aram) na sala de aula. Além disso, não pode haver outro tipo de comunicação entre o(s) alunos que fic(ou)aram na sala de aula e o representante que estava no pátio. De posse da descrição gráfica feita pelo colega, o(s) novo(s) representante(s) da equipe a ir(em) para o pátio tentará(ão) descobrir em que local está o símbolo da sua equipe. Esse(s) aluno(s) terá(ão), também disponível, uma fita métrica. Enquanto isso, cada aluno que fez a primeira representação da posição onde está o símbolo deve ficar em sala de aula, incomunicável aos colegas que procuram o objeto. Os alunos que procuram seus símbolos indicam, quando acharem que estão certos, o local onde acreditam que está o símbolo da equipe.

São, então, medidas as distâncias entre os lugares marcados pelas equipes e a posição onde realmente os objetos respectivos se encontram enterrados. Essas distâncias são registradas num quadro para posterior conferência e pontuação das equipes. Ganha um ponto cada equipe que marcar uma distância menor ou igual a 30cm (isso pode ser alterado dependendo de cada situação).

Ainda nesta etapa, trocam-se os alunos que representarão as equipes e elaborarão uma representação gráfica do local onde está escondido o símbolo da equipe. O professor esconderá os objetos, novamente, para esse novo grupo de alunos. Em cada etapa, ocorrem tantas fases do jogo quantos elementos cada equipe tem.

Essa etapa termina quando cada um dos alunos tiver participado da elaboração de uma representação gráfica para a equipe.

### 2ª Etapa

Nesta etapa, repete-se o mesmo procedimento da etapa anterior, com a restrição do que cada aluno pode utilizar em termos de representação. A Ilustração 2 apresenta o papel que cada representante de equipe terá disponível.

<p>2ª Etapa</p> <p>Nome da equipe: _____</p> <p>Nome do representante: _____</p> <p>Ação: representar, no espaço abaixo, <b>usando, para isso, somente segmentos de reta e números</b>, o local onde se encontra o símbolo da equipe.</p>
---

**Ilustração 2: Modelo para representação de posição em superfície plana para a etapa 2**

A idéia desta etapa é fazer com que os alunos utilizem algum ponto de referência e indicações de direção, além das medidas de distância.

### 3ª Etapa

Novamente, repetem-se os procedimentos da etapa anterior, exceto pelas limitações no que os alunos podem usar nas representações gráficas. A Ilustração 3 indica o papel de que cada representante de equipe dispõe para representar o local onde se encontra o símbolo de sua equipe.

<p>3ª Etapa</p> <p>Nome da equipe: _____</p> <p>Nome do representante: _____</p> <p>Ação: <b>Desta vez, podem-se usar somente dois segmentos de reta e dois números</b> para representar, no espaço abaixo, o local onde se encontra o símbolo da equipe.</p>
---

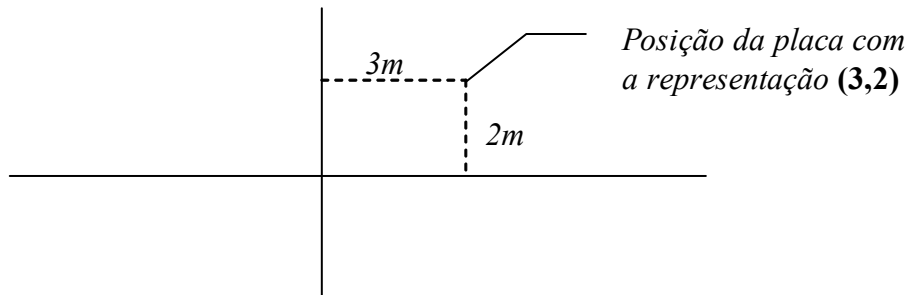
**Ilustração 3: Modelo para representação de posição em superfície plana para a etapa 3**

Nesta etapa, espera-se que os alunos já tenham construído o conceito desse tipo de referencial gráfico, com segmentos ortogonais e distâncias até esses segmentos para identificar posições.

### 4ª Etapa

O professor, nesta etapa, estende dois pedaços de corda ou fitas (em posições representando segmentos de reta perpendiculares) no centro do pátio utilizado nas outras etapas. Depois, o professor coloca uma placa enterrada na posição três metros distante de um

dos segmentos de reta (que será identificado com a posição vertical) e 2 metros distante do outro (posição horizontal), como na Ilustração 4. Na placa é representado o par ordenado (3,2).



**Ilustração 4: Representação cartesiana a ser feita, no pátio, pelo professor.**

Toda a turma de alunos vê essa placa e a posição que ela ocupa.

Cabe salientar que as coordenadas escolhidas podem ser outras. Acredita-se que coordenadas positivas sejam mais adequadas a essa primeira construção. Embora, como pré-requisito a essa atividade, entenda-se que os alunos já tenham construído a representação de posições relativas numa reta representando os números reais (e, portanto, com posições negativas também identificadas), o objetivo, ainda nesta etapa, é a percepção da referência ortogonal e a identificação de apenas dois números para representá-la.

Depois disso, novamente ficam no pátio somente os representantes das equipes, ficando os membros restantes na sala de aula. O professor fixa o símbolo de cada equipe (mantendo o referencial de cordas ou fitas fixas no pátio). Como provocação à reflexão, é interessante que o professor coloque os símbolos das equipes em algumas das posições seguintes: posição para a qual uma das coordenadas é negativa e a outra, positiva; posição para a qual uma das coordenadas seja nula e a outra não (sob um dos segmentos).

Ainda nesta quarta etapa, continuam valendo a mesma regra de pontuação e a etapa somente acaba quando todos os alunos fizeram sua própria representação. A troca de alunos representantes segue a mesma orientação anterior.

Até o fim desta etapa, entende-se que os alunos já terão construído o conceito de representação cartesiana e já conseguirão representar, em pares ordenados, pontos identificados num plano a partir de um sistema de eixos ortogonais construídos por eles próprios ou a partir de um sistema previamente esboçado. Acredita-se, também, que esses



alunos terão condições de identificar pontos em um sistema de eixos ortogonais num plano a partir de representações de pares ordenados.

Em atividades de aulas subseqüentes às deste modelo, o professor pode provocar os alunos a tentarem estabelecer regras para identificar conjuntos discretos de pontos do plano, como, por exemplo, os que pertençam a uma reta passando pela origem. Acredita-se, também, que, depois das atividades previstas neste modelo, os alunos terão condições de estabelecer essas regras.

### 3.3 Construção do conceito de tangente

O modelo que está sendo apresentado nesta seção trata-se de uma seqüência de atividades muito simples que pretendem fazer com que os alunos envolvidos nelas construam o conceito de *tangente*. Esse modelo pode ser utilizado a partir da série em que os alunos já consigam elaborar cálculos envolvendo divisões com números que demandem arredondamentos. É claro que se recomenda um trabalho deste tipo em situações nas quais se espera o uso desse conceito pelos alunos na construção de seu conhecimento nas previsões do professor.

#### 3.3.1 Considerações Iniciais

Este conceito, conquanto importante para a compreensão de estudos que envolvam geometria plana ou variação de quantidades (e isso pode acontecer em, praticamente, qualquer área do conhecimento humano), tem sido pouco compreendido, mesmo por estudantes de áreas consideradas *exatas*. Em cinco turmas de Cálculo IV da Universidade Federal de Pelotas (que envolve, basicamente, o estudo de Equações Diferenciais<sup>15</sup>) com alunos dos cursos de Meteorologia, Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física, foram realizadas avaliações para determinar o que os alunos tinham construído em termos de conceitos necessários ao aprendizado de equações diferenciais. Foi constatado, nessas avaliações, que um dos conceitos que os alunos não tinham bem construído era o de tangente de um ângulo e as implicações do mesmo em problemas envolvendo o estudo de funções reais de uma

---

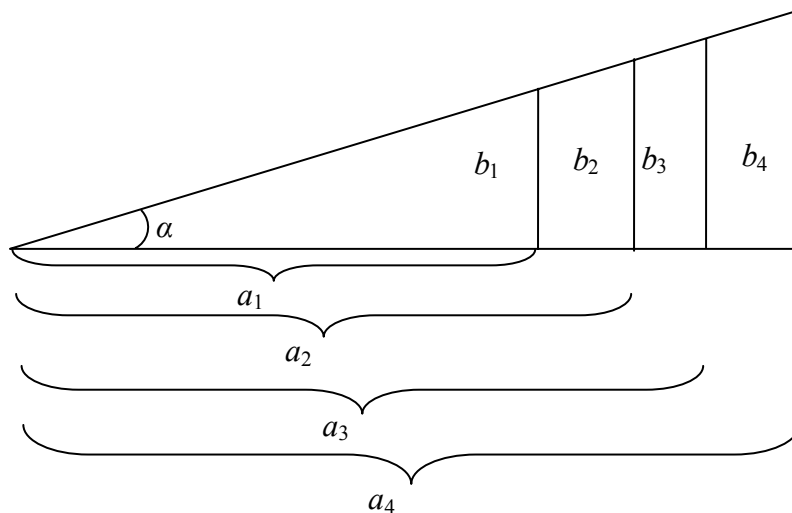
<sup>15</sup> Equações que se constituem de relações envolvendo funções e suas derivadas cujas incógnitas são essas próprias funções.

variável real. Como se tinha consciência de que foram expostos, a esses alunos, tanto as informações relativas ao conceito de tangente quanto as relativas às implicações desse conceito em outras áreas da matemática, conscientizou-se de que o método utilizado para isso não tinha sido eficaz.

Assim, procurou-se produzir um método para ensinar o conceito de tangente a partir da própria forma com que se apresentam as idéias que levaram matemáticos do passado a perceberem as relações entre medidas de figuras que estudavam. Observou-se que grande parte dos livros de matemática no Nível Básico de Ensino, ao tratarem deste assunto, apresentava representações gráficas de um ou mais ângulos como na Ilustração 5, que, supostamente, evidenciavam a relação entre as medidas que representa as tangentes dos ângulos expostos. Também, apresentam-se, na equação abaixo, identidades de quocientes entre catetos opostos e respectivos catetos adjacentes ao ângulo cuja tangente esses quocientes representam.

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \frac{b_4}{a_4} = \tan \alpha$$

**Equação 1**



**Ilustração 5: Representação gráfica de ângulo e identificação de segmentos verticais e horizontais.**

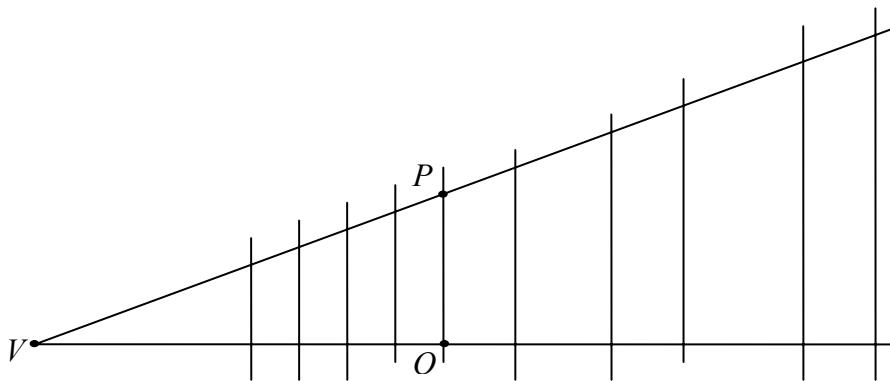
Ao se observarem essas explanações que apresentam um conhecimento pronto, acabado, conscientizou-se de que essas relações poderiam ser percebidas pelos próprios alunos a partir de ângulos escolhidos por eles com simples orientações de como fazê-lo.

O modelo apresentado nesta seção resume-se, basicamente, nesse conjunto de orientações.

### 3.3.2 Modelo Proposto

As atividades dos alunos podem ser em pequenos grupos ou individuais.

Primeiramente, propõe-se aos alunos que cada um deles (ou cada grupo) construa uma representação gráfica de um ângulo a seu critério. As únicas exigências que devem ser feitas são duas: a primeira, que uma das semi-retas que limitam o ângulo construído esteja numa direção que será considerada *horizontal*<sup>16</sup>; a segunda, que a representação tenha dimensões grandes - que cada segmento de reta que representará uma das semi-retas tenha, no mínimo, quarenta centímetros de comprimento. O motivo dessa última exigência é o fato de que serão necessárias medidas parciais de partes desses segmentos e, sabe-se, quando se medem comprimentos muito pequenos, qualquer erro de aproximação pode representar um desvio significativo quando se elaboram cálculos com essas medidas. A primeira exigência diz respeito ao fato de que as convenções de medidas de tangentes de ângulos dependem, sempre, de uma posição considerada horizontal para o observador que estuda a figura onde o ângulo é representado.



**Ilustração 6: Representações de segmentos perpendiculares à direção vertical escolhida.**

---

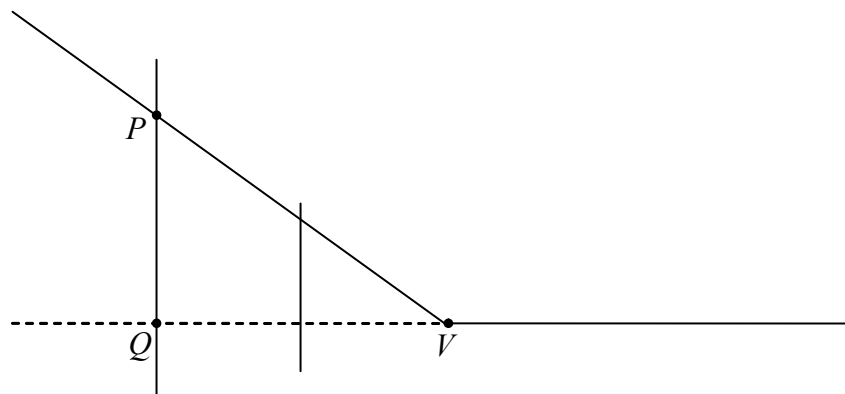
<sup>16</sup> Aqui, não se querem discutir questões sobre a relatividade do termo, uma vez que, para observadores em posições diferentes de uma mesma representação gráfica, uma direção horizontal pode ser vista como vertical.

O próximo passo é o de solicitar aos alunos que tracem, a partir de dez pontos escolhidos, por eles, no segmento de reta não horizontal<sup>17</sup>, dez segmentos perpendiculares à reta de direção horizontal, como na Ilustração 6. Esse número, dez, poderá variar; acredita-se que os alunos perceberão a relação que identifica o conceito de tangente com menos segmentos, mas que esse número será suficiente para o objetivo deste trabalho.

Observa-se que não há necessidade de que haja uma distância única entre dois segmentos paralelos consecutivos.

Para cada um desses segmentos, está, assim, determinada a representação gráfica de um triângulo retângulo com os seguintes três vértices (ver a Ilustração 6): O ponto de intersecção do segmento vertical com o horizontal ( $Q$ ), o ponto escolhido na reta não horizontal ( $P$ ) e o vértice do ângulo originalmente esboçado ( $V$ ).

Entende-se que é importante se observar um caso particular que pode acontecer. O ângulo esboçado pode ser *obtusos*, i.e., pode ter medida maior do que  $90^\circ$ . Em cada um dos triângulos determinados assim, o cateto adjacente ao ângulo previamente esboçado não será parte da semi-reta horizontal (Ilustração 7).



**Ilustração 7: Representação de ângulo obtuso.**

Solicita-se que os alunos construam uma tabela em que apareçam, nas primeira duas colunas, respectivamente, os valores das medidas dos segmentos VQ e PQ, para cada um desses triângulos esboçados. A tabela deve ter espaço para uma terceira coluna a ser

<sup>17</sup> Casos especiais em que o ângulo esboçado seja de  $180^\circ$  ou  $0^\circ$  são tratados separadamente.

estabelecida posteriormente (Tabela 1). Solicita-se que os alunos calculem os quocientes entre os valores de  $PQ$  e de  $VQ$  nesta ordem, i.e.,  $\frac{PQ}{VQ}$ .

PQ	VQ	

**Tabela 1: Cálculo de quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo.**

A menos de desvios muito pequenos, os alunos não terão dificuldades em perceberem que esses valores são os mesmos para todos os triângulos. Essa *descoberta* deve oferecer alguma surpresa aos alunos que não saibam dessa propriedade algébrica desse tipo de figura geométrica. Uma vez constatado esse fato, deve-se observar que as medidas dos ângulos escolhidos pelos grupos serão, muito provavelmente, diferentes entre si. Assim, as medidas que são, aproximadamente, as mesmas nos diversos quocientes para um determinado ângulo, diferem para os diferentes ângulos escolhidos pelos alunos.

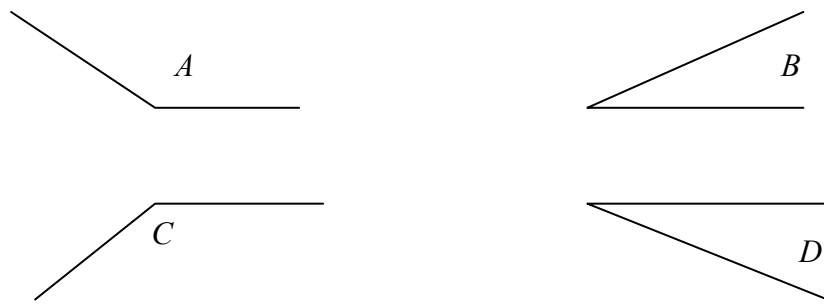
Neste estágio das atividades, o professor precisa estabelecer, com os alunos, o que esse número significa: a tangente do ângulo que escolheram. Cabe, aqui, a observação de que, para alguns obtusângulos, esse valor não significa a tangente, mas o valor dela com o sinal trocado. Mais adiante essa questão precisará ser retomada.

Sugere-se que os ângulos representados (em cartazes ou folhas grandes) sejam afixados nas paredes da sala de aula em ordem crescente de tamanho. Os alunos, novamente, não terão dificuldades em perceberem a relação entre o crescimento do ângulo e o da tangente do ângulo. Eventuais ângulos obtusos aparecerão depois dos outros.

Em grande parte dos livros de matemática do Nível Básicos, está escrito que o sinal da tangente é, meramente, uma convenção, sem apresentar mais explicações a respeito. Entende-se que, apesar de ser uma convenção, ela é baseada em nossa forma de representar, graficamente, situações de crescimento (para as quais o sinal utilizado é o positivo) e de decréscimo (para as quais o sinal utilizado é o negativo).

O autor desta tese fez a seguinte experiência com mais de trezentos estudantes.

Apresentou, aos estudantes, as quatro representações de ângulos como na Ilustração 8, perguntando a eles quais, numa resposta imediata, deveriam representar crescimento e quais deveriam representar decréscimo.



**Ilustração 8: Representações de quatro ângulos diferentes**

Com exceção de menos de 1% dos estudantes, a resposta foi de que os ângulos que representavam crescimentos eram as representações identificadas pelas letras *B* e *C*; que as representações identificadas por *A* e *D* representavam decréscimos.

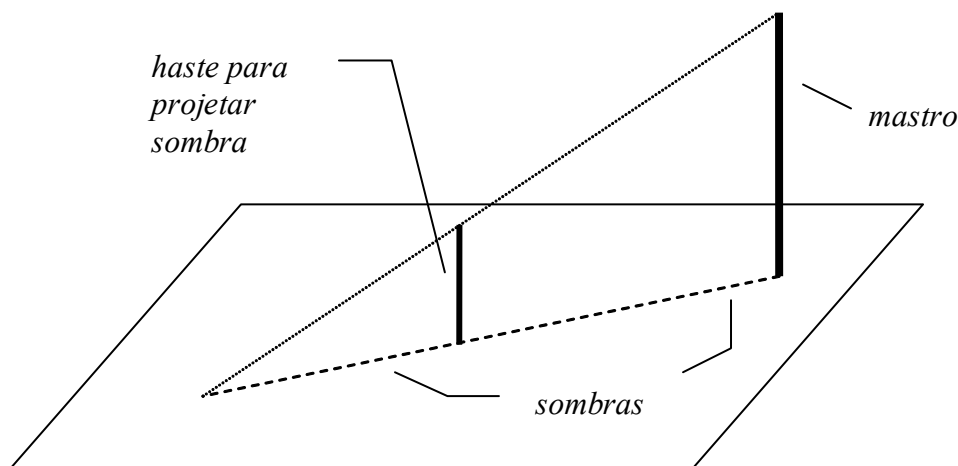
Assim, pode-se dizer aos estudantes que os sinais das tangentes dos ângulos têm essa propriedade: representar crescimento ou decréscimo, dependendo de seu sinal.

Ademais, precisa-se explorar, caso não surjam exemplos escolhidos pelos próprios alunos, os casos dos ângulos de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$  e os equivalentes a esses em termos de representação gráfica. Entende-se que a partir da compreensão de que significa a *tangente de um ângulo*, o entendimento desses casos especiais não será difícil. O professor pode, no caso do ângulo de  $90^\circ$ , por exemplo, sugerir ângulos próximos desse valor para que os próprios alunos percebam que valores de tangente esses ângulos têm.

É importante que se saliente que, nesta estratégia didática, os alunos escolhem seus ângulos e eles próprios percebem o significado da tangente do ângulo escolhido sem terem sido alertados disso. É importante propor a eles uma investigação sobre a história desse conceito e em que tem sido utilizado pela humanidade. Acredita-se que tem grande valor eles saberem que, por muitos anos, tabelas onde apareciam valores de tangentes de uma quantidade grande de ângulos foram muito utilizadas para cálculos envolvendo problemas de geometria em situações de engenharia civil, mecânica, etc, ou simplesmente na condução de embarcações.

Um problema que se pode propor aos alunos a partir dessa construção é o de que eles calculem a altura de algum mastro alto o suficiente para que eles não possam subir e medir com alguma corda. Nas escolas, é comum se encontrar um mastro onde se hasteie a bandeira nacional – este pode ser o referido objeto. Pode-se dar a sugestão de que eles podem usar a

sombra desse mastro e o conhecimento recém construído para resolver o problema. Neste caso, existe possibilidade de se medir a tangente do ângulo determinado pelo segmento que une o extremo superior do mastro ao extremo da sombra projetada no chão e o segmento que une esse último extremo à base da torre no chão. A solução poderá vir da percepção, por eles, de que se pode utilizar uma haste pequena, colocando-a em pé na direção da sombra do mastro na posição em que o extremo da sombra dessa haste se confunda com o extremo da sombra do mastro (Ilustração 9).



**Ilustração 9: Esboço gráfico indicando projeção de luz solar sobre um mastro e uma haste menor.**

A tangente do ângulo assim determinado é encontrada pela divisão do comprimento da haste pela distância entre sua base e o extremo de sua sombra. Considerando-se a distância da base do mastro ao extremo de sua sombra um valor conhecido  $b$  e sua altura um valor desconhecido  $a$ , tem-se  $\frac{a}{b} = \tan \alpha$ , onde  $\tan \alpha$  é conhecido (já calculado). O valor da altura do mastro é, portanto,  $b \cdot \tan \alpha$ .

Outros problemas envolvendo o conceito de tangente, análogos ao descrito nos dois parágrafos anteriores, podem ser oferecidos como desafios aos alunos. Esse tipo de atividade envolve os alunos profundamente em sua aprendizagem, oferecendo a eles esclarecimentos sobre as razões das construções dos conhecimentos hoje ensinados nas escolas. Se isto não servir diretamente em suas vidas, oferece, ao menos, um desafio que não deixa de ter seu aspecto lúdico, como apregoado por Huizinga (2004).

### 3.4 Construção do conceito de equação

#### 3.4.1 Considerações Iniciais

Este modelo trata-se de um conjunto de atividades que podem ser feitas por alunos a partir da terceira série do Nível Fundamental de Ensino com a finalidade que eles construam o conceito de equação e seus primeiros algoritmos para resolução desse tipo de problema matemático.

#### 3.4.2 Modelo Proposto

A estratégia didática que constitui esse modelo é a de desafiar os alunos a descobrirem os valores de alguns pesos que são apresentados a eles a partir da comparação dos mesmos com outros pesos conhecidos por eles utilizando balanças de equilíbrio de dois pratos.

O material a ser utilizado por grupo de até quatro alunos é o seguinte:

- Um conjunto de peças com valores de peso de 1 a 5 identificados por rótulo representando parâmetros confiáveis de peso; i.e., três pesos de valores iguais a 1 pesam, juntos, o equivalente a um peso de valor 3, e assim por diante (Ilustração 10);



**Ilustração 10: Peças com valores de pesos conhecidos.**

- Um conjunto de peças identificadas por letras (*A, B, C, D, E, F, H, X, Y*) cujos valores de pesos somente são conhecidos pelo professor (Ilustração 11);





**Ilustração 11: Peças com valores desconhecidos de peso.**

- Um “kit” para montar uma balança de equilíbrio de dois pratos (Ilustração 12)



**Ilustração 12: Conjunto de peças para montagem de balança de equilíbrio.**

- papel, lápis e borracha para os registros.

As peças de valores de peso conhecidos foram confeccionadas com moedas de um mesmo valor coladas umas às outras em pilhas. O valor 1, somente uma moeda, o valor 2, duas moedas, e assim por diante.

Num primeiro momento, os alunos montam a balança e manuseiam alguns dos pesos com valores identificados de 1 a 5. O objetivo dessa atividade inicial é o de levar os alunos a

se familiarizarem com o modo de operar a balança e a identificarem algumas identidades entre conjuntos de pesos (por exemplo,  $1+2=3$ <sup>18</sup>).

As peças identificadas por letras que foram utilizadas neste trabalho tinham seus valores de pesos (relativos às outras peças de pesos conhecidos e identificados por seus rótulos) identificados na Tabela 2. Estas foram confeccionadas em diversos formatos: cilindros, chapas quadradas, chapas retangulares, chapas circulares e discos perfurados.

Identificação	Descrição física	Valor
A	Chapa de ferro retangular	8
B	Chapa de ferro quadrada	4
C	Chapa de ferro retangular	12
D	Chapa de ferro retangular	10
E	Cilindro de ferro perfurado longitudinalmente	16
F	Paralelepípedo de ferro	3
H	Chapa de ferro circular	5
X	Rolamento de aço	4,5
Y	Rolamento de aço	2,5

**Tabela 2:** Descrição das peças de valores desconhecidos, inicialmente, pelos alunos.

A próxima atividade constitui-se de uma provocação do professor para que os alunos descubram os valores dos pesos de algumas peças (aquelas identificadas por letras). A cada grupo de, no máximo, quatro alunos, são dados uma peça de peso desconhecido por eles (ou duas, dependendo do caso) e um conjunto de pesos adicionais conhecidos por eles. As peças dadas são tais que o grupo não tem condições, com o material de que dispõe, de descobrir, diretamente, o valor da(s) peça(s) identificada(s) por letra(s). A idéia é fazer com que os grupos construam relações entre os pesos das peças a partir do estabelecimento de uma

---

<sup>18</sup> Um peso de valor 1 e outro de valor 2 colocados em um dos pratos; outro, de valor 3, no outro.

situação de equilíbrio de dois conjuntos de peças de tal maneira que se possa perceber, a partir de operações básicas entre os valores numéricos respectivos, o valor da peça desconhecida.

Um grupo que receba a peça  $H$ , por exemplo, não recebe peças que somadas resultem em valor exato 5 (pois isso lhes daria a resposta imediata do valor da peça  $H$ ). Neste caso, o grupo poderia receber um conjunto como o seguinte: peça  $H$  e três peças com os valores respectivos 1, 3 e 6. Observa-se que a única maneira possível do grupo descobrir o valor de  $H$  é colocando  $H$  e a peça de valor 1 num dos pratos da balança e a peça de valor 6 no outro prato. Isso equilibra a balança, o que deve mostrar ao grupo que  $H$ , acrescido de 1, resulta em 6. Neste caso, os alunos estariam construindo o conceito de equação do tipo  $x+a=b$ , com  $x$  desconhecido e  $a$  e  $b$  conhecidos.

Outro exemplo que se entende como importante é o da situação em que o grupo de alunos recebe duas peças  $F$  e mais quatro peças de valores, respectivamente, 2, 2, 3 e 3. Observa-se que o único modo de se conseguir um equilíbrio utilizando alguma peça  $F$  que leve ao cálculo da mesma é colocando duas delas num dos pratos e as duas outras peças de valor 3 no outro. A idéia é que os alunos percebam que estão numa situação do tipo  $2F=6$ , mesmo que não descrevam essa situação com essa representação simbólica. Ao perceberem a necessidade de se dividir 6 por 2 para encontrar o valor de  $F$ , estão, na verdade, construindo um algoritmo para resolução de equações do tipo  $ax=b$ .

Para que os alunos construam um algoritmo para resolverem equações do tipo  $ax+b=c$ , sugere-se que um dos conjuntos de peças seja como neste exemplo: duas peças  $B$ , uma peça de valor 2 e duas peças de valor 5. Neste caso, a única maneira de equilíbrio que pode levar à solução do problema é a de se colocarem as duas peças  $B$  e a peça de valor 2 num dos pratos da balança e as outras duas peças de valor 5 no outro prato; constituindo, assim, a situação  $2B+2=10$ .

Cada peça de valor desconhecido pelos alunos oferece diversas possibilidades de conjuntos de peças que provoquem a percepção deles da *equação* e de um algoritmo para resolvê-la, ainda que eles não usem essas expressões para descrever a situação.

Assim que um determinado grupo “descobre” o valor da peça desconhecida, ele deve passar a outro grupo exatamente o conjunto de peças que recebeu para que este novo grupo resolva o problema que ele já resolveu. Assim, as situações de descoberta diferentes passam de grupo em grupo em rodízio por toda a turma de alunos.

Durante a atividade de “descoberta” dos valores dos pesos das peças desconhecidas, o professor solicita aos alunos que registrem o que estão fazendo e o que estão percebendo no papel. Esses registros devem esclarecer o professor sobre o que os alunos estão construindo em termos de conhecimento relativo ao conceito de equação, objeto central desta atividade.

O próximo passo a partir das atividades descritas já descritas nesse item é o de sugerir, a cada grupo de alunos, que descrevam para os colegas, utilizando o sinal de igualdade, a letra equivalente, em cada caso, e os números que forem necessários, a situação que lhes foi apresentada e a solução que encontraram.

Depois das atividades com as balanças, a sugestão adicional que se oferece é a de apresentar, à turma de alunos, algumas equações do tipo tradicional, tais como  $ax=b$ ,  $a+x=b$  e  $ax+b=c$  e solicitar que eles descubram o valor de  $x$  em cada caso ( $a$ ,  $b$  e  $c$  são valores numéricos conhecidos). Nas aulas seguintes, o professor pode oferecer situações mais complexas envolvendo outras medidas que não pesos. Acredita-se que, depois de terem participado dessas atividades expostas, os alunos não terão dificuldades em perceberem a maneira de resolverem os problemas que envolvem equações desses tipos.

### **3.5 Construção da notação posicional dos números e da base para um algoritmo para a operação de soma**

#### **3.5.1 Considerações Iniciais**

O modelo que se apresenta neste item, aplicável em turmas de alunos desde a 1ª série do Nível Fundamental de Ensino, trata-se de um jogo, utilizando o ábaco conhecido como *Material Dourado*, cuja finalidade é levar os alunos à construção da notação posicional (decimal) dos números e ao embasamento para a construção de um primeiro algoritmo para a operação de soma. São propostas três variações do mesmo modelo; duas, uma para cada nível de aprendizagem, relativa à notação posicional, que se deseja; e outra para a condição de não se ter, à disposição, quantidade suficiente desses ábacos para o jogo de competição individual entre os alunos.

Esse ábaco é constituído de quatro tipos de peças, normalmente, fabricadas em madeira:

- cubos de, aproximadamente, 1cm de aresta;

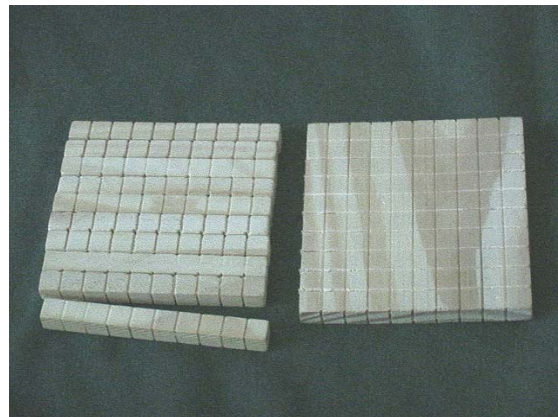
- barras de dimensões, aproximadamente, 1cm x 1cm x 10cm;
- placas de dimensões, aproximadamente, 1cm x 10cm x 10cm;
- cubo de aresta, aproximadamente, 10cm.

Na Ilustração 13, apresentam uma barra e dez cubinhos colocados de maneira a representar a relação entre elas.



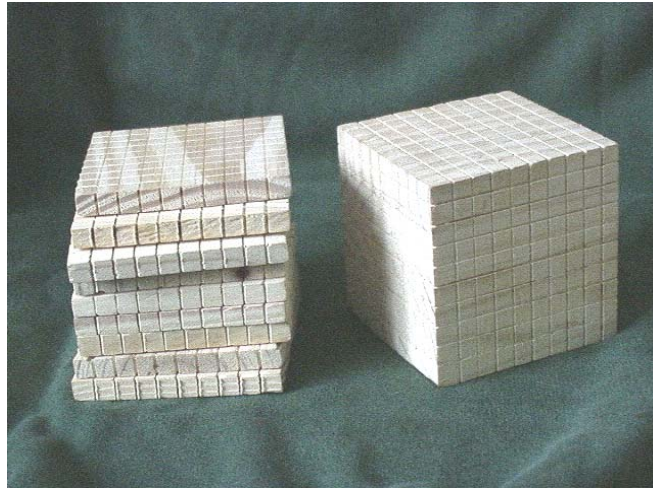
**Ilustração 13: Uma barra e equivalentes dez cubinhos.**

Na Ilustração 14, há uma placa e dez barras. Pode-se perceber, pela fotografia, que dez barras equivalem a uma placa.



**Ilustração 14: Um conjunto de dez barras e seu equivalente, uma placa.**

A fotografia, apresentada na Ilustração 15, apresenta dez placas empilhadas de maneira a mostrar a equivalência com o cubo grande.



**Ilustração 15: Dez placas empilhadas e um cubo grande.**

Observa-se que nas barras, nas placas e no cubo maior, apresentam-se marcas indicando partes das dimensões das peças que mostram as relações entre elas e o cubo menor. Esse material foi criado para que o cubo menor signifique uma unidade; a barra, uma dezena; a placa, uma centena; o cubo maior, um milhar.

O Material Dourado, conquanto bastante limitado no que diz respeito aos níveis associados ao conceito de representação posicional<sup>19</sup> (sem perda, é claro de sua identidade como ábaco que se poderia chamar de *conceitual*<sup>20</sup>), representa um instrumento extremamente adequado à aprendizagem desse conceito, como se pôde constatar nas experiências realizadas.

### 3.5.2 Modelo Proposto

Esse material utilizável neste modelo tem a propriedade de se apresentar ao estudante de tal maneira que ele próprio perceba as relações entre os diversos tipos de peças que o compõe, sem que seja necessária a intervenção do professor.

Antes de se proceder ao jogo que se propõe, é importante que seja permitido, aos alunos, brincarem um pouco com o material (o professor precisa estar presente para saber o quanto é esse “pouco”) até que eles percebam, por si mesmos, as relações entre as diversas peças. Isso não implica o professor não poder intervir de maneira a facilitar essa percepção.

---

<sup>19</sup> Observa-se que, com esse ábaco, a princípio, fica-se limitado entre unidades e milhar.

<sup>20</sup> As relações entre os algarismos representados quando se utiliza este ábaco guardam, intrinsecamente, as relações entre as partes que o compõem.

Um exemplo de intervenção que se julga adequada é a proposta, pelo professor, de trocas de peças. O professor pode pegar as barras, por exemplo, e sugerir que os alunos (que dispõem somente dos cubinhos<sup>21</sup>) a possibilidade de trocarem pelas barras. Os alunos não terão dificuldade de perceber que precisarão de dez cubinhos para cada barra que quiserem para que a troca seja justa. Esse procedimento pode ser o mesmo para as outras peças. O importante é que o professor permita que o próprio aluno perceba as relações, não lhe fornecendo respostas diretas a respeito disso.

O conjunto de materiais que se utilizam no jogo de que se constitui este modelo é o seguinte:

- Conjuntos de Material Dourado;
- Dados com números impressos nas faces (os valores desses números dependerão com qual série se está trabalhando);
- Tabelas indicando posições específicas para as quantidades de cubinhos, de barras e de placas de cada aluno dispõem.

**Primeira variação do modelo** (recomendada para a 1ª série)

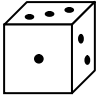
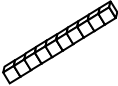

Material necessário para esta variação: Conjunto de peças de um Material Dourado com cubinhos e barras; dados com os números 6, 7, 8 e 9 impressos cada um numa de suas faces, sendo que os números 7 e 8 repetem-se em duas faces cada<sup>22</sup> (Ilustração 16); um papel com a Tabela 3 representada nele, para cada aluno que ele preencherá a cada sorteio.



**Ilustração 16: Dados para o jogo da primeira variação do modelo.**

---

<sup>21</sup> Cubos menores.

<i>Meu nome:</i>		<i>Quanto eu tenho depois do sorteio e da troca</i>	
<i>Sorteio</i>			
1 <sup>o</sup>			
2 <sup>o</sup>			
3 <sup>o</sup>			
4 <sup>o</sup>			
5 <sup>o</sup>			
6 <sup>o</sup>			

**Tabela 3: Tabela para os alunos anotarem suas quantidades de cubinhos e barras durante o jogo.**

Procedimentos:

A turma organiza-se em grupos de, no mínimo, três alunos cada.

Antes do início do jogo, propriamente dito, em cada grupo, um dos estudantes é escolhido (pode ser por sorteio à escolha do grupo) para ser o responsável pela guarda das peças. Este *guardião* das peças (como pode ser chamado pelos alunos) pode ser mudado a cada jogo terminado.

Sorteia-se o estudante que jogará primeiro o dado.

A cada lançamento do dado, o estudante que jogar ganhará, do guardião, o número de cubinhos igual ao valor resultante no dado.

Depois de cada sorteio, cada estudante representa sua situação em sua tabela.

No primeiro sorteio, nenhum estudante poderá obter uma barra, já que nenhum dos valores constantes no dado utilizado é maior ou igual a dez. Deve estar claro para todos os participantes que, quando se têm dez cubinhos, pode-se (deve-se) trocar por uma barra.

Seguem-se os próximos alunos sorteando o dado e fazendo as eventuais trocas que se julgarem necessárias.

---

<sup>22</sup> Dessa forma, os números que têm maior probabilidade de saírem são esses dois. . O professor pode optar por imprimir outros valores nas faces dos dados, tomando o cuidado de calcular quantas vezes cada aluno deverá jogá-los para alcançar a vitória.



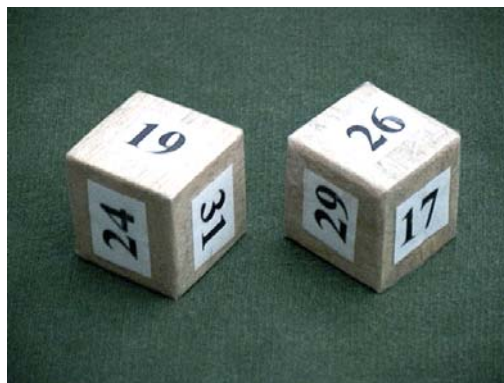
Ganha o jogo o estudante que tiver *cinco* barras após seu sétimo sorteio. Assim, a situação de vitória acontecerá quando os alunos completarem cinquenta *pontos*.

Observa-se que cada aluno, ao fazerem suas anotações, estão construindo, por si mesmos, suas primeiras notações de números maiores do que dez usando notação posicional: quando escreve os algarismos 2 e 3, por exemplo, nesta ordem na tabela, indicando que dispõe de duas barras e três cubinhos, está escrevendo o número vinte e três (“23”). Ademais, está fazendo isso em uma atividade com significado para ele, uma vez que já percebeu o que cada peça conseguida significa e qual a relação de uma com a outra.

Depois de se jogarem algumas vezes (a critério do professor), recomenda-se que se utilize a segunda variação deste modelo que é descrita a seguir.

#### **Segunda variação do modelo** (recomendada para as séries 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>)


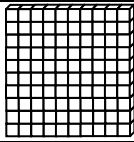
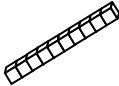

O material necessário para esta variação é o seguinte: Conjunto de peças de um Material Dourado com cubinhos, barras e placas; dados com os números 17, 19, 24, 26, 29 e 31<sup>23</sup> impressos cada um numa de suas faces (Ilustração 17); um papel, no qual está representada a Tabela 4, para cada aluno preencher, registrando seus pontos, a cada sorteio.



**Ilustração 17: Dados para serem utilizados na segunda variação do modelo proposto.**

---

<sup>23</sup> Os números foram escolhidos de tal maneira que, em nenhum caso, o aluno ganhe somente barras e que bastem seis lançamentos de dados para que alguém consiga uma placa (centena).

<i>Meu nome:</i>				
<i>Sorteio</i>		<i>Quanto eu tenho depois do sorteio e da troca</i>		
				
<i>1º</i>				
<i>2º</i>				
<i>3º</i>				
<i>4º</i>				
<i>5º</i>				
<i>6º</i>				

**Tabela 4: Folha para os alunos anotarem suas quantidades de cubinhos, barras e placas durante o jogo.**

Procedimentos:

Como na primeira variação deste modelo, a turma organiza-se em grupos de, no mínimo, três alunos cada.

Antes do início do jogo, propriamente dito, em cada grupo, um dos estudantes é escolhido (pode ser por sorteio à escolha do grupo) para ser o responsável pela guarda das peças. Este *guardião* das peças (como pode ser chamado pelos alunos) pode ser mudado a cada jogo terminado.

Sorteia-se o estudante que jogará primeiro o dado.

A cada lançamento do dado, o estudante que jogar ganhará, do guardião, o número de cubinhos e de barras referentes ao valor resultante no dado.

Depois de cada sorteio, cada estudante representa sua situação em sua tabela.

Deve estar claro para todos os participantes que, quando se têm dez cubinhos, pode-se (deve-se) trocar por uma barra.

Seguem-se os próximos alunos sorteando o dado e fazendo as eventuais trocas que se julgarem necessárias.

Ganha o jogo o estudante que tiver uma placa após seu sexto sorteio. Assim, a situação de vitória acontecerá quando os alunos completarem cem *pontos*. Mais de um aluno pode fazer isso num mesmo jogo. Os alunos poderão estabelecer regras alternativas a esta para definir o(s) ganhador(es) do jogo. Um exemplo disso é a da vitória ser do aluno que, após seu sexto lançamento de dado, obtiver mais pontos (cubinhos, ou o equivalente a eles).

Observa-se que, nesta variação, os alunos já precisam identificar o significado da primeira e da segunda posição na representação decimal do número. A opção pelos valores nas faces dos dados é devida ao objetivo de que o ganhador (ou os ganhadores) do jogo se defina em, no máximo, seis lançamentos de dados; afinal, precisa-se levar em conta que cada jogador espera que todos os outros joguem para poder jogar novamente. Crianças, particularmente na idade em que estão nesse Nível de Ensino, têm pouca paciência para esperar sua vez.

### **Terceira variação do modelo** (recomendada para as séries da 1<sup>a</sup> a 6<sup>a</sup>)<sup>24</sup>

O material necessário, para esta variação, é, essencialmente, o mesmo utilizado nas outras. Inclui-se um dado que tenha, em suas faces, números maiores; por exemplo, os números 46, 53, 57, 62, 71 e 77 (Ilustração 18).



**Ilustração 18: Dados com valores maiores para jogos com o cubo grande.**

Inclui-se, também, o cubo grande nessa terceira variação do modelo. A tabela a ser utilizada pelos alunos para anotarem suas aquisições de peças pode ser como a apresentada na Tabela 5 (com mais linhas do que as apresentadas na figura).

---

<sup>24</sup> Esta variação pode se mostrar adequada mesmo para alunos de séries superiores a essas, uma vez que se constatem dificuldades desses alunos com os algoritmos das quatro operações básicas.

Meu nome:					
Ordem do sorteio	Resultado no dado	Quanto eu tenho depois do sorteio e da troca			
		Cubo grande	Placas	Barras	Cubinhos
1 <sup>o</sup>					
2 <sup>o</sup>					
3 <sup>o</sup>					
4 <sup>o</sup>					
5 <sup>o</sup>					
6 <sup>o</sup>					
7 <sup>o</sup>					

**Tabela 5: Tabela de anotações de pontos no jogo da segunda variação do modelo.**

Procedimentos:

Como nas duas outras variações deste modelo, a turma organiza-se em grupos de, no mínimo, três alunos cada.

Toda a seqüência de procedimentos desta variação é a mesma das outras duas variações. A diferença está, unicamente, no fato de que a vitória, no jogo, acontece para aquele(s) aluno(s) que consegue(m) o cubo grande (mil pontos).

Observa-se que, no que diz respeito à quantidade de Material Dourado para esta variação, é necessário dispor-se de nove placas (centenas) para cada participante do jogo. As caixas deste material que estão à venda no mercado têm, em geral, apenas, dez placas cada uma. Uma caixa dessas não seria suficiente para, por exemplo, três alunos jogarem essa variação do modelo.

Uma alternativa que pode resolver o problema da quantidade de material é a execução de um jogo entre equipes de alunos, ao invés de entre alunos. Por exemplo, se cada equipe for composta de quatro alunos, cinco das caixas de Material Dourado seriam suficientes para uma turma de vinte alunos. Neste caso, as regras para o lançamento do dado poderiam ser tais que cada lançamento seja feito por um representante de cada equipe e, a cada rodada de lançamentos entre as equipes, o representante é mudado para que todos os alunos participem desse ato.

Chama-se a atenção a este modelo na direção da identificação dos valores que representam cada algarismo. Os alunos, para utilizarem esse modelo, já precisam entender,

por exemplo, que um resultado 53 no dado dá, à equipe, cinco barras e 3 cubinhos. Entende-se que, no andamento do jogo, esses alunos estarão construindo um algoritmo para a soma de números maiores do que dez com números maiores do que cem. Mesmo para alunos que já conseguem elaborar contas desse tipo com desenvoltura, as atividades de contagem, inerentes ao processo do jogo, poderão levar à percepção de algoritmos alternativos aos já utilizados por eles.

Considera-se uma situação em que uma equipe disponha, num determinado ponto do jogo, de três placas, de uma barra e de nove cubinhos; i.e., 443 pontos. Um resultado 77 no dado dará à equipe sete barras e sete cubinhos. No processo de contagem, um aluno poderá agrupar as sete barras com as outras três e perceber a troca de dez delas por mais uma placa antes de agrupar, no próximo passo, os sete cubinhos ganhos com os outros três de que a equipe dispõe. Uma descrição que se pode fazer desse algoritmo alternativo é apresentada na Ilustração 19.

$$\begin{array}{r}
 \phantom{+} \phantom{4} \phantom{3} \phantom{3} \\
 + \phantom{4} \phantom{3} \phantom{3} \\
 \hline
 \phantom{+} 5 \phantom{0} \\
 + \phantom{4} \phantom{3} \phantom{3} \\
 \hline
 \phantom{+} 5 \phantom{1} \phantom{0}
 \end{array}$$

**Ilustração 19: Elaboração de uma soma de dois números através de um procedimento diferente do clássico.**

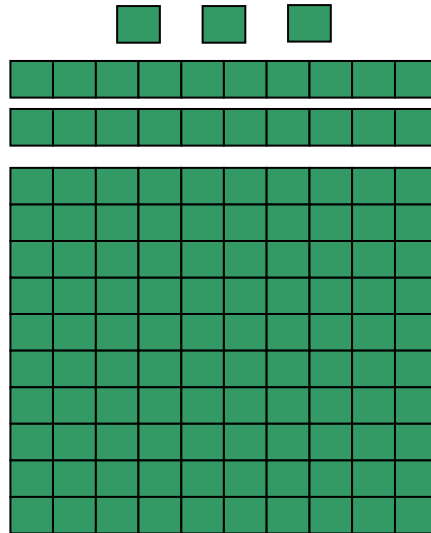
Mesmo que os alunos não registrem esse processo como nessa ilustração, ele acontece em suas mentes, uma vez que os materiais foram manipulados na ordem descrita. Tem-se, assim, uma situação de aprendizagem que oferece, explicitamente, um processo de cálculo de somas diferente daquele largamente ensinado nas escolas.

### 3.5.3 Algumas considerações finais

O modelo que se apresentou nesta seção pode ser utilizado mesmo em situação de ensino de jovens e adultos que não tenham construído essa notação e/ou algum algoritmo para a operação de soma.

Os conjuntos de Material Dourado que se propõem utilizar podem ser substituídos por material confeccionado pelos próprios alunos, ao menos para as duas primeiras variações do modelo. Uma das possibilidades é a de se recortarem folhas de cartolina (ou papelão) em

formato quadrado nas medidas  $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ <sup>25</sup> (para servirem como unidades), tiras de papelão em formato de retângulo com medidas  $3\text{cm} \times 30\text{cm}$  (para servirem como dezenas) e placas de papelão em formato quadrado nas medidas  $30\text{cm} \times 30\text{cm}$  (para servirem como centenas). Na Ilustração 20, tem-se representado o número 123.



**Ilustração 20: Material alternativo ao Material Dourado, representando unidades, dezenas e centena na ordem de cima para baixo.**

O sistema de sorteio das quantidades de cada peça do material que cada participante ganha pode ser qualquer outro. O único cuidado que se deve ter é que o sistema utilizado deve envolver probabilidades de resultados de tal maneira a não favorecer participante algum; particularmente, não deve favorecer aquele estudante que demonstra ter maior facilidade de aprendizagem, pois este poderá não valorizar esse trabalho por representar algo que lhe dá vitória fácil, não representando desafio e, ademais, poderá levar à frustração e, conseqüente, ao esmorecimento, alunos que foram desfavorecidos em razão de sua própria dificuldade inicial.

Observa-se que, no caso da construção da notação posicional, pode-se provocar a construção da representação posicional de números menores do que um. Uma vez que se tenha, já, construída essa notação para números inteiros, a provocação aos alunos pode acontecer utilizando-se os materiais descritos no modelo proposto na seção 3.4.

---

<sup>25</sup> Considera-se a medida dos lados desses quadrados seja, ao menos, essa, pois, com peças em tamanho menor, já se observaram experiências que não funcionaram muito bem em razão das peças serem pequenas demais para o manuseio.

Naquele modelo, utilizava-se uma balança de equilíbrio e conjuntos de pesos. Considera-se que sejam oferecidas, aos alunos, uma peça de valor  $1$  e duas outras peças cujo peso total, das duas juntas, seja equivalente ao peso da primeira. Os alunos não terão dificuldades em perceber que as peças menores têm, cada uma, um peso de metade do peso da peça de valor  $1$ . O questionamento aos alunos pode ser na direção deles representarem, na notação posicional, o valor de uma dessas peças. Na posição de unidade, o algarismo a ser colocado tem que ser  $0$  (zero), pois não há um valor inteiro. Mas já foi construído pelos alunos que cada unidade numa determinada posição da notação significa dez unidades da próxima posição (lendo da esquerda para a direita). Dessa forma, aquele valor  $1$  da peça, é equivalente a dez da próxima posição. Como uma peça mais leve vale metade da peça de valor  $1$ , essa peça deve valer cinco (Ilustração 21).

<i>Dezena</i>	<i>Unidade</i>	<i>?</i>
	<i>0</i>	<i>5</i>

*Posição da vírgula*

**Ilustração 21: Princípio da notação posicional de números não inteiros.**

A necessidade de um símbolo para identificar quando um algarismo não representa um valor inteiro pode ser, também, provocada em situações em que os alunos precisem passar a informação de um valor com decimal a seus colegas por escrito durante alguma atividade. O resgate de alguns conhecimentos que os alunos já tenham construído (como a representação de centavos da unidade monetária, por exemplo), vem a calhar nessa situação.

### **3.6 Considerações Finais**

A apresentação desses modelos teve, também, o intuito de ilustrar a imensa gama de alternativas que se apresentam quando se pensa com cuidado a respeito de certos conceitos matemáticos e o que eles representam na realidade que nos rodeia. A percepção e o aproveitamento dessas alternativas em aulas de matemática exigem um pouco mais do que a simples tomada de consciência disso. Além do conhecimento do assunto que deve abordar

com seus alunos, uma boa dose de criatividade ou esforço na busca de referências ou sugestões de atividades na literatura disponível é parte do que se espera de um professor.



## 4 APLICAÇÕES

### 4.1 Considerações Iniciais

Foram executadas experiências com grupos-piloto, os quais eram compostos por professores de escolas de Nível Básico, utilizando-se os modelos propostos no Capítulo anterior. Desses grupos-piloto participaram sessenta e três professoras das séries iniciais e doze professores das séries de 5ª a 8ª do Nível Fundamental, e trinta e três professores do Nível Médio<sup>26</sup>. Os professores que participaram desses grupos-piloto foram unânimes em declarar que essas experiências feitas com eles mostraram não só a viabilidade da aplicação dos modelos testados, mas, também, que eles seriam eficazes com os alunos na direção de alcançar os objetivos a que se propunham.

Neste capítulo, relatam-se os experimentos didático-pedagógicos realizados nas escolas com base nos modelos descritos no capítulo anterior. Os itens desse capítulo seguem a seqüência correspondente aos respectivos modelos utilizados, apresentados no Capítulo 3. Nesses relatos, são apresentadas breves descrições dos ambientes em que aconteceram as experiências e das pessoas nelas envolvidas. Sempre que aparecerem nomes de professores e alunos das escolas de Nível Básico neste texto, esses nomes são fictícios. O objetivo disso foi de salvaguardar os participantes de possíveis situações constrangedoras no que diz respeito a algumas críticas ao trabalho docente nas escolas envolvidas (no caso de professores) e no que diz respeito à participação de menores nos processos. Pela mesma razão, não serão apresentados os nomes das escolas participantes – apenas uma breve descrição da escola e a cidade onde funciona.

As atividades didáticas foram todas registradas em fotografias e, na maioria delas, também em filmes. O registro filmico teve como objetivo facilitar futuras explicações a professores do Nível Básico de como se executaram as experiências.

---

<sup>26</sup> Desses trinta e três professores, 14 eram professores que lecionavam a disciplina de Física do Nível Médio.

## **4.2 Atividades para levar estudantes à construção de conceitos e gráficos relativos a funções polinomiais de primeiro grau**

Neste primeiro item, descreve-se uma situação de sala de aula onde foi experimentado o modelo descrito no item 3.1. O professor da disciplina que executou a experiência era aluno de um curso de Licenciatura em Matemática orientado pelo autor desta tese.

### 4.2.1 Descrição da Turma

O grupo de alunos com o qual se fez a experiência consistia-se de uma turma de Supletivo de 2º grau composta, inicialmente, por 52 alunos. Com a evasão, restaram 36 alunos. Todos adultos, entre 19 e 50 anos. 32 deles trabalhavam durante o dia e estudavam à noite. Tratava-se de uma turma heterogênea em termos de conhecimentos formais de matemática. A maioria esteve por muitos anos afastada da escola e tinha sérias dificuldades em tratar com conteúdos de 1º grau, pré-requisitos para o bom desenvolvimento dos conteúdos que deveriam aprender nessa disciplina.

Além disso, para essa turma, o professor dispunha de reduzida carga-horária para desenvolver todo o conteúdo de matemática do 2º grau (160 horas-aula). Esse fato representava considerável empecilho para o aprofundamento de quaisquer conceitos ou para o desenvolvimento de habilidades matemáticas relacionadas aos mesmos.

### 4.2.2 Atividades de Revisão de Pré-Requisitos

Foram ministradas duas horas-aula com exposição e trabalhos individuais sobre representação de pontos no plano cartesiano. Segundo o professor, não havia sido feita revisão sobre o conceito de tangente, possível interveniente na construção do conceito de função linear e afim.

### 4.2.3 Material utilizado

Foram utilizados três carrinhos a pilha (com velocidades constantes), formulário contínuo de impressora (para construção das pistas), três cronômetros e três trenas. Essa quantidade de material utilizado é devida a que, no dia dessa experiência, havia apenas onze alunos presentes. O professor sugeriu aos alunos que se subdividissem em três grupos.

A Ilustração 22, a seguir, apresenta o material utilizado pelos alunos.



**Ilustração 22: Material utilizado pelos alunos na experiência.**

#### 4.2.4 Procedimentos

Foi apresentado aos alunos o material que eles utilizariam para a atividade daquele dia.

Foi-lhes solicitado que se reunissem em grupos de três ou quatro alunos e escolhessem um nome para seu grupo.

Foi-lhes solicitado que construíssem como bem lhes aprouvesse uma pista com marcações de distâncias e um ponto de partida. Eles deveriam estudar o movimento dos carrinhos, cada grupo fazendo ao menos 10 tomadas de tempo na pista. É importante salientar que eles próprios escolheram as distâncias entre as marcações na pista, bem como se marcariam o tempo em função das distâncias ou as distâncias em função do tempo em tabelas que deveriam construir (Ilustrações 23, 24 e 25).

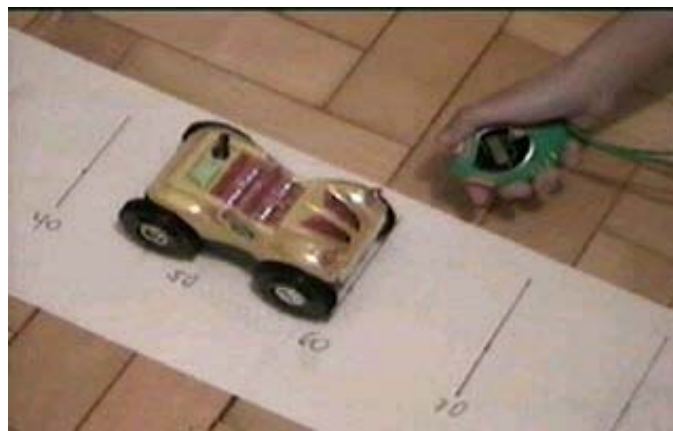


**Ilustração 23: Construção de uma pista por onde o carro andaria.**

Os alunos participaram ativamente das atividades de tomada de tempo com os carrinhos, chegando, muitas vezes a refazer as tomadas para garantir os valores encontrados.



**Ilustração 24: Carro andando numa pista.**



**Ilustração 25: Execução de tomada de tempo com cronômetro.**

O professor apenas observou as atividades até que terminassem as tomadas de tempo e construísem a tabela de duas colunas - tempo e posição (Ilustrações 26, 27 e 28).

O professor orientou os alunos para que construísem uma terceira coluna na tabela de cada grupo onde constassem os resultados das divisões do valor de cada posição (nesse caso, distância percorrida) pelo valor do tempo correspondente. Os próprios alunos deram-se conta do fato do resultado ser o mesmo (aproximadamente) para as diversas tomadas de tempo. Esse resultado (constante) foi identificado por eles como a *velocidade* do carrinho.

Depois disso, os alunos foram orientados para que identificassem a variável *tempo* com a letra  $x$  e a variável *posição* com a letra  $y$ . Concluíram, sem dificuldade, a relação  $y=ax$ , onde  $a$  representava a velocidade (constante) de cada carrinho. É importante observar que os carrinhos desenvolviam velocidades diferentes, determinando diferentes relações encontradas pelos grupos de alunos.

O próximo passo foi a construção de um gráfico que fizesse a representação cartesiana da relação entre essas duas variáveis.

A Tabela 6 apresenta os valores medidos pelo grupo de nome “Therê”. A equação construída pelo grupo, por aproximação, foi  $\frac{y}{x} = 31$ . Após isolarem  $y$ , obtiveram  $y = 31x$ . A Ilustração 29 representa o esboço de gráfico construído pelo mesmo grupo a partir dos dados que eles encontraram. O grupo “Temporal” construiu a equação  $\frac{y}{x} = 37$  (e, posteriormente, isolando “ $y$ ”, conseguindo  $y = 37x$ ). A Tabela 7 e a Ilustração 30 referem-se aos dados do grupo “Temporal”. Apresentam-se, aqui, os dados desses dois grupos por que foram conseguidos pela observação de carrinhos de velocidades diferentes. Chama-se a atenção para o fato de que a tomada de tempo do menor percurso medido (30 cm) apresenta o maior desvio em relação à média em ambos os grupos. Essa tomada de tempo exige muita rapidez de reflexo e coordenação dos alunos envolvidos nessa medição. A partir dessa observação, percebe-se que essas tomadas de tempo (e a experiência como um todo) seriam mais eficientes com o uso de carrinhos de baixa velocidade.

Um primeiro problema encontrado por alguns deles foi o de identificar a escala adequada para construção do gráfico. A maioria dos alunos estava familiarizada suficientemente com esse conceito e tinham habilidade para calcular o resultado necessário. Os alunos que tinham essa habilidade explicaram aos outros como deveriam fazer e, assim, todos os grupos puderam construir seus gráficos. A partir dessa observação, levanta-se outra recomendação importante: que construídos gráficos em escala grande o suficiente para que se tenha maior precisão em sua construção – o uso de folhas milimetradas de tamanho grande seria bastante apropriado.



**Ilustração 26:** Alunos realizando tomadas de tempo com o carrinho deslocando-se sobre uma pista marcada num pedaço de formulário contínuo em sala de aula.



**Ilustração 27:** Alunos fazendo tomadas de tempo com o carrinho deslocando-se sobre a mesa de um laboratório de química.



**Ilustração 28:** Pista desenhada com giz no piso de um laboratório de química.

$x$ <i>Tempos</i>	$y$ <i>Posição</i>	$\frac{y}{x}$
1,03	30	29,1
1,97	60	30,5
2,95	90	30,5
3,88	120	30,9
4,78	150	31,4
5,8	180	31,0
6,7	210	31,3
7,57	240	31,7
8,89	270	30,4
9,69	300	31,0
<i>Média (já arredondada)</i>		31

**Tabela 6:** Primeira tabela construída pelo grupo “Therê”.

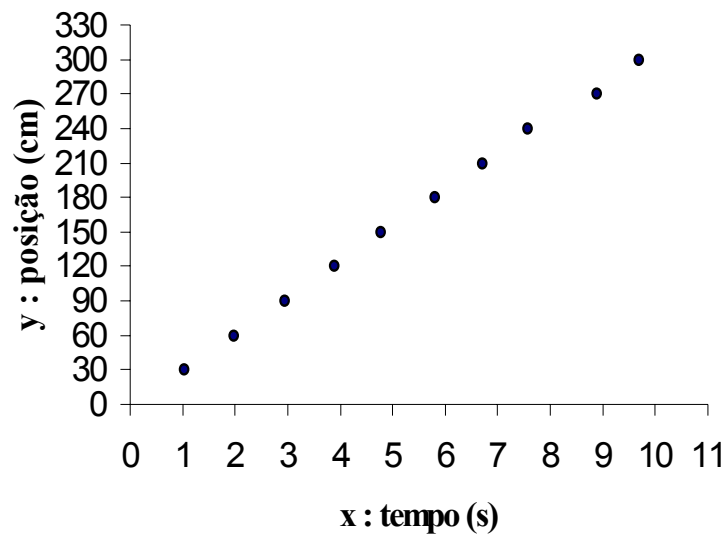
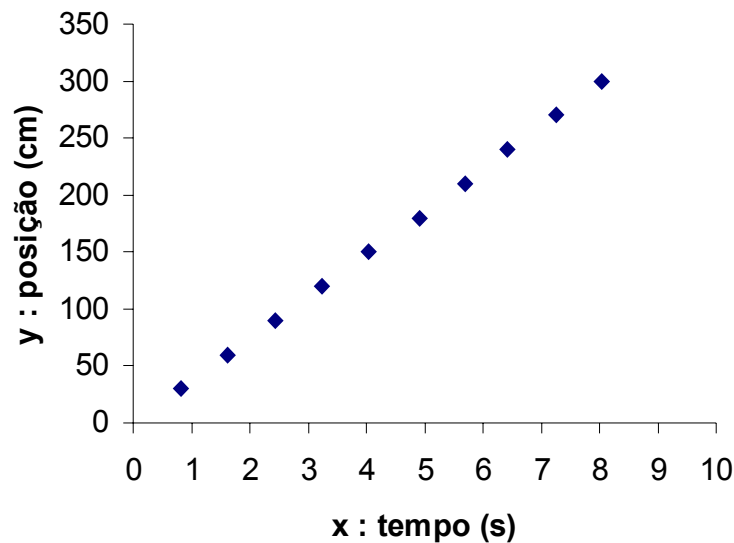


Ilustração 29: Primeiro gráfico do grupo "Therê".

$x$ <i>Tempos</i>	$y$ <i>Posição</i>	$\frac{y}{x}$
0,82	30	36,6
1,61	60	37,3
2,43	90	37,0
3,23	120	37,2
4,03	150	37,2
4,91	180	36,7
5,7	210	36,8
6,41	240	37,4
7,25	270	37,2
8,03	300	37,4
<i>Média (já arredondada)</i>		37

Tabela 7: Primeira tabela construída pelo grupo "Temporal".





**Ilustração 30: Primeiro gráfico do grupo "Temporal".**

Os próprios alunos chegaram a conclusão de que o resultado do gráfico está contido numa reta interceptando a origem do plano cartesiano. Por outro lado, O professor solicitou-lhes que fizessem outras tomadas de tempo, tanto a partir de tempos como a partir de posições ainda não representados no gráfico. O resultado foi o esperado. Concluíram que se tratava, realmente, de uma relação que é representada por uma reta no plano cartesiano.

Foi-lhes perguntado o que identificava as diferentes inclinações das retas. Não tiveram dificuldade em dizer que representava as diferentes velocidades dos carrinhos. Perguntados sobre uma outra representação de reta passando pela origem com inclinação superior a qualquer das inclinações das retas que eles construíram, foram de imediato dizendo que essa outra reta representava o movimento de um carrinho de velocidade maior.

Nesse momento, caberia orientá-los para perceberem a relação entre o valor encontrado constante nas divisões e o que ele representava geometricamente na representação gráfica. É evidente que eles conseguiriam fazer essa associação por si próprios: que as divisões representava os quocientes, para cada tempo  $x$ , das alturas (em relação ao eixo das abscissas)  $y$  pelos tempos correspondentes  $x$ . Provavelmente não teriam usado essa terminologia formal, mas a idéia seria alcançada. Essa atividade permitiria ao professor solicitar que construíssem a equação que representa algebricamente a última reta (apresentada pelo professor).

Uma vez que o professor não tinha como objetivo que os alunos identificassem, nessa aula, a relação desse estudo com o conceito de tangente (nem mesmo ele revisou com eles esse conceito), não lhes foi sugerida nenhuma atividade que levassem eles a desenvolver esse estudo nessa direção. Conforme tinha sido orientado pelo autor desta Dissertação, o professor tomou o cuidado de não chamar essa constante de "coeficiente angular" como é chamada pelos matemáticos.

Neste trabalho foi identificada a relação entre a constante reconhecida pelos matemáticos como coeficiente linear e o ponto onde a reta intercepta o eixo das ordenadas.

A próxima tarefa que o professor solicitou que fizessem foi de fazer novas tomadas de tempo de maneira análoga a anterior, mas tendo como pontos de partida outras posições que não a origem da pista (identificado pela posição "zero"). Esses pontos seriam escolhidos pelos próprios grupos, restringindo-se, apenas, que um fosse antes da origem e outro depois dela.

Novamente, foram construídos gráficos e tabelas como anteriormente. Só que, ao estágio de cálculo dos quocientes, foi solicitado que construíssem duas novas colunas. Uma coluna com os valores de  $y$  subtraído da posição de partida do carrinho, sendo que essa posição deveria ser identificada como negativa caso o carrinho partisse de antes da origem. Essa posição de partida foi identificada pela letra  $b$ . A última coluna com os quocientes de  $y-b$  por  $x$ . O resultado foi que obtiveram, novamente, a mesma constante. A construção da representação gráfica desse movimento no mesmo plano cartesiano representado antes ofereceu-lhes, de imediato, a confirmação da relação entre a inclinação da reta representada e a velocidade do carrinho.

O professor solicitou-lhes que encontrassem a relação algébrica entre as variáveis. Todos os grupos concluíram que essa relação era  $y=ax+b$ , onde  $a$  representava a velocidade do carrinho e  $b$  representava o ponto de partida dele ou o ponto de intersecção da reta resultante com o eixo das ordenadas.

O professor propôs exercícios de fixação que deveriam ser feitos fora do horário de aula. Esses exercícios eram de três tipos: o primeiro, de representar, graficamente, o comportamento do movimento de um carro hipotético com características mais próximas de um automóvel com velocidade estipulada pelo professor (os alunos podiam escolher comprimento de pista, pontos de partida e sentido de percurso – a escala em que construiriam o gráfico ficava por conta deles também); o segundo, de identificar, em gráficos construídos pelo professor (e impressos em uma folha que ele lhes forneceu), as características dos carros

cujos movimentos eles representavam; o terceiro, de construir, a partir de equações apresentadas pelo professor, os gráficos correspondentes.

Em aulas posteriores, o professor retomou os trabalhos que ele orientara que fizessem, avaliando-os com os mesmos grupos da aula anterior e deixando que outros alunos (que não compareceram na aula anterior) fizessem as mesmas experiências só que deu menos tempo para esses. Segundo o professor, os alunos que participaram da primeira experiência aparentaram estar muito à vontade ajudando os colegas para que chegassem onde eles tinham chegado. Depois disso, trabalhou com seus alunos a relação dessa constante “a” (identificada por eles como a velocidade do carrinho) com a tangente do ângulo da inclinação da reta construída no gráfico correspondente. Pode nomear, então, essa constante como o *coeficiente angular* dessa reta.

Contatando o professor, descobriu-se que o mesmo tinha percebido uma melhoria significativa na aprendizagem dos conceitos de função linear e afim em relação a turmas anteriores à primeira experiência. O professor informou que, em todas as outras turmas, no momento de introduzir esses conceitos, segundo sua própria expressão, ele “levava os carrinhos embaixo do braço” e procedia a aula como planejada. A diferença é que retomava, com os alunos, o conceito de tangente antes dessa aula. Foi-lhe perguntado se tinha tentado executar outros tipos de aulas onde os alunos construíssem outros conceitos de matemática a partir de situações familiares a eles. A resposta foi de que, “lecionando em três escolas diferentes e com uma família para cuidar, ele não dispunha de tempo para criar essas situações e programar essas aulas”.

#### **4.3 Atividades para levar estudantes à construção de representações cartesianas planas**

Neste item, relatam-se as atividades realizadas com base no modelo descrito no item 3.3. Essa experiência foi realizada com uma turma de 6<sup>a</sup> série de uma escola particular de Ensino Fundamental da cidade de Florianópolis. O professor da turma, Paulo, participou do planejamento, da organização e da confecção do material para a realização de todas as atividades realizadas, sugerindo, inclusive, algumas adaptações ao modelo para adequar à realização da experiência em sua turma de alunos.

Antes da realização dessa experiência, o Professor Paulo mostrou-se um pouco inseguro, mas decidido a experimentar esse modelo.

“Ainda não tenho bem certeza de que isso vai funcionar, mas vamos experimentar, né? A diretora da escola já aprovou a execução da experiência” (Prof. Paulo).

#### 4.3.1 Descrição da turma

A turma de alunos com que foram realizadas as atividades era constituída por 14 alunos na faixa etária dos 10 aos 12 anos.

#### 4.3.2 Atividades de revisão de pré-requisitos

Segundo o professor da turma, os alunos já haviam trabalhado com representação gráfica identificando o conjunto dos reais com uma reta orientada no plano. Assim, já estavam familiarizados com a identificação de posições por coordenadas positivas e negativas num único eixo. Essa informação se confirmou durante a experiência, uma vez que os alunos identificaram coordenadas negativas para posições do plano apresentadas pelo Professor Paulo.

#### 4.3.3 Material utilizado

Nesta experiência, utilizou-se o seguinte conjunto de materiais:

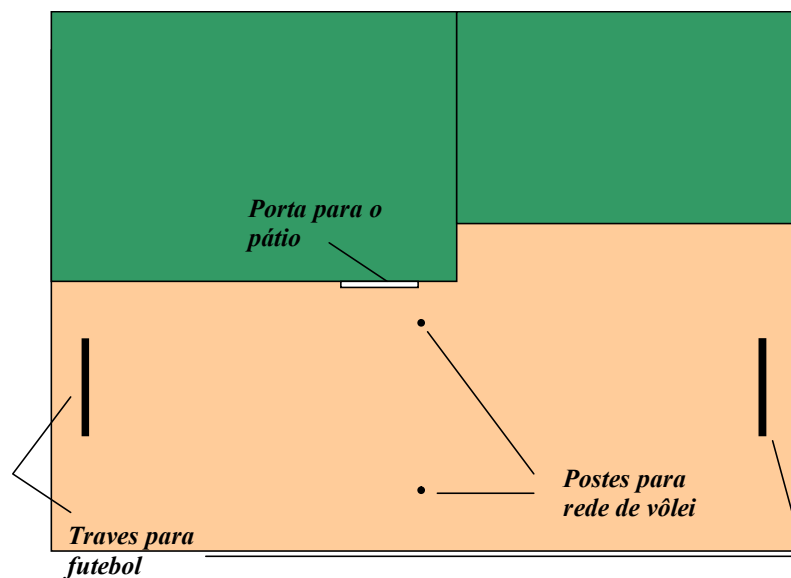
Sete pinos, um em cada uma das cores preta, vermelha, amarela, marrom, verde, azul e rosa (cada equipe foi simbolizada por uma cor);

- Cinco fitas métricas de cinco metros cada uma;
- 12 metros de corda;
- Dois crachás de cada uma das cores citadas acima;
- Papéis previamente impressos com as ações e restrições de cada uma das etapas;
- Cartaz onde apareciam as cores de cada equipe e uma referência cruzada para representar as distâncias entre as posições estimativas dos representantes de equipe e a posição real de seu símbolo.

#### 4.3.4 Procedimentos

Primeiro, organizaram-se os alunos em sete equipes de dois alunos cada uma. Colocaram-se os crachás em uma caixa opaca e um aluno de cada equipe sorteou a cor que simbolizaria a mesma. O professor explicou as regras do jogo e cada equipe escolheu, à sua maneira, o primeiro representante a acompanhar o professor até o pátio para o início da primeira fase do jogo.

Na Ilustração 31, apresenta-se um croqui, representando o pátio da escola. A área verde corresponde ao prédio da escola; a área do pátio foi representada em cor magenta, ao pátio. As dimensões do pátio são de, aproximadamente, 6m por 12m.



**Ilustração 31: Croqui representando o prédio e o pátio da escola onde se realizou a experiência.**

Apresenta-se, a seguir, resumo do que aconteceu em cada uma das quatro etapas do jogo. Observa-se que, em cada etapa, ocorrem duas fases, cada uma com um dos representantes de cada equipe.

##### Etapa 1 – fases 1 e 2

No pátio, estavam os sete representantes das equipes (na sala de aula, os outros alunos esperaram). Foram enterrados, na frente deles, as estacas em posições variadas. Um dos problemas que se apresentaram, nessa hora, foi o fato do terreno do pátio ser de areia com base bem dura, dificultando um pouco para se enterrarem as estacas. Foi utilizada uma enxada

para facilitar essa tarefa. Depois de se enterrarem as estacas, houve a necessidade de se disfarçar o terreno pra que não parecesse óbvio o lugar escavado (Ilustração 32).



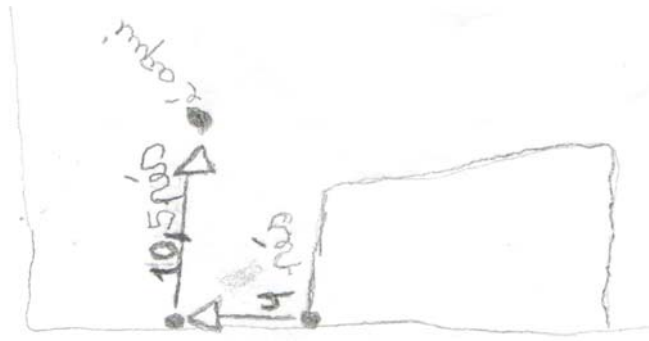
**Ilustração 32: Alunos ajudando um dos observadores da experiência a enterrar as estacas.**

Na Ilustração 33, aparecem alunos da escola que não eram dessa turma. Alguns deles observavam, com interesse, as atividades desenvolvidas pelos colegas.



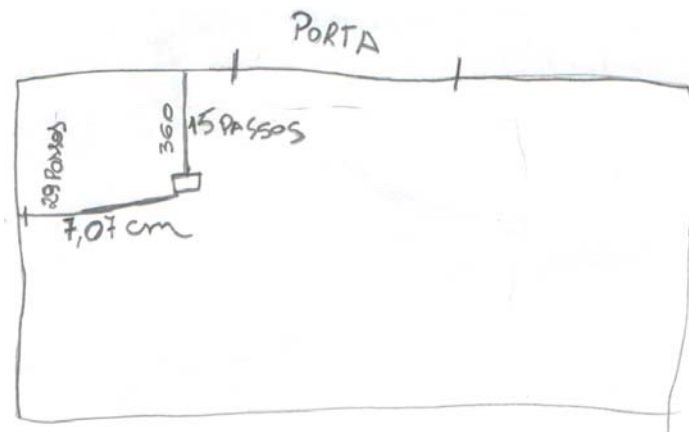
**Ilustração 33: Alunos tentando encontrar as estacas de suas equipes.**

A equipe vermelha, em ambas as representações, esboçou um mapa do pátio da escola, marcando, com um traço em vermelho, a posição de chegada do colega ao pátio. A identificação da posição foi feita a partir de uma das traves. O representante desta equipe marcou a distância, na primeira representação, em pés (Ilustração 34); na segunda representação, centímetros. Em ambos os casos, foram usadas indicações de deslocamentos em direções ortogonais entre si. Os erros nas estimativas das posições foram, respectivamente, de dezesseis e de zero centímetro.



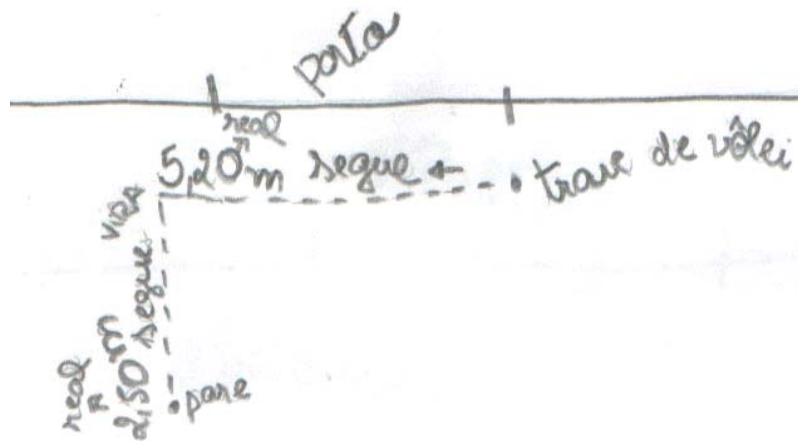
**Ilustração 34: Parte da primeira Representação da equipe vermelha na etapa 1.**

A equipe rosa, na primeira representação, esboçou um retângulo, identificando unicamente a porta (de entrada para o pátio) e duas direções ortogonais, utilizando medidas em centímetros e em passos (Ilustração 35). Essas unidades, escritas juntas no desenho, devem ter contribuído para a confusão do colega que procurou o símbolo da equipe, pois o erro na estimativa desta fase foi de 665cm.



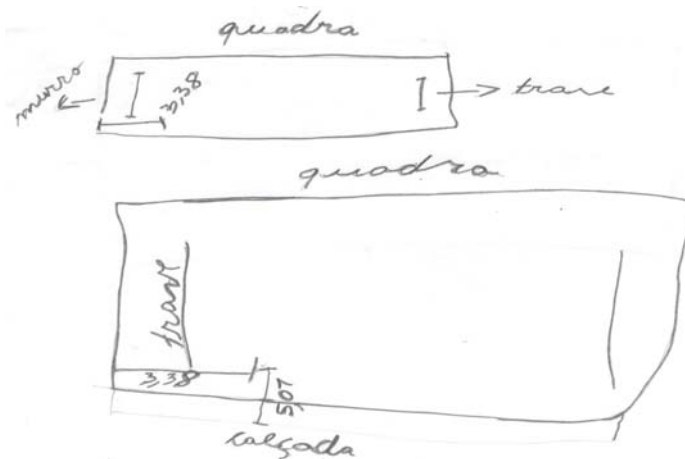
**Ilustração 35: Primeira representação da equipe rosa na etapa 1.**

O erro cometido pela estimativa da segunda fase foi de 13cm, quando o colega usou somente medida em centímetros (Ilustração 36). Em ambas as fases, foram esboçadas duas direções ortogonais entre si.



**Ilustração 36: Segunda representação da equipe rosa na etapa 1.**

A equipe preta, em ambos os casos, utilizou traços indicando duas direções ortogonais entre si com distâncias medidas em metros. Entende-se que os erros grandes nas estimativas das duas fases (respectivamente, 235cm e 100cm) se devem ao excesso de traços nos esboços gráficos produzidos que confundiram os dois membros dessa equipe (Ilustração 37). Não parecia clara a indicação da posição a partir da qual foram tomadas as medidas.



**Ilustração 37: Primeira representação da equipe preta na etapa 1.**

Na primeira representação, a equipe marrom esboçou um retângulo para representar o pátio, identificando as posições da porta e das janelas da sala de aulas deles. Desde o canto extremo do terreno, ao lado dessas janelas, representou um único segmento de reta inclinado em relação às paredes. Esse segmento, o aluno Caio, primeiro representante da equipe marrom, identificou com a medida “20 pés meus” (Ilustração 38). Entende-se que o esboço construído não auxiliou a identificação do local onde se encontrava o símbolo da equipe. Atrás da folha, este aluno escreveu “Tentarei deixar a ponta aparecendo. Cave, depois, tape

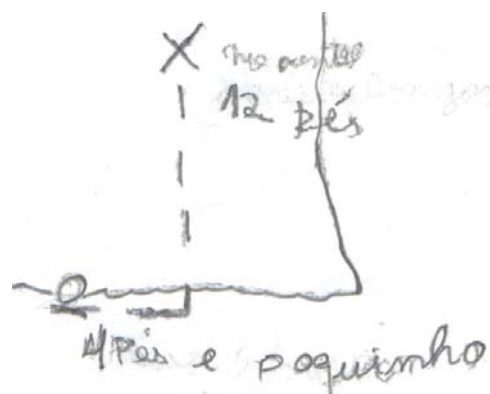


normalmente e não deixe ninguém ver, tá?" (aluno Caio). Claramente, este aluno estava burlando as regras. Este fato foi percebido pelo professor. Todavia, entendeu-se que não se deveria intervir expondo essa burla nesse momento. Tem-se clareza que foi devido a esse estratagema que esta equipe conseguiu obter um erro de estimativa somente de 1,5cm nessa primeira fase.



**Ilustração 38: Parte da primeira representação da equipe marrom na etapa 1.**

Na segunda fase, cuidou-se para que a burla não acontecesse. Entende-se que, nessa fase, a falta de referencial claro de onde se partiria a medida das distâncias e o fato do representante da equipe ainda ter usado, como unidade, a medida do comprimento de seus pés dificultaram a localização da estaca da equipe (Ilustração 39). Assim, o erro de estimativa, nessa segunda fase, foi de 136cm.



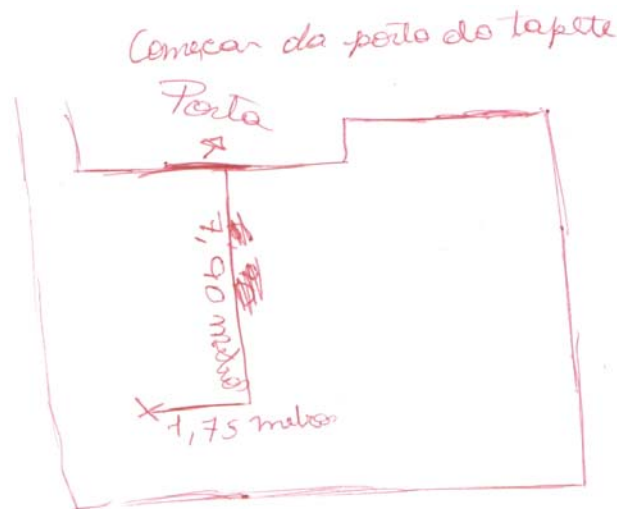
**Ilustração 39: Parte da segunda representação da equipe marrom na etapa 1.**

A equipe verde, na primeira fase desta etapa, usou, como único ponto de referência, um saco de lixo colocado perto da parede da porta de saída para o pátio. Utilizou, assim, apenas um segmento de reta e uma medida de distância (em metros), conseguindo estimar o local onde estava sua estaca com um erro de apenas 5cm (Ilustração 40).



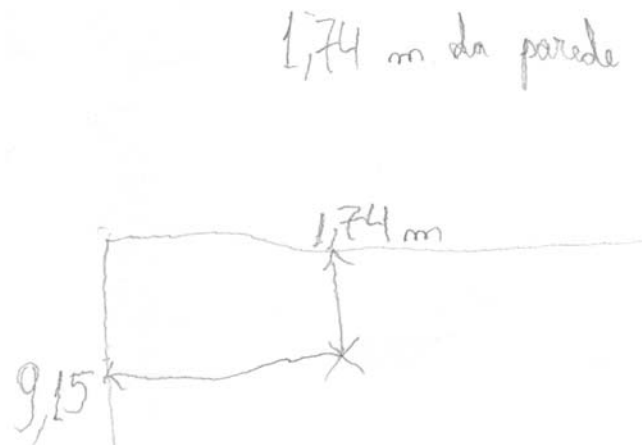
**Ilustração 40: Primeira representação da equipe verde na etapa 1.**

Na segunda representação (Ilustração 41), esta equipe utilizou um esboço identificando a porta para o pátio como ponto de partida e a indicação de dois deslocamentos ortogonais entre si com medidas em metros.



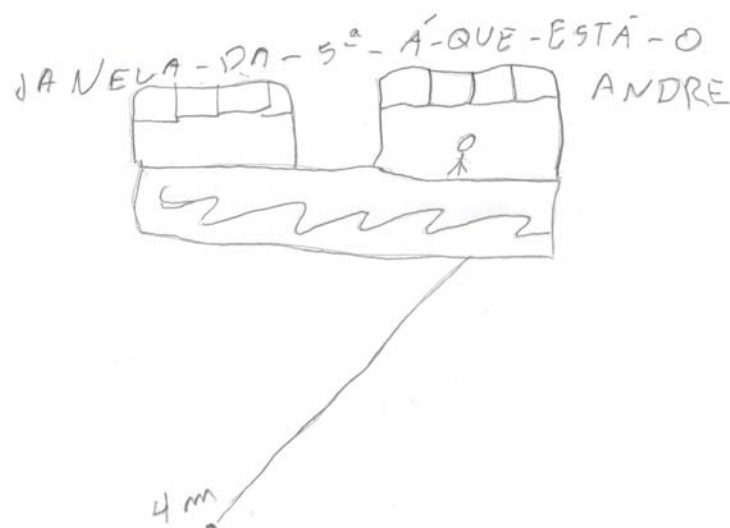
**Ilustração 41: Segunda representação da equipe verde na etapa 1.**

A equipe azul utilizou, em ambas as fases, de representações de segmentos ortogonais entre si, com medidas em metros, para identificar os deslocamentos necessários à descoberta do local onde se encontrava a sua estaca (Ilustração 42). Os erros, nas duas fases, foram, respectivamente, de 12cm e 14cm.



**Ilustração 42: Parte da primeira representação da equipe azul na etapa 1.**

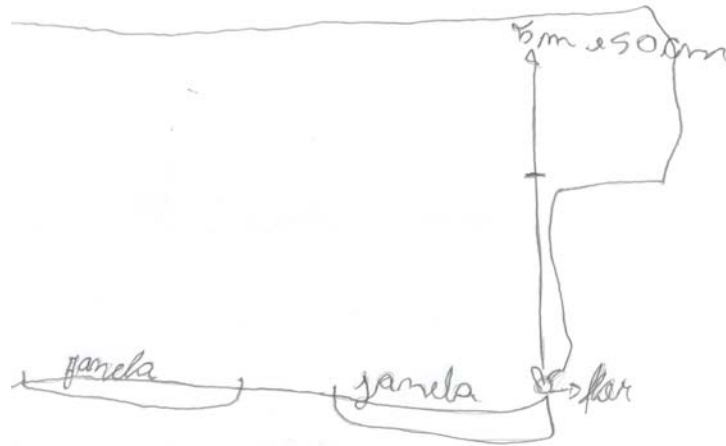
A equipe amarela, na primeira fase desta etapa, utilizou um único segmento (indicando 4m) para representar a distância até um ponto de referência. O desenho esboçado apresentava o espaço tridimensional com perspectiva, indicando a posição de um colega que estava à janela da sala que dava para o pátio bem na direção ortogonal que encontraria o local desejado (Ilustração 43). A partir da posição do colega no desenho, foi traçado um segmento, indicando a distância em metros. Assim, o erro que esta equipe cometeu em sua estimativa do local foi de apenas 2cm. Embora se entendesse que isso caracterizava uma burla das regras – o colega que se fixou na janela participou da representação, interferindo no processo de procura do local onde estava o símbolo da equipe – não foi chamada a atenção da equipe.



**Ilustração 43: Primeira representação da equipe amarela na etapa 1**

Na segunda fase, esta equipe colocou um vaso num dos cantos de uma parede da escola de modo que um segmento ortogonal à parede, partindo desde o vaso, alcançasse o

local a ser encontrado. O aluno representante da equipe indicou o local com um único segmento a partir do desenho do vaso, apresentando a medida da distância em metros e em centímetros (Ilustração 44). O erro foi de, apenas, 1cm.



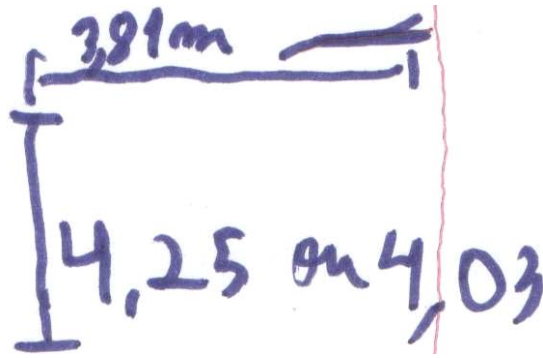
**Ilustração 44: Segunda representação da equipe amarela na etapa 1**

Uma observação que se julga importante é a de que, enquanto parte das equipes permaneciam na sala de aula, aconteciam trocas de idéias entre os alunos. Conquanto estivessem competindo no jogo, não escondiam, uns dos outros, suas estratégias de representação gráfica. Embora isso não fosse esperado pelo professor, foi bem recebido por ele, uma vez que esse fato levou à utilização de um único tipo de representação na próxima fase, o que era desejado que acontecesse.

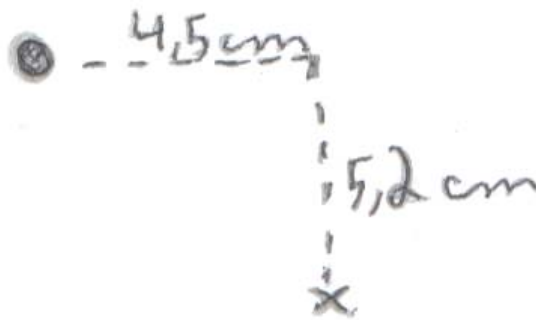
Outra observação é a de que as equipes que, no início da primeira etapa, tentaram medir as distâncias com pés ou passos, a partir da observação das estratégias dos outros colegas, passaram, também, a usar as fitas métricas.

### Etapas 2 e 3

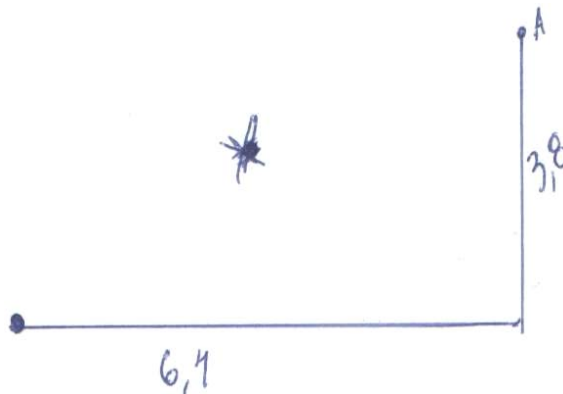
Nas duas etapas (2 e 3), as estratégias de se representarem posições por referencial cartesiano (dois segmentos ortogonais, duas distâncias em centímetros) consolidaram-se, como se pode observar nas Ilustrações 45, 46 e 47.



**Ilustração 45: Representação da equipe azul - etapa 3**



**Ilustração 46: Representação da equipe marrom - etapa 3.**



**Ilustração 47: Representação da equipe verde - etapa 3.**

As representações dessas duas etapas não forneciam informação suficiente para que se identificassem as direções dos segmentos. Esse problema não tinha sido previsto pelos organizadores da experiência. A partir dessa constatação, percebe-se que há a necessidade de se identificar alguma direção como sendo a horizontal. Uma das maneiras que se encontraram foi a de estabelecer um ponto de partida, a partir do qual o aluno que está procurando o objeto deve começar seu caminho pelo pátio, esclarecendo a toda a turma essa indicação.

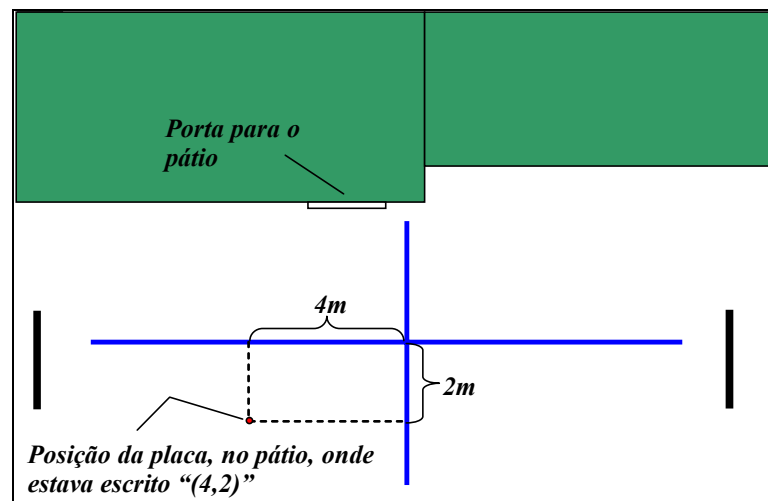
De qualquer maneira, o que se tinha de objetivo até estas fases tinha sido alcançado: os alunos construíram suas primeiras representações cartesianas para identificarem pontos de uma superfície. Ademais, conseguiam que seus colegas entendessem essas representações. O professor da turma declarou-se emocionado ao ver seus alunos construindo essas representações por si mesmos.

“Olha! Olha! Eles estão fazendo os gráficos cartesianos! ... Isso chega a me arrepiar!”. (Prof. Paulo)

Conquanto os organizadores da experiência esperassem que os alunos chegassem a isso (e o Prof. Paulo estava entre os organizadores), quando o fato aconteceu, não deixou de oferecer alguma emoção aos observadores das atividades.

#### Etapa 4

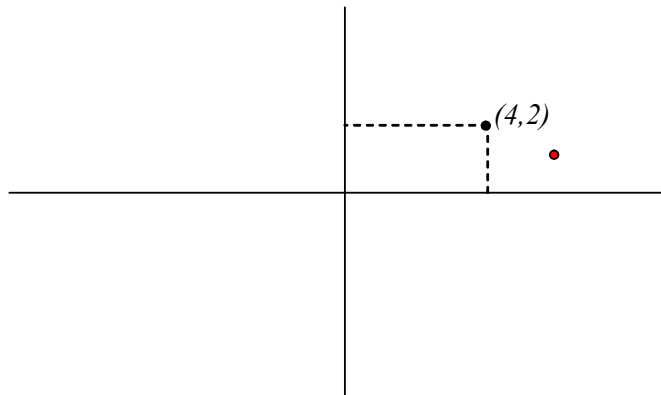
Nesta etapa, o professor estendeu duas cordas azuis atravessadas, ortogonalmente, no pátio e representou a posição  $(4,2)$ , como referência de exemplo, em coordenadas cartesianas por uma placa colocada nesta posição (conforme croqui da Ilustração 48). Subentendeu-se que os sentidos dos dois eixos coordenados estivessem estabelecidos pela identificação apresentada pela placa.



**Ilustração 48:** Croqui representando o local onde foi fixada a placa na qual estava escrito " $(4,2)$ ".

Nesta primeira fase, cada equipe construiu a representação da posição de seu símbolo pela letra A. Para todas as equipes, a letra A indicava uma posição no primeiro quadrante; i.e.,

ambas as coordenadas da localização de seu símbolo eram positivas. Na Ilustração 49, apresenta-se um croqui da posição onde foi colocada a estaca da equipe vermelha nesta fase.



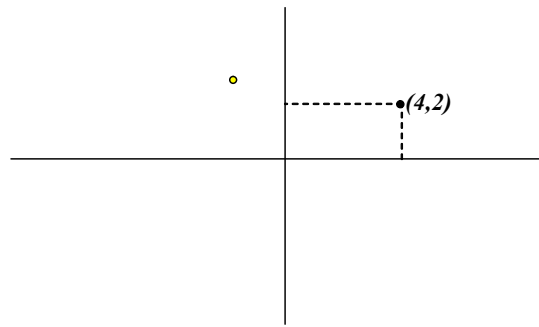
**Ilustração 49: Croqui mostrando a posição, no pátio, da estaca da equipe vermelha na primeira fase da etapa 4**

Todos os representantes de equipe representaram a posição de seu símbolo de tal maneira que o colega pôde estimar a posição com erro menor do que 30 cm (Ilustração 50); i.e., todas as equipes fizeram pontos nesta fase. Acredita-se que o fato de que as duas coordenadas eram positivas fez com que todos os representantes de equipe, nesta fase, construíssem suas representações (em pares ordenados) em concordância com a posição do plano em que se encontrava a referência de exemplo.

<p>4ª FASE          Equipe: <i>vermelha</i>          Aluno: <i>Vanessa</i>          Ponto N<sup>o</sup>:</p>	<p>Representar o ponto em questão, usando dois números separados por vírgula entre parênteses.</p>							
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">Nome do aluno</th> <th style="padding: 5px;">ponto</th> <th style="padding: 5px;">representação</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;"><i>Vanessa</i></td> <td style="padding: 5px;">A</td> <td style="padding: 5px;"><i>( 6,2 , 2,1 )</i></td> </tr> </tbody> </table>	Nome do aluno	ponto	representação	<i>Vanessa</i>	A	<i>( 6,2 , 2,1 )</i>		
Nome do aluno	ponto	representação						
<i>Vanessa</i>	A	<i>( 6,2 , 2,1 )</i>						

**Ilustração 50: Primeira representação da equipe vermelha na etapa 4.**

Na segunda fase, o professor escondeu os símbolos das equipes em posições para as quais uma das coordenadas era negativa (a primeira) e outra positiva. Na representação simbólica no papel, essa posição era indicada pela letra B (Ilustração 51).



**Ilustração 51: Croqui representando a posição B (segunda fase da etapa 4) da equipe amarela no pátio da escola.**

Nesta segunda fase, nenhuma das equipes percebeu que a primeira coordenada deveria ser negativa. Nenhuma equipe fez pontos nesta fase; todas as estimativas de localização dos símbolos foram a distâncias maiores do que 30cm da localização correta (Ilustração 52).

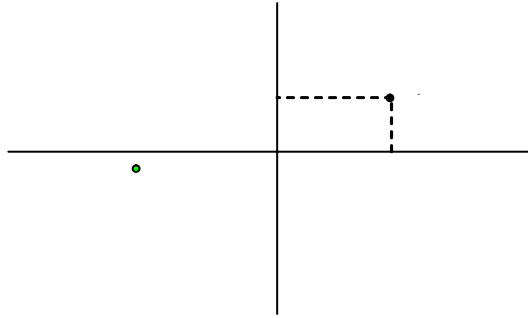
<p>4ª FASE          Equipe: Amarela          Aluno: Cibon, Duan          Ponto N°: C</p>		<p>Representar o ponto em questão, usando dois números separados por vírgula entre parênteses.</p>
Nome do aluno	ponto	representação
Cibon	A	(5,3 . 2,8)
Duan	B	(1,9 . 5,2)

**Ilustração 52: Representação da posição B do pátio (fase 2) na etapa 4 feita pela equipe amarela.**

Esse fato causou um grande alvoroço entre as equipes. Alguns declaram, em tom de brincadeira, que tinha sido “golpe baixo” do professor. Ficou claro para os observadores que todos perceberam a necessidade de se indicar com sinal negativo o deslocamento para a esquerda do eixo que seguia a direção de quem entrava no pátio (no croqui aqui apresentado, o eixo vertical).

Na terceira fase desta etapa, o professor colocou cada um dos símbolos das equipes numa posição do terceiro quadrante; i.e., ambas as coordenadas negativas. Cada uma das equipes representou a posição de seu símbolo com ambas as coordenadas negativas e com bastante precisão. Todos ganharam pontos nesta fase. Apresentam-se, nas Ilustrações 53 e 54, respectivamente, um croqui indicando a posição do símbolo da equipe verde no pátio e a representação feita por esta equipe nesta terceira fase da etapa 4.





**Ilustração 53: Croqui representando a posição do símbolo da equipe verde no pátio da escola na terceira fase da etapa 4.**

<p>4ª FASE          Equipe: Verde          Aluno: Felipe          Ponto N°:</p>
---

Representar o ponto em questão, usando dois números separados por vírgula entre parênteses.

Nome do aluno	ponto	representação
Filipe Welber	A	( 9,5 , 3,3 )
John Rivers	B	( 8,3 , 5,2 )
	C	( -5,1 , -1 )

**Ilustração 54: Representação da posição do símbolo da equipe verde no pátio (terceira fase da etapa 4).**

Entendeu-se que os alunos, a partir das atividades que realizaram até esta terceira fase da quarta etapa, tinham não só construído esse tipo de representação (cartesiana), mas já conseguido entender o que cada coordenada significava na convenção (sub)entendida pela referência de exemplo - posição (4,2) identificada pela placa colocada no pátio.

Pela avaliação dos professores que acompanharam a execução da experiência, as estratégias de se constituírem equipes de somente dois alunos não se mostrou muito apropriada. Os alunos que ficavam tentando medir as posições solicitavam constante auxílio para firmarem as fitas métricas. Também, é desejável que haja, ao menos, dois alunos de uma determinada equipe que fiquem em sala de aula para discutirem, entre si, sobre as representações que estão construindo e elaborem essa construção durante as diversas etapas do jogo. De maneira análoga, é interessante que haja dois alunos de cada equipe, também, no pátio à procura do símbolo da equipe, pois os dois podem fornecer subsídios, um ao outro, na direção de se entender a representação gráfica feita pelos colegas. Assim, entende-se que seriam mais apropriadas equipes com quatro alunos cada uma.

Em entrevista posterior a essa experiência, o Professor Paulo declarou que essa turma de alunos, ao tratarem com representações em gráficos cartesianos demonstrou uma desenvoltura significativamente maior do que colegas de outras turmas que não passaram pelas experiências descritas.

Entende-se, assim, que este modelo é adequado ao objetivo de levar alunos à construção de referenciais cartesianos para identificação de pontos em superfícies planas.

#### **4.4 Atividades para levar estudantes à construção do conceito de tangente**

Apresenta-se, nesta seção, descrição de uma experiência didática realizada com alunos de Nível Médio cujo objetivo era o de levá-los à construção do conceito de tangente. As atividades foram realizadas somente em uma turma de 3ª série de uma escola pública estadual. A professora da turma acreditava, inicialmente, que o processo não representaria novidade aos alunos, uma vez que eles já realizavam cálculos para resolverem problemas de geometria e física, utilizando valores de tangentes de ângulos. Todavia, ela entendia que a maioria dos alunos ainda não tinha bem construído o conceito de tangente, apesar de utilizá-lo nos cálculos; concordando em executar a experiência com essa turma. Não houve atividade de revisão de pré-requisitos, uma vez que se entendia como desnecessário. Os materiais utilizados foram apenas papel, régua, esquadros, transferidores e lápis.

##### **4.4.1 Descrição da turma**

A turma de 3ª série do Nível Médio com que se realizou essa experiência era constituída por treze alunos, um com dezessete anos de idade e outros, todos, com idade entre 19 e 22. As aulas eram à noite e o único aluno que ainda não estava trabalhando enquanto cursava o Ensino Médio era o aluno de dezessete anos. Segundo a professora em entrevista antes da experiência, oito desses alunos tinham grandes dificuldades em lidar com a geometria estudada nessa série.

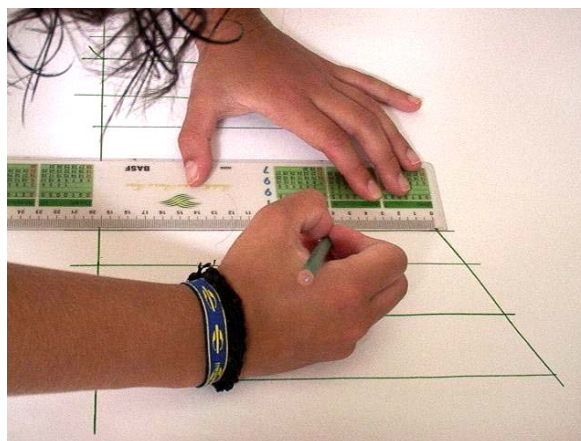
“Eles não se dão muito bem com a geometria ... Eles até fazem cálculos, acertando às vezes, mas não parece que entendem o que estão calculando. Quando pergunto pra confirmar, ... já fiz isso várias vezes, eles não conseguem me explicar direito.”  
(Profª. Cláudia)

#### 4.4.2 Procedimentos

A professora Cláudia declarou aos alunos que, naquela noite, como eles já tinham sido avisados na aula anterior, eles fariam algo diferente das demais aulas. Cláudia havia orientado os alunos para trazerem máquinas de calcular (com as quais se pudessem fazer as quatro operações básicas com os números). Os alunos organizaram-se em grupos de três componentes (com exceção de dois grupos, que ficaram constituídos por dois alunos cada), cada um dos quais recebeu uma folha de papel grande (60cm x 60cm), um esquadro grande (com uma das arestas de 40cm de comprimento) e uma régua de 50cm.

Orientaram-se os grupos para que, usando a régua e o esquadro, construíssem uma representação gráfica de um ângulo na folha de que dispunham. Foi-lhes observado que não se restringissem a um pequeno espaço da folha, mas construíssem um ângulo com dois segmentos de reta de, ao menos, 30cm cada. A medida do ângulo ficou ao critério de cada grupo. Cláudia solicitou aos alunos que determinassem qual dos segmentos que limitavam o ângulo seria considerado na direção horizontal.

Depois que cada um dos grupos desenhou seu ângulo, o professor escreveu no quadro-negro a seguinte frase: “Agora, traçar dez segmentos de reta à escolha do grupo, resguardando as condições de serem paralelos entre si e perpendiculares à direção horizontal”. Dois grupos tiveram dificuldades para entender o que estava sendo solicitado. A professora acompanhou esse trabalho dos alunos, explicando, aos que não tinham entendido, o que estava sendo solicitado. A Ilustração 55 mostra uma das representações gráficas sendo construída.



**Ilustração 55: Aluna traçando segmentos perpendiculares à direção horizontal.**

Para todos os grupos, com exceção de dois deles, a distância era a mesma entre dois desses segmentos desenhados consecutivos (o que não estava sendo solicitado).

Apenas um grupo (dos alunos Mara e Sílvio) representou um ângulo obtuso (Ilustração 56) mostra o trabalho realizado pelas alunas Camila e Raquel.

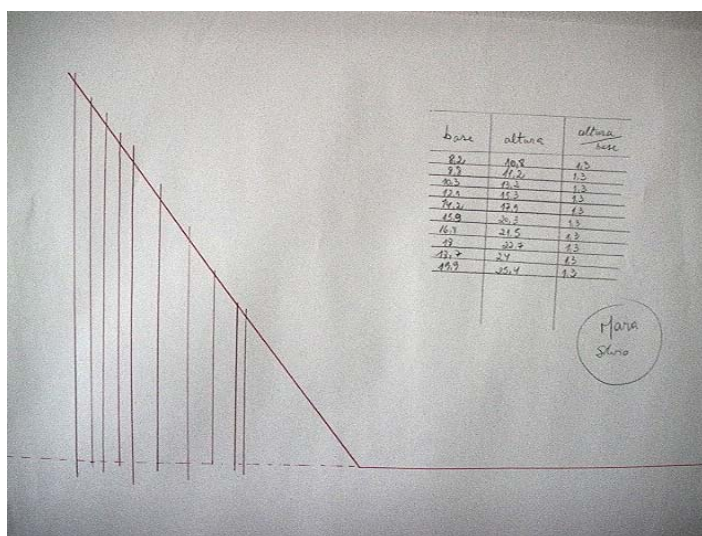


Ilustração 56: Representação de um obtusângulo.

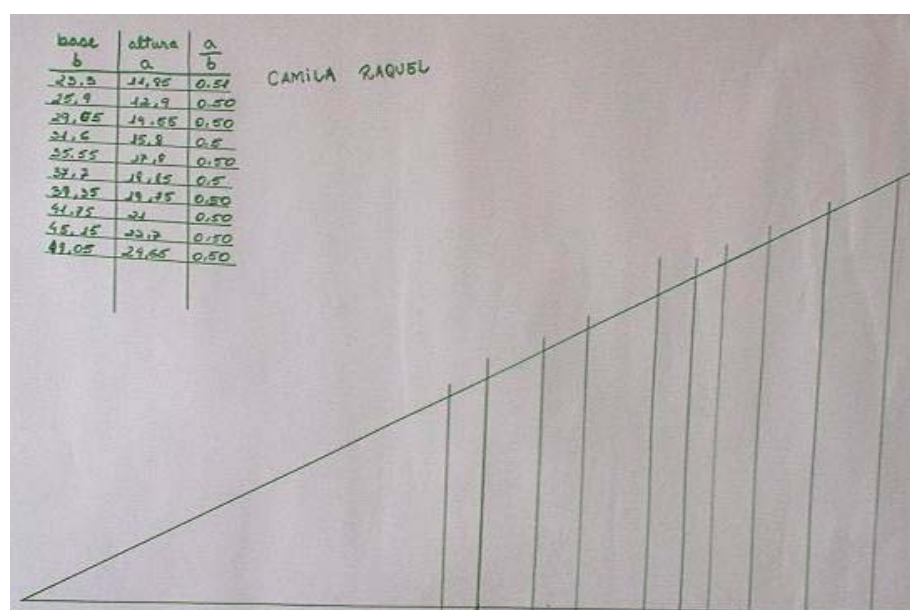


Ilustração 57: Desenho de ângulo e tabela com valores de catetos e divisões entre eles

A professora solicitou que medissem os comprimentos da parte dos segmentos verticais que estavam na parte interna do ângulo e as distâncias entre as respectivas intersecções desses segmentos com a direção horizontal. Solicitou, também, que fizessem as divisões das alturas dos triângulos assim construídos pelas respectivas bases dos mesmos (no contexto, *cateto oposto ao ângulo* e *cateto adjacente ao ângulo*, respectivamente). Foi-lhes orientado que o resultado da divisão deveria ser arredondado até a primeira casa depois da vírgula. A

Ilustração 58 apresenta a tabela construída pelos alunos Mara e Sílvia com medidas e cálculos elaborados por eles.

base	altura	$\frac{\text{altura}}{\text{base}}$
8,2	10,8	1,3
8,8	11,2	1,3
10,3	13,2	1,3
12,1	15,3	1,3
14,2	17,9	1,3
15,9	20,3	1,3
16,8	21,5	1,3
19	22,7	1,3
19,7	24	1,3
19,9	25,4	1,3

**Ilustração 58: Tabela com medidas de segmentos e resultados de divisões**

Um dos grupos tinha um valor de quociente calculado bastante diferente dos demais em sua tabela. Ao verem que seus colegas de outros grupos tinham um resultado de igualdade em seus cálculos, refizeram suas medidas, percebendo que tinham feito uma medida incorreta.

Contrariamente ao previsto pela professora Cláudia, os alunos demonstraram muita surpresa ao perceberem que o mesmo valor se repetia, embora os cálculos tivessem sido elaborados usando-se medidas diferentes relativas à figura que haviam desenhado.

A professora solicitou que lhe dissessem o que significava aquele número que se repetia nos cálculos. Após esperar pela resposta por, aproximadamente, cinco minutos, um dos alunos expressou-se, aparentando incerteza, perguntando se era a tangente do ângulo. Obviamente, isso foi confirmado pela professora. Esse fato confirmou uma das suspeitas dos organizadores da atividade: apesar dos alunos, para resolverem problemas envolvendo geometria plana, elaborarem cálculos usando expressões e valores que significavam tangentes de ângulos, não estava claro para eles os seus significados.

A professora propôs aos alunos fixarem seus trabalhos nas paredes da sala em ordem crescente de valores de ângulos (Ilustração 59).

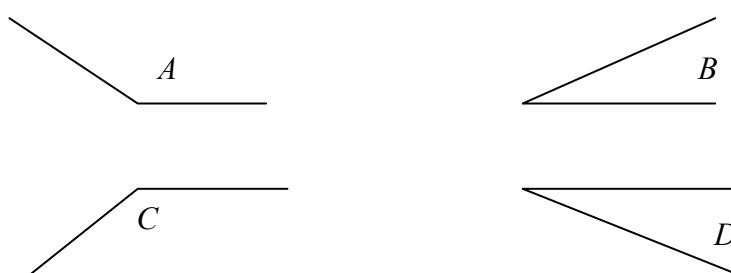


**Ilustração 59: Aluna fixando o trabalho na parede.**

Com os ângulos desenhados fixados na parede, a professora Cláudia perguntou aos alunos qual a relação entre os ângulos e suas medidas de tangente (ainda sem a observação de que, para o caso do obtusângulo, o valor não representava exatamente a tangente dele). Os alunos perceberam que com o aumento dos ângulos as tangentes são maiores, exceto para ângulos maiores do que  $90^\circ$ . Isso pode ser visto na expressão do aluno Rodrigo:

“Quando o ângulo cresce, a tangente fica maior” (Aluno Rodrigo)

Outros alunos lhes chamaram a atenção, dizendo que o ângulo maior do que  $90^\circ$  não seguia essa regra. Naquele momento, a professora apresentou-lhes, no quadro-negro, as representações de quatro ângulos como na Ilustração 60.



**Ilustração 60: Quatro ângulos representados.**

A professora, então, solicitou-lhes que dissessem, sem pensar, quais dessas figuras *A*, *B*, *C* e *D* representavam subidas e quais representavam descidas. As respostas foram unânimes: *B* e *C* representavam subidas e *A* e *D*, descidas. Assim, a professora declarou aos

alunos que, para indicar que um ângulo representa uma descida, usamos o sinal *negativo*, por exemplo, no valor  $1,3$  do quociente calculado para o ângulo obtuso apresentado na Ilustração 56. Assim, a tangente do ângulo representado nessa ilustração tem valor  $-1,3$ .

Depois dessas atividades, a professora propôs o cálculo de tangentes de diversos outros ângulos que ela mesma esboçou graficamente. Os alunos tomaram algumas medidas, como nas atividades anteriores, calculando as tangentes solicitadas.

Por comentários feitos pela professora durante essa experiência, os alunos estavam, mesmo, aprendendo o conceito de tangente. Ela lembrou que havia dito que os alunos não se surpreenderiam com a *descoberta* e fez uma declaração que se mostra interessante para esse trabalho:

“A gente acha que sabe o que eles estão pensando, mas vê que ‘tá enganada quando fica encima deles de verdade ...’ (Prof<sup>a</sup> Cláudia)

Essa observação da professora vai ao encontro do que já foi dito no Capítulo 2 sobre a importância de se entender como a aprendizagem acontece. Muitos dos instrumentos que os professores usam para entender o que realmente acontece com seus alunos (como a famigerada *prova*), não se mostram muito adequados. O acompanhamento de atividades realizadas por eles enquanto efetivamente *constroem* seu conhecimento mostra-se, muitas vezes, mais produtiva nesse sentido.

A professora declarou, ao final das atividades, que “deu pra ver que eles aprenderam de verdade” (Prof<sup>a</sup>. Cláudia).

Em entrevista, após alguns dias da experiência, essa professora disse que havia proposto diversos problemas aos alunos, “como se fosse uma prova, só que sem falar para eles” (Prof<sup>a</sup>. Cláudia), envolvendo o conceito de tangente e toda a turma, sem exceção, saiu-se muito bem na resolução dos mesmos. Ela, também, declarou-se surpreendida com isso, apesar de ter acompanhado a experiência.

Nessa mesma entrevista, Cláudia mostrou-se muito interessada em modificar, ao menos, algumas de suas aulas e tentar ensinar outros conceitos que ela julga serem importantes para os alunos de uma maneira análoga à utilizada na experiência realizada.

“Agora que eu vi que funciona tão bem, vale a pena gastar tempo preparando esse tipo de coisa!” (Prof<sup>a</sup>. Cláudia).

Entende-se, assim, que essa experiência foi bem sucedida, tanto no que diz respeito ao efeito nos alunos que dela participaram, quanto no que diz respeito às provocações feitas,

indiretamente, à professora da turma para que a mesma refletisse um pouco sobre suas concepções de ensino e aprendizagem e sobre sua prática de sala de aula.

#### **4.5 Atividades para levar estudantes à construção do conceito de equação**

Neste item, descrevem-se duas situações de sala de aula onde foi experimentado o modelo descrito no item 3.5. Essas atividades foram executadas numa turma 6<sup>a</sup> série e noutra de 3<sup>a</sup> série do Nível Fundamental. O professor da turma da 6<sup>a</sup> série participou da elaboração do material utilizado e da programação das atividades. A professora da 3<sup>a</sup> série apenas foi contatada e se apresentou uma explicação da atividade que, com seu consentimento, seria realizada com seus alunos.

##### 4.5.1 Descrição das turmas

Essas duas turmas de alunos onde se realizaram as experiências eram de uma escola estadual situada no município de Capão do Leão (RS) que oferece da 1<sup>a</sup> à 6<sup>a</sup> séries do Nível Fundamental nos turnos matutino e vespertino. Ambas as turmas eram do horário matutino e as atividades aconteceram nos horários das aulas.

A turma de 6<sup>a</sup> série (Prof. Marcos) era constituída de 11 alunos na faixa etária dos 13 aos 16 anos. Da turma de 3<sup>a</sup> série (Prof. Lívia) participavam 13 alunos na faixa etária dos 8 aos 13 anos.

##### 4.5.2 Atividades de revisão de pré-requisitos

Em ambos os casos, nas entrevistas que antecederam as experiências, os professores responsáveis pelas turmas envolvidas nos declararam que os alunos já tinham construído os conhecimentos e as habilidades necessários à participação na experiência, quais sejam, conhecimento das operações de soma, subtração (com números menores do que vinte) e multiplicação (apenas por dois, de números menores do que dez). Isso se confirmou durante as experiências.



#### 4.5.3 Material utilizado

O material que se usou nessas duas experiências foi o mesmo já descrito no item 3.5. Na turma de 6<sup>a</sup> série, utilizaram-se três balanças; na turma de 3<sup>a</sup> série, quatro. Convém salientar, aqui, que, nesta última turma, não foram utilizadas as peças *X* e *Y* por terem valores de peso 4,5 e 2,5 unidades respectivamente. O motivo disso foi que essa turma ainda não tinha trabalhado com números em que aparecem partes menores do que a unidade (*casas decimais depois da vírgula*). Durante a aplicação nesta turma, percebeu-se uma possibilidade de se levarem os alunos a perceberem a necessidade de se escreverem números menores do que a unidade e, mesmo, a construírem essa representação a partir de situações como o equilíbrio com peças do tipo das peças *X* e *Y*. A estratégia que se elaborou nesse sentido será descrita, mais adiante, na apresentação da aplicação do modelo para a construção da notação posicional dos números (item 4.5) como sugestão de continuidade.

#### 4.5.4 Procedimentos

Nas duas turmas, os procedimentos foram os mesmos. A diferença foi apenas nas restrições em termos de material (já citado no parágrafo anterior). Num primeiro momento, ainda sem ter distribuído material algum para os alunos, o professor provocou-os à reflexão sobre o que acontece numa gangorra quando dois alunos de pesos bastante diferentes (ou ele, o professor, bastante mais pesado que qualquer dos alunos, e um dos alunos da turma) posicionam-se um em cada ponta da mesma. Os alunos expressaram sua percepção do que aconteceria nessa situação hipotética. Observou-se, claramente, que os alunos entendiam o sentido do equilíbrio ou desequilíbrio em casos de pesos iguais e em casos de pesos diferentes. Depois disso, o professor solicitou que os alunos se organizassem em grupo de três ou quatro e apresentou o material para a turma.

##### 4.5.4.1 Descrição da experiência na turma de 6<sup>a</sup> série

Na turma da 6<sup>a</sup> série, foram organizados três grupos, um, constituído de três alunos e dois, constituídos de quatro alunos. O primeiro material entregue a cada grupo foi um Kit para montagem da balança (Ilustração 61).



**Ilustração 61: Conjunto de peças para montagem de balança de equilíbrio.**

Os alunos montaram, rapidamente, as balanças, mesmo sem instruções de como fazê-lo (Ilustração 62).



**Ilustração 62: Balança de equilíbrio montada sendo utilizada pelos alunos.**

Embora essa escola seja localizada numa cidade do interior do Rio grande do Sul, os alunos dessa turma não conheciam esse tipo de balança que, há bem pouco tempo atrás, eram muito comuns em feiras públicas do interior. Foram distribuídas as peças de referência (com valores identificados por rótulos) aos grupos para que eles experimentassem as diversas situações de equilíbrio e desequilíbrio da balança. Alguns, ao colocarem as peças dos diversos valores e encontrarem um equilíbrio, exclamaram “Olha só, ‘tá equilibrado!”, como se estivessem espantadas com o fato. Essas crianças já foram criadas envoltas à tecnologia das balanças eletrônicas.

Depois que eles já se mostravam familiarizados com as peças de referência, o professor disse a eles que eles seriam desafiados a descobrir valores de algumas peças que seriam entregues a eles. O professor recolheu as peças de referência e distribuiu os conjuntos específicos de peças para os desafios. A Tabela 8 apresenta os conjuntos utilizados. Cada vez que um grupo encontrava o valor da peça identificada por letra, ele recebia outro conjunto com peça desconhecida (cujo valor deveria ser encontrado). Os conjuntos eram passados de um grupo a outro para que todos tivessem a oportunidade de passar pelas diversas situações que a experiência envolvia. Foi solicitado, pelo professor, que os alunos fizessem anotações em papel que explicassem cada passo que tomaram no caminho da resolução do problema. Esse material escrito foi, ao fim da aula, recolhido pelo professor.

Conjuntos	Valores dos pesos da peça desconhecida	Peças
A	8	A, 5, 5, 2 e 2
B <sub>1</sub>	4	B, 5, 5, 3, 3
B <sub>2</sub>	4	B, 5, 1
C	12	C, 5, 5, 5, 3
D	10	D, 3, 3, 3, 3, 2
E	16	E, 5, 5, 5, 4, 3
F <sub>1</sub>	3	F, F, 5, 1
F <sub>2</sub>	3	F, F, 5, 5, 4
H	5	H, 4, 4, 4, 3
X	4,5	X, X, 5, 4, 2
Y	2,5	Y, Y, 4, 4, 3, 1

**Tabela 8: Identificação e descrição dos conjuntos de peças fornecidos aos grupos de alunos.**

Durante as tentativas de equilibrar as peças nas balanças, ficou explícito o grande entusiasmo dos alunos com a atividade. No início, os grupos faziam muitas tentativas, trocando as peças de lugar nos pratos diversas vezes; algumas, até, que representavam uma

situação já analisada por eles, mas apenas com as peças trocadas de um prato ao outro. Todos os alunos, em cada grupo, participaram ativamente.

A Ilustração 63 mostra os alunos durante a atividade.



**Ilustração 63: Alunos trabalhando com a balança de equilíbrio.**

Um fato, aqui, mostra-se interessante: cada um dos grupos, depois de perceber uma estratégia que oferecia a solução do problema, nos outros desafios, ao invés de colocar, ao acaso (como faziam nas primeiras tentativas) peças nos pratos das balanças, utilizou-se de discussões entre os elementos do grupo. Os alunos explicavam, sem colocar as peças nas balanças, estimando o que aconteceria. Em algumas vezes, observou-se que essas estimativas não se concretizaram. Nesses casos, muito rapidamente, eles corrigiam a situação, encontrando a solução do problema.

As soluções dos problemas propostos foram encontradas em bem menos tempo do que se previa. Como ilustração, apresentam-se partes de registros dos três grupos de alunos<sup>27</sup>:

“... quando tiramos uma unidade do lado esquerdo, o lado direito com três unidades desce. ... Quinze – três é igual a 12. O que corresponde à unidade do peso C. ...  $2Y$  corresponde a 5 unidades ... O peso de Y é 2,5”. (Alunos Aline, Daiane, Cindy e Felipe)

“A letra B pesava 4. Para a gente descobrir o peso exato da letra B, tivemos que botar, no outro lado da balança, 5, e botamos uma moeda de 1 na letra B. Chegamos a conclusão que a letra B pesava 4. ... Para descobrir o valor de X, tivemos que

---

<sup>27</sup> Optou-se por reescrever o que os alunos registraram com as devidas correções gramaticais, mas respeitando as formas de expressão utilizadas por eles.

colocar, no outro lado, 9 para descobrir o peso exato de X; e chegamos a conclusão que X pesa 4,5”. (Alunos Cleiton, Natanael e Pablo)

“Escrevemos  $2Y=5$ ”. (Alunos Jennifer, Tanise e Alex)

Pôde-se perceber, claramente, que os alunos entenderam o sentido do que faziam pelas expressões faladas e escritas durante a experiência. Assim, entende-se que esses alunos construíram o conceito de equação a partir dessa experiência e, além disso, que perceberam aspectos essenciais dessas situações que levam a construção de algoritmos para resolução desse tipo de problema. A grande maioria dos alunos não expressou cada situação (equação) com simbologia matemática. Entende-se que isso se deve ao fato desse conceito ainda não ter sido bem construído por eles antes dessa atividade; caso contrário, eles provavelmente escreveriam a equação correspondente, como o grupo que escreveu a equação  $2Y=5$ . Percebe-se que, apesar de essa ter sido a única equação expressa por símbolos matemáticos de todos os alunos, que algo da teoria matemática relacionada com isso ficou guardada nas cabeças de alguns integrantes desse grupo.

Durante essa experiência, percebeu-se que se poderia trabalhar com essa mesma estratégia com alunos de séries menores. Cogitou-se executá-la numa turma de 3ª série. A professora dessa turma foi contatada e, indagada a respeito, concordou com essa realização.

Quando entrevistados depois da experiência, os alunos dessa turma mostraram-se contentes por terem participado dela. Uma das observações mais repetidas por eles foi a de que muitos de seus colegas quase não participavam das aulas normalmente e viviam “causando problemas para a professora” (Aluno Cleiton), mas, nessa atividade, eles se envolveram bastante. Quando perguntados sobre o que eles aprenderam, somente falaram que passaram a entender mais sobre o equilíbrio de pesos.

Observa-se que, nas aulas seguintes a essa experiência, o professor da disciplina estabeleceu, com eles, a relação do que fizeram com o estudo de equações que, antes, eles conheciam apenas teoricamente. Segundo esse professor, em entrevista feita com ele depois de algumas aulas, os alunos ficaram muito empolgados com essa atividade realizada. Ele declarou que, pela sua avaliação, os alunos demonstraram entender melhor os procedimentos para resolverem equações dos tipos  $ax+b=c$  ( $a$ ,  $b$  e  $c$  conhecidos). Também declarou que os alunos pediram que houvesse mais aulas como a dessa experiência.

#### 4.5.4.2 Descrição da experiência na turma de 3<sup>a</sup> série

Nesta turma, foram constituídos quatro grupos, três grupos de três alunos cada e um grupo de quatro alunos.

Os alunos da turma de 3<sup>a</sup> série, também, não conheciam esse tipo de balança. Do mesmo modo que na turma de 6<sup>a</sup> série, o professor provocou os alunos à reflexão sobre diversas situações em uma gangorra (com pessoas de pesos iguais em cada uma das pontas do brinquedo e com pessoas de pesos bem diferentes nessas posições). Também nessa turma de 3<sup>a</sup> série, os alunos não tiveram dificuldade em descrever o que aconteceria.

Como na outra experiência, as balanças foram montadas muito rapidamente pelos alunos sem explicações de como fazê-lo. Durante cerca de cinco minutos, os alunos experimentaram colocar as diversas peças nos pratos das balanças, identificando as relações entre os valores escritos nos rótulos das peças e as situações de equilíbrio conseguidas.

Entendeu-se que não seria adequado se utilizarem todos os conjuntos de peças usados na experiência com a outra turma. Optou-se por não se utilizarem os conjuntos  $X$  e  $Y$ , uma vez que esses alunos ainda não haviam trabalhado com números menores do que um.

Como na outra experiência, os alunos não tiveram dificuldades em encontrarem os valores das peças identificadas pelas letras. Alguns alunos que encontravam a solução mais rapidamente que outros (do mesmo grupo) cobraram desses últimos que tentassem resolver o problema por si mesmos. Pareceu que essa cobrança foi feita com o objetivo positivo: de levar os colegas à compreensão do problema.

O grupo dos alunos Naiara, Crisele e Léo apresentou registros bastante esclarecedores dos passos que tomaram enquanto manuseavam o conjunto  $B_2$ :

“... nós botamos o ferrinho<sup>28</sup> e botamos o cinco no outro lado e não deu certo. Daí, nós botamos o 1 no ferrinho e deu certo”.

O grupo dos alunos Cristiano, Richie e Jean, para descrever o manuseio do conjunto  $H$ , escreveu:

“Quanto é o  $H$ ?  $V+III$ , que dá  $VIII$ . Nós pegamos oito e tiramos três. Dá cinco”.

---

<sup>28</sup> As peças utilizadas identificadas por letras eram de ferro em diversos formatos.

A partir da análise desses registros e do acompanhamento da experiência, pôde-se constatar que os alunos construíram a idéia de equação e mecanismos operacionais de como resolver esse tipo de problema. Um fato importante a ressaltar é que o fizeram divertindo-se em resolver os desafios propostos pela professora.

Em entrevistas feitas posteriormente à experiência, perguntados sobre o que eles aprenderam, os alunos fizeram declarações semelhantes aos da outra turma: que aprenderam a equilibrar pesos. De qualquer maneira, tanto as expressões simbólicas quanto as não simbólicas de matemática não faziam parte do objetivo da experiência, mas, sim, que os alunos percebessem que, a partir da percepção de relações entre valores conhecidos e incógnitas (ainda que não tenham sido apresentadas a eles com esse nome), pode-se calcular os valores dessas últimas. E isso aconteceu durante a experiência.

Pela declaração inicial da professora da turma da terceira série, tratava-se de um grupo de alunos com que era “... muito difícil de se trabalhar ... eles não querem participar de nada...” (Prof. Lívia), opinião compartilhada com a coordenadora pedagógica da escola. O que se pôde constatar, pela observação da atividade, é que esse comportamento dos alunos relatado pela professora mudava dependendo da atividade, pois toda a turma participou da experiência engajando-se com entusiasmo expressivo. Mesmo alguns que relutavam, de início, se envolver, depois de alguns minutos, participaram ativamente. Dois alunos desta turma, entrevistados depois da atividade, declararam que lhes chamou a atenção o fato de alguns colegas que, segundo eles, quase nunca participavam da aula e que ficavam causando problemas para a professora, nessa atividade, participaram ativamente.

Ainda segundo Lívia, durante as aulas seguintes, os alunos continuaram comentando sobre as atividades realizadas com as balanças durante uma semana inteira. Com isso, pode-se perceber que mudanças relativamente simples do ponto de vista metodológico podem levar os alunos a se envolverem mais nas atividades de sala de aula e a construírem seu conhecimento e suas habilidades de maneira agradável pra todos os envolvidos. Grande parte dos professores demonstra frustração quando percebem que seus alunos não estão aprendendo. Em casos como dessa experiência, a própria professora sentiu-se melhor, comentando com os organizadores das atividades que faria mudanças em seus procedimentos de sala de aula. Ela declarou estar interessada em modelos de estratégias didáticas para se trabalharem outros conteúdos de matemática.

## 4.6 Atividades para levar estudantes à construção da notação posicional dos números

Apresentam-se, aqui, descrições de experiências realizadas com turmas de alunos das séries 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> séries do Nível Fundamental de uma escola pública estadual da Cidade de Pelotas (RS). Essas experiências tinham, como objetivo, testar o modelo proposto na Seção 3.6, que pretende oferecer situações que levem os alunos à construção da representação posicional dos números e à construção dos fundamentos de um algoritmo para a operação de soma. Embora se espera que, nas séries 2<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup>, os alunos já tenham construído essa notação e um algoritmo para efetuar esse tipo de operação, pelo relato das professoras dessas turmas, alguns deles ainda tinham muita dificuldade em lidar com essa notação nos processos de cálculos com operações básicas entre números, mesmo na 6<sup>a</sup> série.

### 4.6.1 Descrição das turmas

Da turma da 1<sup>a</sup> série, participaram, das atividades experimentais, vinte e dois alunos na faixa etária dos sete aos nove anos. Esta turma era considerada por algumas professoras da escola como “muito indisciplinada”, com a qual era “difícil de se trabalhar”, opinião compartilhada com a coordenadora pedagógica da escola. Segundo a professora responsável, mais da metade da turma apresentava dificuldades no trato com as representações dos números e com a operação de soma de números com dois algarismos com números de apenas um algarismo.

Todos os vinte e oito alunos da turma de 2<sup>a</sup> série participaram da experiência. Esses alunos, na faixa dos oito aos dez anos de idade, apresentavam, segundo a professora, um “bom desempenho” em matemática. Segundo ela, apenas seis alunos mostravam dificuldades em lidar com a notação quando faziam exercícios de somas de números com dois dígitos.

Segundo a professora da turma de 6<sup>a</sup> série, seus alunos tinham um desempenho razoável em matemática. Apenas cinco deles tinham dificuldades na lida, em operações básicas, com a notação posicional. A turma era constituída de 25 alunos com idades variando de onze a treze anos.



#### 4.6.2 Material utilizado

O material utilizado na experiência com as turmas de 1ª e 2ª séries foi o mesmo da segunda variação do modelo descrito na Seção 3.6. A escolha dessa variação foi feita pelas professoras responsáveis. A turma de 1ª série já havia trabalhado com representações de números maiores do que vinte e com somas de números de um algarismo com números de dois algarismos. A professora desta turma entendeu que essa variação do modelo era a mais adequada. A turma de 2ª série já trabalhava há mais tempo com somas de números de dois dígitos. Isso, também, determinou a escolha da professora da turma fez.

O material utilizado nesta experiência com a turma de 6ª série foi o mesmo descrito na terceira variação do modelo da Seção 3.6. Foi utilizado um dado grande, construído usando-se uma caixa de papelão cúbica de, aproximadamente, 15cm de aresta envolta em papel. Em cada uma das faces desse dado, foram escritos os valores 46, 53, 57, 62, 71 e 77.

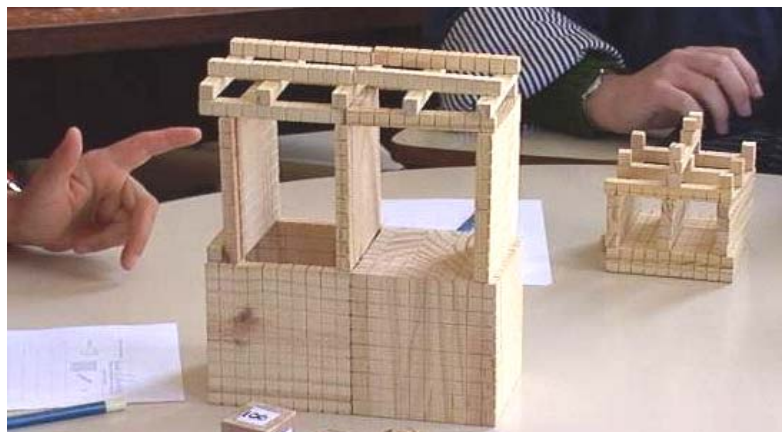
#### 4.6.3 Procedimentos

Os procedimentos nas experiências de aplicação deste modelo foram diferentes nas três turmas de alunos. Alguns dos procedimentos foram modificados durante a execução, com o objetivo de adaptar o que foi programado às exigências do momento.

Nas seções seguintes, apresentam-se as descrições das experiências em cada uma das três turmas de alunos em que foram feitas.

##### 4.6.3.1 Descrição da experiência na turma de 6ª série

Nesta experiência, como previsto no modelo, foram distribuídos conjuntos de peças do Material Dourado para que as crianças se familiarizassem com o mesmo. Nenhum dos alunos declarou ter tido algum contato com esse tipo de material. Eles brincaram durante dez minutos com o material, construindo representações de casinhas, bonecos, e outras figuras com as peças de madeira (Ilustração 64).



**Ilustração 64: Representações de estruturas feitas pelos alunos com o Material Dourado.**

Depois desse tempo, a professora chamou-lhes a atenção para que identificassem, com nomes comuns a todos, cada tipo de peça de que dispunham, a saber: cubinhos, barras, placas, cubo grande. Também a professora perguntou-lhes quais eram as relações entre os quatro tipos de peças. Para fazer isso, ela lhes mostrou cada uma das peças menores, perguntando quantas delas eram necessárias para se conseguir trocar por uma das maiores. Ela, inicialmente, provocou os alunos que considerava com mais dificuldades na aprendizagem de conteúdos matemáticos (segundo esclarecimentos dela própria em entrevista posterior à experiência), salientando que os colegas não deveriam interferir na resposta. Alguns tinham dificuldade, inicialmente, em identificar essas relações, ao que ela auxiliava indicando que colocassem as peças juntas e conferissem a quantidade de uma delas comparando com o tamanho da outra. Esse fato provocou uma mudança na orientação prévia das professoras responsáveis pelas outras duas turmas para a realização das experiências.

“Quantas dessas<sup>29</sup> eu preciso para trocar por uma dessas<sup>30</sup>? (Prof. Zilma)

Para esta experiência, dispunha-se de quatro caixas de Material Dourado, o que representa, apenas, quarenta placas (centenas) disponíveis. Assim, optou-se numa alteração nas regras do jogo de que se constitui o modelo: é considerado um ganhador o jogador que conseguir duas placas (representando, assim, que ele conseguiu duzentos pontos). Nesse jogo, portanto, não foram utilizados os cubos grandes (milhares).

---

<sup>29</sup> A professora chamava a atenção para um cubinho numa de suas mãos.

<sup>30</sup> A professora chamava a atenção para uma barra noutra mão.

Organizaram-se os alunos em cinco grupos de quatro alunos e um grupo de cinco alunos. Os alunos escolheram, por sorteio em cada um dos grupos, o aluno que seria o guardião das peças.

Durante o jogo os observadores perceberam que os alunos que ainda não entendiam as relações entre as peças eram ajudados pelos demais. Os próprios colegas daqueles alunos indicavam que eles deveriam colocar as peças uma ao lado da outra para verificarem a relação entre as mesmas.

Um dos alunos que elaborava as contas sem precisar manusear o material exclamou, logo depois do segundo sorteio que o jogo que estavam jogando “era de somar, não é?” (Tiago, 11 anos). Isso evidencia que esse aluno já tinha bem construído o conceito e o algoritmo de soma que lhe fora ensinado. Alguns dos alunos, todavia, ainda precisavam agrupar as peças e contá-las antes de perceberem que trocas eram possíveis, o que demonstrava que o manuseio abstrato da representação posicional ainda não estava bem construído no que diz respeito à operação de soma.

Na Ilustração 65, apresenta-se uma tabela utilizada por eles nesse jogo, onde são representados os resultados de três sorteios realizados pelo aluno Pedro.

Nome: <u>Pedro</u>					
Ordem do sorteio	Resultado total nos dados	Quantidade que eu tenho após cada sorteio			
		Cubão	Placas	Barras	Cubinhos
1°	53			5	3
2°	77		1	3	0
3°	40		1	7	0

**Ilustração 65:** Tabela com resultado parcial do primeiro jogo realizado pela turma de sexta série.

Observa-se que a representação posicional do acúmulo de peças pelo aluno aparece, naturalmente, quando da representação de cada quantidade nas respectivas colunas. A construção (ou o resgate, para alguns alunos) do conhecimento dessa notação e do processo de acumular (somar quantidades), agrupando por tipos de peças e trocando as mesmas a cada dezena de um mesmo tipo, fez-se durante essa atividade lúdica.

Depois desse primeiro jogo (em competição individual), a professora entendeu que seria mais produtivo envolver os alunos numa competição interequipes, que permitiria o uso

do cubo grande. Passou-se, assim, a usar o dado construído com caixa de papelão. A Ilustração 66 mostra o dado lançado ao chão.



**Ilustração 66: Dado grande lançado ao chão**

As equipes foram formadas pelos próprios grupos já estabelecidos anteriormente. A professora solicitou às equipes elas próprias determinassem o seu nome em comum acordo entre seus membros. Os nomes escolhidos foram *Antídoto*, *Sem Nome*, *Apocalipse*, *Bad Boys*, *Diabolóides* e *Pânico*.

A Ilustração 67 mostra resultados dos primeiros resultados da equipe *Apocalipse*.

Nome da equipe: <i>Apocalipse</i>					
Ordem do sorteio	Resultado total nos dados	Quantidade que a equipe tem após cada sorteio			
		Cubão	Placas	Cubinhos	
1°	46			4	6
2°	46			9	2
3°	71		1	6	3
4°	71		2	3	4
5°	46		2	8	0
6°	57		3	3	7

**Ilustração 67: Tabela apresentando resultados parciais da equipe *Apocalipse* no jogo**

Durante as jogadas, além dos alunos anotarem, cada um em sua própria tabela, a professora fazia as anotações no quadro-negro para que todos acompanhassem, juntos, a pontuação das equipes.

A cada sorteio, um representante da equipe jogava o dado e elaborava as trocas de peças possíveis. Os outros membros da equipe não podiam, por solicitação da professora, ajudar na percepção de quantas peças a equipe ganharia ou quantas peças precisava para trocar por uma de maior valor. Essa restrição levou os observadores a perceberem, com mais clareza, algumas limitações no conhecimento desse assunto por alguns alunos da turma, que demonstravam insegurança ao responderem a indagação da professora sobre quantas peças eles tinham ganhado em cada sorteio.

A Ilustração 68 apresenta a imagem do quadro-negro da sala com pontos alcançados pelas equipes. Os alunos tornaram-se mais ativos durante esse jogo do que durante o jogo de competição individual.

Equipe: Antídoto	Equipe: Som	Equipe: Apocalipse
C P B c	C P B c	C P B c
1 1 0	1 1 4	9 2

Equipe: Bad Boys	Equipe: Diabólicos	Equipe: Pânico
C P B c	C P B c	C P B c
1 1 9	1 2 3	6 2

**Ilustração 68: Resultados dos pontos das equipes no quadro-negro**

Essa experiência mostrou-se de grande valor para a professora, a qual declarou que “... isso deveria ter sido feito antes com eles ... alguns não estariam com dificuldades em matemática agora!”. Esta professora declarou, em entrevista realizada posteriormente à experiência, que já havia notado mudanças na aprendizagem dos alunos “...mais fracos ...” durante a própria experiência, salientando que “... ainda bem que essa atividade vai ser feita

com as turmas das séries iniciais, porque, daí, eles vão estar melhores quando chegarem na sexta série!” (Profª Zilma)<sup>31</sup>.

Assim, entende-se que essa experiência foi bem sucedida. Podem-se perceber algumas limitações nos procedimentos que exigem algumas restrições nos comportamentos dos alunos (na questão da ajuda dos colegas por exemplo) para que todos tenham chance de perceberem, por si mesmos, as relações que se mostram neste tipo de material concreto utilizado.

#### 4.6.3.2 Descrição da experiência na turma de 2ª série

Nessa turma, utilizaram-se os mesmos procedimentos com a turma de 6ª série, exceto pelo tempo de dispuseram os alunos para se familiarizarem com o material e pela execução do jogo de competição individual que aconteceu utilizando-se os dados de valores intermediários da segunda variação do modelo - 17, 19, 24, 26, 29 e 31. A professora optou por deixá-los manusear o material por, aproximadamente, trinta minutos.

A professora da turma, depois do manuseio livre do Material Dourado (sem os cubos grandes), perguntou aos alunos que ela considerava com mais dificuldades, quais as relações entre os três tipos de peças. Os alunos que não percebiam imediatamente a relação eram estimulados a colocarem as peças uma ao lado da outra, tentando *construírem* as peças maiores com as menores. Desse modo, a professora conseguiu que todos identificassem as relações.

A partir daí, organizaram-se os alunos em sete grupos de quatro alunos cada um e procedeu-se o jogo. A professora optou pela regra que dá vitória ao jogador que conseguir duas placas em menos de dez lançamentos de dado.

Na Ilustração 69, são apresentados os resultados obtidos pela aluna Renata (8 anos) durante o jogo.

---

<sup>31</sup> No dia em que foi realizada a experiência na 6ª série, ainda não havia sido realizada nas séries anteriores.

Nome: <i>Renata</i>			Quanto eu tenho depois do sorteio e da troca		
Ordem do sorteio	Resultado total no dado	Placas	Barras	Cubinhos	
1°	29		2	9	
2°	26		5	5	
3°	31		8	6	
4°	19	1	0	5	
5°	19	1	2	7	
6°	17	1	4	1	
7°	19	1	6	0	
8°	29	1	8	9	
9°	24	2	1	3	
10°					

**Ilustração 69: Tabela com pontos marcados durante o jogo.**

Os observadores da experiência entenderam que os alunos participaram com bastante entusiasmo, demonstrando bastante organização nos registros de pontos conseguidos no jogo. A professora acompanhou as atividades, particularmente dos alunos que ela considerava “mais fraquinhos” (Prof. Clara). Segundo as próprias declarações dela, feitas durante a experiência, esses alunos estavam construindo esse conhecimento.

“... dá pra ver que eles estão entendendo melhor esse conteúdo”. (Prof. Clara)

Como na experiência realizada com a 6ª série, depois do jogo de competição individual, a professora propôs aos alunos o jogo intequipes.

Foi-lhes, antes do início do jogo, apresentado o cubo grande, cujo valor eles conseguiram, rapidamente entender. Os alunos com mais dificuldades foram estimulados, pela orientação da professora, a colocarem as peças menores juntas formando a peça maior, percebendo, assim, a relação entre o cubo grande e as demais peças.

A professora deu a eles o dado grande feito com caixa de papelão (com valores 46, 53, 57, 62, 71 e 77 nas faces). Primeiro, a professora provocou-lhes com a pergunta de quais peças e em que quantidade a equipe ganharia com cada resultado no dado. Indicou-lhes que seria ganhadora a equipe que com menos lançamento de dados obtivesse o cubo grande. A Ilustração 70 mostra um aluno lançando o dado por sua equipe.





**Ilustração 70: Aluno lançando o dado ao chão**

A Ilustração 71 mostra o mesmo dado no chão, logo após seu lançamento.



**Ilustração 71: Dado lançado ao chão.**

Novamente, foi grande o entusiasmo dos alunos. Quando um aluno que a professora considerava “fraco” sorteava o dado, ela solicitava que os demais colegas não dissessem quais peças (e em que quantidade cada uma) a equipe ganhava com o resultado do sorteio. Todos esses alunos com maior dificuldade, realmente, demoravam mais de quinze segundos para responder, fazendo-o de forma incorreta às vezes, enquanto os demais alunos não passavam de cinco segundos para chegar a esses resultados. Era perceptível que eles precisavam elaborar mais seu pensamento para chegar à conclusão do que significava a notação do número sorteado. Foi interessante perceber que essa demora foi cada vez menor com o decorrer do jogo, demonstrando que eles estavam, realmente, aprendendo.

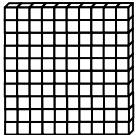
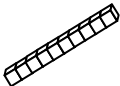



A professora dessa turma realizou um teste com seus alunos na aula subsequente à da experiência, embora não tenha recebido orientação nesse sentido, sobre operações de soma e subtração com números de três dígitos. Ela declarou, em entrevista posterior, que “dava pra se ver que os alunos mudaram com aquele jogo!” (Prof<sup>a</sup>. Clara). Segundo ela, os alunos gostaram muito do jogo e entenderam que estavam, também, aprendendo matemática com ele.

#### 4.6.3.3 Descrição da experiência na turma de 1<sup>a</sup> série

A professora da turma de 1<sup>a</sup> série deixou os alunos manuseando o material por quarenta minutos, durante os quais, eles brincaram representando diversos objetos montados com as peças do Material Dourado. Depois disso, ela chamou a atenção dos alunos, dizendo-lhes que eles participariam de um jogo com as peças com que estavam brincando.

Para o jogo, essa professora havia optado, em discussões anteriores com o elaborador do modelo, por um tipo de tabela diferente dos utilizados nas demais experiências. Ao invés de se utilizarem tabelas com várias linhas para se preencherem os resultados nos dados e as quantidades que cada aluno tinha de cada peça, a tabela utilizada somente tinha uma linha para representação do quanto o aluno dispunha de cada peça (Ilustração 72).

Nome:		
		

**Ilustração 72: Quadro utilizado para os alunos da 1ª série marcarem seus pontos no jogo.**

Nessa tabela, o aluno apagava o que havia escrito antes para escrever as quantidades de que dispunha de cada peça após o sorteio e a troca. A opção por este tipo de tabela foi por que a professora da turma entendia que os alunos teriam dificuldades em fazerem as diversas anotações que os outros tipos de tabela exigiam. A opção mostrou-se adequada, pois os alunos não mostraram dificuldades em anotar suas quantidades de peças. A Ilustração 73 mostra os

registros de pontos de um aluno da 1ª série no jogo de competição individual. Observa-se que há umas marcas de anotações anteriores feitas pelo aluno nesta tabela.



**Ilustração 73: Anotações de pontos do aluno Guilherme**

O jogo ficou limitado à vitória de quem conseguia duas placas num menor número de sorteios.

Os alunos que participaram do jogo mostraram estarem percebendo bem as relações entre as peças do material e sua relação com as atividades de soma que executavam antes em sala de aula. Segundo a professora, eles estavam demonstrando saber mais, durante o jogo do que durante suas aulas.

Todavia, como já posto, essa turma era considerada “difícil” pela professora. Quatro dos alunos recusaram-se, logo no início do jogo, a participar, permanecendo em brigas constantes uns com os outros. Às vezes, tentavam, inclusive, provocar colegas que participavam do jogo, sem conseguirem lhes tirar a atenção às atividades da turma. A professora colocou esses alunos de castigo num canto da sala.

Depois do primeiro jogo (de competição individual), houve um intervalo, durante o qual a professora, junto com os observadores da experiência, providenciou mudanças na maneira de conduzir o jogo. Primeiro, estabeleceu-se que o jogo seria entre equipes. Segundo, que as peças não seriam conseguidas através de sorteio, mas através do lançamento de três pequenas bolas desde uma distância fixa (aproximadamente, de três metros) num recipiente, como se este fosse uma cesta de basquete. A idéia era de dar maior dinâmica na sala de aula. Cada rodada, um representante da equipe lançava as bolas. Quando o aluno acertasse o primeiro lançamento, ganharia cinco barras; caso acertasse o segundo, ganharia uma barra e cinco cubinhos; caso acertasse o último lançamento, ganharia cinco cubinhos. Assim, se, por

exemplo, um aluno acertasse todos os lançamentos, sua equipe ganharia seis barras e dez cubinhos.

O aluno que fazia os lançamentos era o mesmo que tinha que decidir as trocas possíveis.

Essa mudança mostrou-se altamente positiva. Dos quatro alunos que, antes, não estavam participando, três passaram a participar ativamente, mostrando um entusiasmo maior do que o entusiasmo dos outros que, antes do intervalo, participavam do jogo. Percebeu-se que esses três alunos passaram, até, a ficarem atentos às possíveis trocas de peças, fazendo suas anotações de quanto suas equipes estavam ganhando. Um dos alunos continuou sem participar até o fim da experiência.

Em entrevista com a professora posteriormente, a mesma declarou que a experiência lhe mostrou possibilidades de trabalho com aquelas crianças. Segundo ela, não eram apenas quatro alunos que representavam problemas em sala de aula. Alguns outros também tinham “graves problemas de comportamento, vivendo de castigo”, mas, durante o jogo, se envolveram ativamente com sua aprendizagem (Prof<sup>a</sup>. Cláudia). Esta professora declarou que gostaria muito de ministrar suas aulas dessa maneira, mas que não tinha sido orientada suficientemente em seu curso preparatório para essa profissão (Magistério no Nível Médio) para poder fazer isso. Todavia, essa experiência mostrou que era possível, sim, trabalhar-se com essa turma. Além disso, a Prof<sup>a</sup>. Cláudia declarou, também, que percebeu um aumento significativo da capacidade dos alunos manusearem os números em cálculos que ela lhes propôs depois da experiência.

#### 4.6.3.4 Observações finais

Entende-se que essas experiências mostraram possibilidades de se levarem os alunos a construir a notação posicional decimal dos números e a perceberem novas alternativas de como se fazerem operações com os números. Uma vez que um aluno tenha entendido claramente o significado de cada posição na notação do número e o que o algarismo que ocupa essa posição significa em relação às demais posições da notação, acredita-se que ele terá maiores chances de entender, ou mesmo de produzir seus próprios, algoritmos para as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

Considere-se que a notação posicional tenha sido bem construída pelos alunos e resgate-se, nesta seção, o que foi trabalhado na experiência descrita na seção anterior com o uso de balanças de equilíbrio. Uma atividade possível de ser realizada é a de oferecer aos

alunos peças com valores de peso, por exemplo, metades da unidade. Os alunos não terão dificuldades em perceberem que duas dessas peças equilibram a unidade. A provocação que se pode fazer a eles é a de estabelecer a notação para identificar o valor de cada uma dessas peças. Observem que cada unidade numa determinada posição da notação posicional vale dez unidades da posição imediatamente à direita. Assim, o “1”, vale dez unidades da posição imediatamente à direita. Como cada peça vale a metade da unidade, seu valor pode ser representado como na Ilustração 74.

Dezenas	Unidades	?
	0	5

**Ilustração 74: Representação de número de valor metade da unidade**

Observa-se que não se tem uma unidade no valor da peça. Para os alunos, deve ficar claro que isso precisa ser identificado, o zero é necessário antes do cinco, pois, caso contrário, a peça que vale a metade pareceria valer cinco unidades. Deve-se sugerir aos alunos um símbolo para identificar que o cinco está ocupando uma posição depois da unidade (pois uma notação 05 poderia significar 0 dezenas e 5 unidades). Mesmo na primeira série do Nível Fundamental de Ensino, os alunos já viram em muitos lugares esse tipo de representação – cinquenta centavos (0,50), valendo metade da unidade da moeda nacional. Ou seja, essa estratégia com a balança de equilíbrio e peças valendo metade de uma que se identifica como unitária associa-se a outro caminho didático que carrega, junto, claros significados para os alunos, o de se trabalhar com o próprio dinheiro (ou cópias dele) em sala de aula, usando a notação posicional, pois preços são representados repetidamente nessa notação à volta das crianças.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

### 5.1 Conclusões

A partir de pesquisa feita a respeito de questões gerais e específicas de ensino e aprendizagem na literatura existente sobre o assunto, apresentaram-se itens julgados imprescindíveis a qualquer educador, particularmente, o que lida com o ensino da matemática. Entende-se que o Capítulo 2 desta tese apresenta suficientes embasamentos teóricos para levar o educador à reflexão sobre suas concepções de ensino e aprendizagem e sobre sua prática profissional. Junto com as alternativas oferecidas pelos modelos propostos neste trabalho, esses embasamentos teóricos provocam o professor que com eles se envolve à observação mais cuidadosa da realidade a sua volta, ao aprofundamento de seus estudos e à busca de caminhos alternativos ao seu trabalho nas escolas.

As descrições dos modelos propostos, apresentadas no Capítulo 3, mostraram as diversas possibilidades de como se pode trabalhar nas escolas de modo a levar os alunos a se envolverem mais intensamente com o processo de aprendizagem e a construírem, eles próprios, seu conhecimento matemático. Esses modelos mostram, claramente, como se podem levar estudantes a construírem conceitos e representações relativos às equações matemáticas, à notação decimal de números, às funções polinomiais de primeiro grau, a tangentes de ângulos e ao sistema referencial cartesiano.

As observações das experiências realizadas nas escolas de Nível Básico e as entrevistas com professores e alunos levaram à conclusão de que os modelos testados são eficazes ao que se propõem. Em todos os casos observados, pode-se constatar que os alunos envolvidos estavam, como previsto pelo modelo, construindo os conhecimentos matemáticos com que lidavam.

As entrevistas anteriores às experiências com professores mostravam professores preocupados com suas turmas de alunos, mas sentindo-se impotentes na busca de solução para os problemas de sala de aula. Durante essas experiências, alguns desses professores apresentaram, inclusive, sugestões de mudanças, adaptações dos modelos às turmas com que trabalhavam. Esses mesmos professores mostraram-se, posteriormente às experiências, mais reflexivos e tentados à mudança de suas práticas.

Entende-se, assim, que esse trabalho alcançou seus objetivos, representando contribuição significativa para outros educadores preocupados em dar o melhor de si em sua imprescindível tarefa de educar nossas crianças e jovens.

## **5.2 Recomendações para futuros trabalhos**

A partir deste trabalho, percebe-se uma ampliação no horizonte da educação matemática, particularmente no que diz respeito a métodos para o ensino de conteúdos dessa área.

Pela participação como aluno das disciplinas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFSC e pela participação na execução das atividades que levaram à produção deste texto, seu autor envolveu-se, também, em preocupações relativas a ofertas de cursos de formação de professores a distância. Suas reflexões sobre esse assunto levaram-no ao estudo da possibilidade de resgatar a essência das estratégias que já tinha concebido para ensino de alguns conteúdos de matemática. Uma vez que essas estratégias se baseiam, entre outras coisas, no princípio de se levarem os alunos à autonomia na aprendizagem, as mesmas estratégias, ou outras análogas a elas, poderiam ser utilizadas no ensino a distância.

Além disso, o autor apresentou parte dessas experiências num encontro de professores<sup>32</sup>, através da apresentação de um filme demonstrativo das atividades realizadas e de um breve relato de duas professoras da escola envolvidas no trabalho. Dessa apresentação resultaram muitos contatos com professores, espectadores daquela apresentação, interessados em cursos especiais de orientação mais detalhada sobre como se executarem aqueles modelos experimentados em suas salas de aula e sobre outros possíveis modelos de aulas de matemática disponíveis. Esses fatos levaram o autor deste trabalho e colegas professores da Universidade Federal de Pelotas a discutirem a possibilidade de serem utilizadas partes dos registros em filme, realizados durante as execuções das experiências, como materiais para orientação de professores em cursos a distância.

Também, durante o período de setembro a dezembro de 2003, esse mesmo grupo de professores universitários desenvolveu o projeto intitulado Estratégias para Construção de

---

<sup>32</sup> 4º Poder Escolar e 5º Seminário interinstitucional de educação, realizado na Cidade de Pelotas - RS.

Conhecimento Físico e Matemático (ECCoFM), o qual se constituiu de trabalhos de orientações de professores de Física e Matemática de escolas públicas da cidade de Pelotas e execuções de experiências didáticas nas escolas onde esses professores lecionavam. Essas orientações se concentraram em estratégias de ensino que, de forma interdisciplinar, envolvessem essas duas áreas em seus objetivos de aprendizagem. Embora se tenham encontrado algumas limitações, a maioria em função da grande limitação para o tempo de execução do projeto (que recebeu apoio da CAPES e da FAPERGS<sup>33</sup>), muitas das idéias desenvolvidas durante a execução do ECCoFM apresentam possibilidades de melhorias em termos de aprofundamento teórico e prático, podendo, sem grandes alterações, serem utilizadas em aulas dessas duas áreas de conhecimento no Nível Básico de Ensino. Algumas das experiências realizadas indicaram a possibilidade de utilização em aulas do Nível Fundamental de Ensino, embora tenham sido concebidas para serem utilizadas no Nível Médio.

Entende-se que esses três últimos parágrafos indicam possibilidades de desenvolvimento de futuros trabalhos úteis para o ensino de matemática. Resta, portanto, a continuação dos esforços para a produção de novos conhecimentos metodológicos na direção de melhoria do Ensino Básico.

---

<sup>33</sup> Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul.

## 6 BIBLIOGRAFIA

- ARAÚJO, Carlos Henrique & NILDO, Luzio. Dificuldades no ensino da matemática. [http://www.inep.gov.br/imprensa/artigos/dificuldades\\_ensino\\_matematica.htm](http://www.inep.gov.br/imprensa/artigos/dificuldades_ensino_matematica.htm). Acesso em 10 de junho de 2004 às 20h35min.
- BARALDI, Ivete Maria. Matemática na escola: que ciência é esta? Bauru: EDUSC, 1999.
- BATSCHLET, E.. Introdução à matemática para biocientistas. São Paulo: EDUSP, 1978.
- BOGDAN, Roberto C. & BIKLEN, Sari Knopp. Fundamentos da investigação qualitativa em educação: uma introdução. Porto: Porto Editora, Lda, 1994
- BONAMINO, Alicia & FRANCO, Creso. Avaliação e política educacional: O processo de institucionalização do SAEB. Cadernos de Pesuisa, n.108, p.101-132, novembro, 1999.
- BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- CARRETERO, Mario. Construtivismo e Educação. Porto Alegre: Artmed Editora S.A., 2002.
- CLOTILDE, Vera. Funções elementares: 100 situações-problema de matemática. Porto Alegre: Ed. da Universidade/UFRGS, 1993.
- CRAWFORD, Michael & WHITE, Mary. Strategies for mathematics: Teaching in context. Educational Leadership; vol.57, no.3, p.34-38: Alexandria; 1999.
- DEJOURS, C. Travail: usure mentale. De la psychopathologie à la psychodynamique du travail. Paris: Bayard Éditions, 1993.
- DEMO, Pedro. Desafios modernos da educação. Petrópolis, RJ: Ed. Vozes Ltda, 1993.
- DEMO, Pedro. Educação e conhecimento. – Petrópolis, RJ: Ed. Vozes, 2000.
- DESCARTES, René. Rules for the direction of the mind. In: Britannica Great Books of the Western World. London, 1955.
- DIENES, Z. P. & GOLDING, E. W.. Lógica e Jogos Lógicos. São Paulo: EPU; Brasília: INI, 1974.
- DIENES, Z. P. & GOLDING, E. W.. Exploração do Espaço. São Paulo: Editora Herder, 1969.
- DOMINGUES, Hygino H.. Aplicações da Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997.
- FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia - Saberes necessários à prática educativa. São Paulo, Brasil: Paz e Terra, 1997.
- FREIRE, Paulo & FAUNDEZ, Antonio. Por uma pedagogia da pergunta. Rio de Janeiro: Ed. Paz e Terra S.A., 1985.
- FREIRE, Paulo & SHOR, Ira. Medo e ousadia - o cotidiano do professor. Rio de Janeiro: Ed. Paz e Terra S.A., 1986.
- GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI Jr, J. R..Matemática fundamental, 2o grau: volume único. São Paulo: FTD, 1994.
- GOODSON, Ivor. Currículo: teoria e história. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.



- HALLIDAY, David & RESNICK, Robert. Física I. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1976.
- HUETINCK, Linda & MUNSHIN, Sara N.. Teaching Mathematics for the 21st Century. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- HUIZINGA, Johan. Homo ludens – O jogo como elemento da cultura. São Paulo: Ed. Perspectiva S.A., 2004.
- INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. Net, Brasília(DF). Seção Censo. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/censo/default.htm>. Acesso em: 27 de julho de 2001 às 19h30min.
- INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. Net, Brasília(DF). Seção Censo. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/enem/default.htm>. Acesso em: 27 de julho de 2001 às 20h.
- JANTSH, Ari Paulo & BAINCHETTI, Lucídio (Org.). Interdisciplinaridade: para além da filosofia do sujeito. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.
- MACHADO, Nilson José. Matemática e realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. São Paulo: Cortez Editora, 1991.
- MACHADO, Nilson José. Matemática e Educação: alegorias, tecnologias e temas afins. São Paulo: Cortez Editora, 2001.
- MACHADO, Nilson José. Epistemologia e Didática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez Editora, 2002.
- MOISE, Edwin E. & DOWNS Jr., Floyd L.. Geometria moderna. Vol. 1 e 2, São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda., 1971.
- MOREIRA, Marco Antonio & SILVEIRA, Fernando Lang da. Instrumento de pesquisa em ensino e aprendizagem. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1993.
- MOREIRA, Marco Antonio. Aprendizagem significativa. Brasília: Ed. UnB, 1999.
- MORETTO, Vasco Pedro. Construtivismo: a produção do conhecimento em aula. Rio de Janeiro: DP&A, 1999.
- PEREIRA, Tânia Michel (Org.); DREWS, Sônia Beatriz Teles; JAGMIN, Ângela Susana; BORGES, Pedro Augusto. Matemática nas séries iniciais. Ijuí: Editora UNIJUÍ, 1989.
- PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998.
- PERRENOUD, Philippe. Construir as competências desde a escola. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
- PERRENOUD, Philippe. Dez novas competências para ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.
- PIAGET, Jean. A Epistemologia genética. Série "Os Pensadores". São Paulo: Ed. Abril Cultural, 1983.
- PIAGET, Jean. Problemas de psicologia genética. Série "Os Pensadores". São Paulo: Ed. Abril Cultural., 1983.
- PIAGET, Jean & GRÉCO, Pierre. Aprendizagem e Conhecimento. Rio de Janeiro: Livraria Freitas Bastos S.A., 1974.

- POSAMENTIER, Alfred S. & STEPELMAN, Jay. Teaching Secondary Mathematics: techniques and enrichment units. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1999.
- ROLAND, Leon; WRIGHT, Ed; PIERCE, Don. Mathematics for Life: a foundation course for quantitative literacy. New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- SAINT-ONGE, Michel. O ensino na escola. São Paulo: Edições Loyola, 1999.
- SCHANK, Roger C. & CLEARY, Chip. Engines for Education. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1995.
- SCHÖN, D. Le praticien réflexif. Montreal: Éditions Logiques, 1994.
- SCHÖN, D. “À la recherche d’une nouvelle épistémologie de la pratique et de ce qu’elle implique pour l’éducation des adultes”, in BARBIER, J. M. (org.), Savoirs Théoriques et savoirs d’action. Paris: PUF, p. 201-222, 1996.
- SINGER, Naomi E.; MILLER, Matthew J.. Atividades educacionais I. São Paulo: Madras Editora Ltda, 2002.
- WHITEHEAD, Alfred North. The aims of education. New York: The New American Library of World Literature, Inc., 1951.