Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
Rita de Cássia Idem
(Orgs.)

Experiências Estéticas em Educação Matemática

Este livro envolve alguns desafios conceituais interessantes. Primeiro, deve-se reconhecer a variedade de concepções sobre estética construídas na história da filosofia. Assim, dedicamos as seções seguintes a apresentar um panorama dessas concepções. Ainda discutimos algumas relações históricas entre estética e Matemática, apresentamos nossas concepções sobre experiência estéticas e experiência matemática estética. E, por fim, apresentamos as temáticas discutidas em cada capítulo. Nesse sentido, acreditamos que este livro contribui à Educação Matemática com novas questões teóricas e práticas acerca da temática "experiências estética", fomentando aspectos de inovação à pesquisa, à ação filosófica-pedagógica, aos processos formativos e ao ensino e aprendizagem de Matemática. De maneira geral, o livro mostra que a interface do uso de tecnologias digitais e das artes pode constituir cenários que fomentam a realização de experiências matemáticas estéticas. Contudo, cenários educacionais de naturezas diversas podem também constituir potencialidades estéticas.

Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos
Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

unesp

CAPES

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Educação Matemática

9 786559 172740

editora fi .org

Experiências Estéticas em Educação Matemática

Experiências Estéticas em Educação Matemática

Organizadores
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
Rita de Cássia Idem

Diagramação: Marcelo A. S. Alves
Capa: Carole Kümmecke - https://www.conceptualeditora.com/

O padrão ortográfico e o sistema de citações e referências bibliográficas são prerrogativas de cada autor. Da mesma forma, o conteúdo de cada capítulo é de inteira e exclusiva responsabilidade de seu respectivo autor.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; IDEM, Rita de Cássia (Orgs.)

Experiências Estéticas em Educação Matemática [recurso eletrônico] / Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva; Rita de Cássia Idem (Orgs.) -- Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2021.

303 p.

ISBN - 978-65-5917-274-0
DOI - 10.22350/9786559172740

Disponível em: http://www.editorafi.org

1. Estética; 2. Matemática; 3. Ensino; 4. Estado; 5. Brasil; I. Título.

CDD: 370

Índices para catálogo sistemático:
1. Educação 370

Agradecemos ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos (Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquista Filho" – UNESP, Interunidades), ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (UNESP, Rio Claro), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Sumário

Prefácio

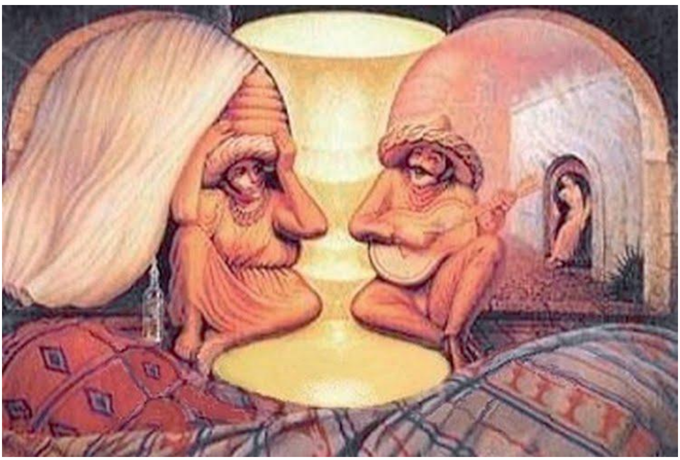
Experiências Estéticas em Educação Matemática: que "belo" livro!!!

Maurício Rosa

Ao receber o convite de prefaciar este livro, fiquei muito feliz, pois é um tema que há anos venho investigando em minhas pesquisas e que busco promover em minha sala de aula. Também, o convite feito por seus organizadores, na figura do Prof. Ricardo Scucuglia, é um presente, porque me permitiu dialogar com essa obra, com seus autores e, entre eles, mais uma vez, com esse amigo, colega de doutorado e ex-companheiro de banda (excelente baixista), o qual hoje me honra com esse convite. Assim, para falar dessa obra e introduzi-la à/ao/ae leitora/leitor/leitore, me impulsionei a tentar ofertar mais uma experiência estética a este/esta/estu e, não obstante, traduzir a experiência vivenciada por mim ao lê-la.

Em Rosa, Farsani e Silva (2020, p. 5) a seguinte imagem é evidenciada:

Figura 1 – Old Couple or Musician, Salvador Dalí (1930).



Trata-se de uma obra de Salvador Dalí que nos remete a uma ilusão de ótica. Rosa, Farsani e Silva (2020) revelam que os olhos experimentam, vivenciam a imagem mostrada e nessa experiência é possível identificar o quanto cada pessoa prende-se no mundo dos objetos, tentando definir exatamente o que está vendo. Definir é uma ação matemática e esta, parte, no caso da visualização dessa imagem, do empenho de se buscar alternativas para determinar o que, talvez, se apresente como um espetáculo, confuso no exato momento em que a imagem é vivenciada. A confusão se dá, em um primeiro ensejo, porque são dois rapazes que estão sendo observados por uma jovem (ao fundo) enquanto um deles, o que possui bigode, toca uma serenata. Mas, por outro lado, talvez o ensejo apresente um casal de idosos sorrindo um para o outro. Além disso, não existe uma taça de ouro bem ao centro da figura? Esses movimentos perceptivos transformam nossa mirada, transformam aquilo que em um primeiro momento havíamos vislumbrado. Deixamos de notar, então, o menino da serenata, seu amigo e a jovem, porque a imagem se transformou, sendo parcial ou totalmente substituída por uma atual. Essa mobilidade permite que o conhecimento escape com qualidades determinadas, puras e absolutas que os empiristas admitiam (MERLEAU-PONTY, 2006), pois não é possível chegar a uma única verdade precisa e acabada.

Há, então, em qualquer experiência estética um fluxo inesgotável de perspectivas que podem ser vivenciadas, pois, a cada momento, a totalidade do campo perceptual, que se constitui intencionalmente, se abre a novas experiências possíveis, sem cessar. Há um corpo vivente que se mobiliza, se lança à percepção. A imagem percebida anuncia mais do que uma qualidade isolável e imediatamente vivenciada com os órgãos dos sentidos, ela anuncia "[...] um todo, é a forma como percebemos um objeto que é sempre afetado por sua relação com outros [objetos]" (MATHEWS, 2010, p. 40). Esse fato significa que as experiências no mundo são um todo (um fundo ilimitado) em que o percebido se destaca e ao se destacar desse fundo, na plasticidade dos movimentos, situa o que Merleau-Ponty (1990) denomina como "figura-e-fundo" ou "figura em um fundo".

Com esse exemplo, meu desejo é situar a relação da experiência estética com a matemática, mesmo que tal experiência não esteja vinculada diretamente ao que se considera como um "objeto matemático", ou seja, objeto proveniente da geometria, ou uma fórmula (a do Teorema de Pitágoras, por exemplo), ou suas demonstrações, ou números, ou operações...Enfim, busco colocar em suspeição, conceitos, movimentos, crenças, atitudes, pois é assim que posso contribuir para o diálogo/discussão científica, com essa obra, com seus autores e leitores, por meio de tudo aquilo que a leitura dela me trouxe, me fez experienciar e perceber.

Em Rosa e Pazuch (2014), a experiência é assumida como a complexidade do que é empiricamente sentido na dimensão da fenomenalidade corporal e que se doa à percepção como ponto de partida do conhecimento. Também, como ponto de partida da vivência que expressa a vida e que permite, pela sua objetivação, que ela seja interpretada. Essa interpretação sempre está no limite daquilo que é indecifrável, daquilo que é indizível, incomparável e imensurável. A experiência, então, torna-se expressão que se deixa descrever, sempre com palavras que trazem consigo a historicidade do mundanamente vivido, ao mesmo tempo que trazem a incompletude na impossibilidade de abarcar-se no dito daquilo que se quer dizer. A experiência evidencia aquilo que se doa à percepção, ou seja, as configurações do mundo mostram-se harmonicamente imersas no panorama em que são destacadas por aquele/aquela/aquelu que percebe, já que trata da compreensão do que é vivido, da produção cognitiva que pode acontecer ao se pensar sobre/com aquilo que é vivenciado no contexto estabelecido.

Nessa perspectiva, a experiência destacada em Rosa e Pazuch (2014) e que novamente é enlaçada em Rosa (2015) e Rosa (2017a) se mostrava por meio do que era entendido como estética, pois, conforme o dicionário de filosofia Abbagnano (2007, p. 367), "Com esse termo [estética] designa-se a ciência (filosófica) da arte e do belo". Por conseguinte,

> [...] esse substantivo designa qualquer análise, investigação ou especulação que tenha por objeto a arte e o belo, independentemente de doutrinas ou escolas. [...] Dissemos "arte e belo" porque as investigações em torno desses dois objetos coincidem ou, pelo menos, estão estreitamente mescladas na filosofia moderna e contemporânea. (ABBAGNANO, 2007, p. 367).

Logo, a experiência estética no contexto apresentado assumia a vivência da arte e do belo, ou seja, de certa forma também era entendida como a própria experiência vivida que se doa à percepção daquele/daquela/daquelu que a vive, permitindo em um ato reflexivo que cada um/uma/ume dê-se conta das marcas do havido na totalidade de sua historicidade que, consequentemente, carrega consigo as marcas dos outros/outras/outres e da vida, tornando possível a interpretação de si e do mundo histórico-cultural-social-político. Nesse sentido, expressar a experiência vivida ao ler esse livro no subtítulo desse prefácio, "que 'belo' livro", é tanto uma maneira de resgatar concepções produzidas como avançar na crítica, inserindo-se nela. A ideia de estética vinculada ao belo e à arte, deve ser questionada, além disso, precisa ser ampliada.

Eagleton (1993, p. 17) revela:

> A Estética nasceu como um discurso sobre o corpo. Em sua formulação original, pelo filósofo alemão Alexander Baumgarten, o termo não se refere primeiramente à arte, mas, como o grego *atsthesis,* a toda a região da percepção e sensação humanas, em contraste com o domínio mais rarefeito do pensamento conceitual. A distinção que o termo "estética" perfaz inicialmente,

> em meados do século XVIII, não é aquela entre "arte" e "vida", mas entre o material e o imaterial: entre coisas e pensamentos, sensações e ideias; entre o que está ligado a nossa vida como seres criados opondo-se ao que leva uma espécie de existência sombria nos recessos da mente.

Assim, em seu livro "A Ideologia da Estética", Terry Eagleton apresenta o tratamento da estética por parte de vários filósofos, entre eles, Hume, Burke, Kant, Hegel, Schopenhauer, Kierkegaard, Marx, Nietzsche, Heidegger, Adorno... e assume a perspectiva de ideologia como um instrumento que consente a sustentação do poder. Nesse viés, a estética perfaz, como dito também neste livro que prefacio, um amplo espectro de entendimentos.

Atualmente, entendo que a experiência estética refere-se ao "[...] movimento de nossos afetos e aversões, de como o mundo atinge o corpo em suas superfícies sensoriais" (EAGLETON, 1993, p. 17) e este mundo, para mim, é aquele compreendido como mundo-vida, ou seja, "[...] o solo de todas as vivências e horizonte aberto às ocorrências naturais e histórico-sociais e não como um lugar, espaço-temporal em que são depositadas coisas" (BICUDO; ROSA, 2013, p. 62, nota de rodapé). Isto é, em termos de afetos, a complexidade do que é empiricamente sentido com o mundo-vida, na dimensão da fenomenalidade corporal e que se doa à percepção como ponto de partida do conhecimento, possibilita na educação matemática que se atribua sentido ao percebido, que se reflita e se avance, que se eduque matematicamente, mas, principalmente, pela matemática (ROSA, 2018). Esse processo de afeto, experiência estética em educação matemática, pode ser compreendido se pensarmos analogamente naquilo que se sente quando assistimos uma peça teatral, ou um filme, ou lemos uma obra, as quais consideramos como "muito boa", "ótima", "excelente". Há um fluxo que nos perpassa, o qual nos conecta à ação, à cena, à imaginação da situação. Nesse caso, quando as Tecnologias Digitais estão envolvidas (por exemplo, o caso do filme ou mesmo diferentes formas de assistir a peça teatral ou "ler" a obra), há uma ação de plugar-se (ROSA, 2015, 2017b, 2018) que envolve as conexões matemáticas possíveis (ROSA; CALDEIRA, 2018) e, desse modo, o ato de imaginar, pois, conforme Arendt (2021, p. 105) é "[...] a imaginação [...] que prepara os objetos de nosso pensamento". Há, então, a subjetividade do lançar-se, do plugar-se, há a intencionalidade do corpo-próprio em relação à situação.

Também, em termos de aversão, há que se compreender o porquê, assim como, aquilo que se torna benesse por meio dessa aversão. Se faz necessário que se promova aversão ao que não é humanitário. Há de se compreender a aversão quando a situação discrimina, exclui, subordina. Nesse caso, talvez haja a defesa da eliminação de categorias, de estigmas, de rótulos. No entanto, não é possível ser inocente e entender que hoje, em termos de conjuntos, cabe compreendermos a importância da definição como ato de resistência, isto é, define-se o grupo, por vezes, levanta-se bandeiras, do mesmo modo como se define um domínio de uma função, no sentido de dar condição de existência desta. Assim, é importante que se dê condição de existência a todos/todas/todes de modo democrático, isto é, de modo a promover diferentes possibilidades de experiências estéticas em educação matemática respeitando as subjetividades, a cultura e história de cada um/uma/ume.

O ato de tratar da estética em pesquisas passadas de acordo com o tratado no dicionário de filosofia Abbagnano (2007), ou seja, análise ou investigação da arte e do belo, fez-me perfazer a "beleza" gerada pelos recursos digitais sem questionar essa beleza, a própria beleza dita como beleza, a própria arte dita como arte, sem ao menos discutir como ela é considerada e sob quais fundamentos é definida, ou quais relações de poder a constituíam. Mesmo deixando claro que a experiência estética com Tecnologias Digitais não era compreendida propriamente, ou exclusivamente, como o movimento, a cor, a imagem, eu não assumi a reflexão do que seria "belo" em relação a esses aspectos. A experiência estética era considerada um tipo de vivência que não focava exclusivamente, mas que também não deixava de focar o próprio movimento, a cor, a imagem e todas as relações e/ou links que se fizessem com esses aspectos, para que se constituísse o conhecimento e, em específico, conhecimento matemático (ROSA, 2015). Ou seja, a experiência estética concebida nesses estudos **não se eximia** de tratar dessa "arte", ou da "beleza" da cor, da imagem, do movimento, mas, tratava-a sem os questionamentos sobre: quem define o que é belo? Por meio do que se faz essa definição?

Eagleton (1993, p. 12) já revelava que "A estética é, certamente, como pretendo mostrar, um conceito burguês, no sentido histórico mais literal, criado e nutrido pelo Iluminismo", pois, "[...] certos conceitos teóricos são realmente utilizados por razões políticas, e às vezes de maneira bem crua" (EAGLETON, 1993, p. 9). Nesse caso, o fato de a estética rumar à arte e ser dita intrínseca a este conceito, assim como, ao "belo", o qual na Grécia antiga já era considerado por Platão como manifestação do bem e por Aristóteles como simetria, não obstante, no século XIX, por Hegel, como manifestação do verdadeiro, chegando a ser entendido como perfeição sensível (Baumgarten, Hume e Kant) e perfeição expressiva (Benedetto Croce), fazem com que a estética ganhe juízo de valor.

No entanto, a quem compete esse juízo? Seria à classe dominante? Seria a corpos masculinos, brancos e europeus? A quem compete dizer que o "belo" é sinônimo do bem e, consequentemente, o feio sinônimo do mal, competiria definir o que é bem e mal? Afirmar que o padrão de beleza é aquele que é simétrico, possivelmente, não incluindo diferentes tipos de rostos, narizes, lábios e corpos que não se enquadram nesse padrão estético, cabe a quem? Será que caberia justamente aos corpos que não importam (BUTLER, 2020)? Definir (ação matemática) qual é a perfeição sensível e mesmo a perfeição expressiva cabe a quem? Por base em qual critério essa definição é precisa? Há que tipo de compreensão sobre o que é perfeição? Do mesmo modo, o que garante essa perfeição? Sob quais valores? (SOUZA; ROSA, 2021). Seria a harmonia das formas? Ou a harmonia das cores? Mas, o que é harmônico para mim é o mesmo que harmônico para você? Mais que isso, o harmônico na Europa em termos de formas e cores é o mesmo que na África? O que é dito "belo" hoje é o mesmo que era há três séculos, por exemplo?

As ações cernes deste livro são: dialogar sobre, discutir, debater e apresentar experiências estéticas na educação matemática e, desse modo, diversas são as perspectivas apresentadas. Cabe, então, a cada leitor/leitora/leitore estar atento/atenta/atente para cada uma dessas ações e para sua postura crítica frente a elas, frente ao fato de a estética servir como julgamento, como definição perene do que é dito como "belo" e do que é excluído como "não belo", do que é assumido como matematicamente importante e do que não o é. De forma correlata, do que é assumido como Matemática (disciplinar, única, verdadeira) e do que se entende por matemática (com letra minúscula – Rosa e Bicudo (2019) – e que não deveria ser encarada como relação de poder e aspecto/critério/característica de valor na identidade do/da/du estudante). De forma geral, cada vez mais cabe realizarmos ações educacionais que estimulem experiências estéticas na educação matemática, de forma que haja movimentos afetuosos e, também, aversões ao modo como a matemática atinge nossos corpos em suas superfícies sensoriais. Entretanto, esses movimentos não podem estar desvinculados do respeito às subjetividades, com intuito de se desenvolver relações dialógicas em prol de uma atitude democrática. Isto é, concomitantemente, precisamos exercer nosso papel crítico, exercer a Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2001).

Não obstante, a Educação Matemática Crítica assume uma matemática que não é neutra, que não se abstém dos processos sociais e políticos, os quais são evidenciados na historicidade dos sujeitos viventes. Do mesmo modo, a estética não é neutra e não pode ser naturalizada, isto é, não pode, em termos críticos, ser assumida como um padrão (inclusive matemático) que escolhe as pessoas, que as define como "boas" ou "más", "belas" ou "feias", "competentes" ou "incompetentes", "aptas" ou "inaptas", "perfeitas" ou "imperfeitas", entre outras acepções indicadas por padrões binários que podem figurar em um algoritmo de Inteligência Artificial, por exemplo. A naturalização do binário passa, então, a ser ferramenta de poder para quem se enquadra no conjunto do "belo", "apto", "competente", "perfeito" e passa a ser frustração, ou uma busca constante em atingir esse padrão estético pré-determinado e concebido como idealizado, por aqueles/aquelas/aquelus que não se enquadram nesse padrão (ROSA, 2021).. Há uma identidade estética pré-concebida como a correta, a qual presume uma padronização estética que é chamado de beleza. Conforme Adorno (1970, p. 15), "A identidade estética deve defender o não-idêntico que a compulsão à identidade oprime na realidade". Ou seja, o diferente, o estranho, o *queer* (BUTLER, 2020) também é "bonito", "belo", se a concepção de "bonito" e "belo", por exemplo, não tiver condicionada a uma disposição estética cujas características sejam eurocêntricas, brancas e cis heteronormativas. Afirmo isso, pois a disposição estética é:

> [...] a expressão distintiva de uma posição privilegiada no espaço social, cujo valor distintivo determina-se objetivamente na relação com expressões engendradas a partir de condições diferentes. Como toda a espécie de gosto, ela une e separa, sendo o produto dos condicionamentos associados a uma classe particular de condições de existência, ela une todos aqueles que são o produto de condições semelhantes, mas distinguindo-os de todos os outros e a partir daquilo que tem de mais essencial, já que o gosto e o princípio de tudo o que se tem, pessoas e coisas, e de tudo o que se é para os outros, daquilo que serve de base para se classificar a si mesmo e pelo qual se é classificado (BOURDIEU, 2007, p. 56).

No caso, hoje e historicamente, se classificam as pessoas, as coisas, os atos, os fatos, por meio de uma matriz compulsória branca, eurocêntrica e cis heteronormativa. Dessa forma, a experiência estética pode ser entendida por meio do conjunto de ações proeminentes da articulação das práticas educativas em educação matemática, como mencionado em Rosa e Pazuch (2014), sob a elaboração e resolução de problemas matemáticos com a própria Cibercultura e/ou com Tecnologias Digitais, por exemplo. No entanto, não podemos mais deixar de pensar sobre a própria estética como expressão de poder. A matemática como estética, ou a estética da matemática, tem que ser questionada em termos de seu uso como recurso para dizer quem é “bom em matemática” ou não, quem tem “dom” e quem não, quem pode estudar matemática, quem não. Esses enquadramentos identitários precisam ser criticados, precisam ser refletidos. A quem esses “enquadramentos”, “rótulos”, “padrões” interessam? Com que objetivo? Sob qual ótica?

Essas perguntas são exemplos de distintas questões que esse livro nos provoca a pensar. Nesse sentido, como professores/professoras/professories e pesquisadores/pesquisadoras/pesquisadories, pensar em nosso posicionamento crítico com a leitura de capítulos que tratam de filosofia, de matemática e também de Matemática (com letra maiúscula), de diagramas, de gênero e sexualidade, de memorização, de música, de dobradura, de propaganda, de festival de vídeos, de tecnologia, de pensamento computacional, de imagem pública pode acentuar em cada um/uma/ume movimentos de afetos ou de aversões que tocarão o corpo de cada um/uma/ume em suas superfícies sensoriais e que, assim, podem mobilizar outras perguntas, outros problemas, outras pesquisas, outros debates e diálogos em educação matemática, de modo a vislumbrar novas posturas e avanços em termos sociais, políticos e educacionais.

Assim, agradeço a oportunidade de leitura dessa obra, a aprendizagem concebida a mim e desejo a todos/todas/todes que tenham uma excelente leitura desse "belo" livro!

Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ADORNO, T. W. *Teoria Estética*. Tradução Artur Morão. Lisboa: Edições 70, 1970. 295p.

ARENDT, H. *A Vida do Espírito:* o pensar, o querer, o julgar. Tradução César Augusto R. de Almeida, Antônio Abranches e Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2021. 544p.

BICUDO, M.A.V.; ROSA, M. A Presença da Tecnologia na Educação Matemática: efetuando uma tessitura com situações/cenas do filme Avatar e vivências em um curso a distância de formação de professores. *Alexandria:* Revista de Educação em Ciência e Tecnologia. Florianópolis, SC, v. 6, n. 1, 61-103, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37928. Acesso em: 25 jul. 2021.

BOURDIEU, P. *A Distinção:* crítica social do julgamento. Tradução Daniela Kern e Guilherme J. F. Teixeira. São Paulo: Edusp; Porto Alegre, RS: Zouk, 2007. 560p.

BUTLER, J. *Corpos que Importam*: os limites discursivos do "sexo". Tradução Veronica Damineli e Daniel Yago Françoli. São Paulo: n-1 edições, crocodilo edições, 2020. 400p.

EAGLETON, T. *A Ideologia da Estética*. Tradução Mauro Sá Rego Costa. Rio de Janeiro: Zahar, 1993. 328p.

MATTHEWS, E. *Compreender Merleau-Ponty*. Tradução de Marcus Penchel. Petrópolis: Vozes, 2010. 208p.

MERLEAU-PONTY, M. *Fenomenologia da Percepção*. Tradução de Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006. 662p.

________. *O primado da percepção e suas consequências filosóficas*. Tradução de Constança Marcondes Cesar. Campinas: Papirus, 1990. 80p.

ROSA, M. Teoria Queer, Números Binários e Educação Matemática: estranhando a matemática em prol de uma *héxis* política. *Educação Matemática em Revista - RS*, v. 2, n. 22, 19 set. 2021. DOI: https://doi.org/10.37001/EMR-RS.v.2.n.22.2021.p.70-87

________. Tessituras teórico-metodológicas em uma perspectiva investigativa na Educação Matemática: da construção da concepção de Cyberformação com professores de matemática a futuros horizontes. In: OLIVEIRA, A. M. P. de; ORTIGÃO, M. I. R. (org.). *Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática*. 1ed. Brasília: SBEM, 2018, p. 255-281. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ ebook_.pdf. Acesso em: 25 jul. 2021.

________. Insubordinação criativa e a cyberformação com professores de matemática: desvelando experiências estéticas por meio de tecnologias de realidade aumentada. *REnCiMa:* Revista de ensino de ciências e matemática, São Paulo. v. 8, n. 4, p. 157-173, 2017a. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/ rencima/article/view/1500. Acesso em: 25 jul. 2021.

________. Educação do Campo mobile: a formação inicial de professores com o uso de smartphones. *REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura*. Belém, v.12, n.

25, p. 99-120, 2017b. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/221348. Acesso em: 25 jul. 2021.

________. Cyberformação com Professores de Matemática: interconexõescom experiências estéticas na cultura digital. In: ROSA, M.; BAIRRAL, M. A.; AMARAL, R. B. *Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância:* pesquisas contemporâneas. Natal (RN): Editora da Física, 2015. p. 57-96

ROSA, M.; BICUDO, M. A.V. Focando a constituição do conhecimento matemático que se dá no trabalho pedagógico que desenvolve atividades com tecnologias digitais. PAULO, R. M.; FIRME, I. C.; BATISTA, C. C. *Ser professor com tecnologias:* sentidos e significados. São Paulo: Editora da UNESP, 2019.

ROSA, M.; CALDEIRA, J. P.S. Conexões Matemáticas entre Professores em Cyberformação Mobile: como se mostram? *Bolema*, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1068-1091, 2018. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62al6.

ROSA, M., FARSANI, D., SILVA, C.P. Mathematics education, body and digital games: the perception of the body-proper opening up horizons of mathematical knowledge constitution. *Mathematics Teaching Research Journal,* Special Issue on Philosophy of Mathematics Education, v.12, n.2, p. 310-324, 2020. Disponível em: https://commons.hostos.cuny.edu/mtrj/wp-content/uploads/sites/30/2020/09/v12n2-Mathematics-education-body-and-digital-games.pdf. Acesso em: 25 jul. 2021.

ROSA, M.; PAZUCH, V. Contribuições ao Design Instrucional e à Cyberformação por meio do feedback de estudantes sobre HQs matemáticas interativas. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 16, n. 4, 2014. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/1274/1024. Acesso em: 25 jul. 2021.

SKOVSMOSE, O. Educação Matemática Crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus Editora, 2001. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

SOUZA, M. F. DE; ROSA, M. Cyberformação, produtos cinematográficos e produção de aulas de matemática: em busca de uma educação matemática libertadora. *Educação*

Matemática em Revista, v. 26, n. 71, p. 72-95, 2 set. 2021. DOI: https://doi.org/10.37001/emr.v26i71.2876

Apresentação

Experiências Estéticas em Educação Matemática

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
Rita de Cássia Idem

1 Introdução

Este livro foi desenvolvido com o intuito de sistematizar e divulgar resultados de uma pesquisa intitulada "Sobre a Natureza de Experiências Matemáticas Estéticas", financiada pelo CNPq (Processo: 428323/2018-9). Diversas atividades de investigação compuseram o *corpus* dessa pesquisa, a qual explora possibilidades pedagógicas do uso de tecnologias integrado às artes em Educação Matemática. Estudos em nível de iniciação científica, mestrado e doutorado estiveram associados a essa pesquisa, os quais atribuíram complexidade e diversidade ao escopo do estudo. Considerou-se também, na concepção da presente obra, articulações com resultados de outras pesquisas, que abrangessem aspectos teóricos e práticos acerca da temática de investigação proposta.

Este livro envolve alguns desafios conceituais interessantes. Primeiro, deve-se reconhecer a variedade de concepções sobre estética construídas na história da filosofia. Assim, dedicamos as seções seguintes a apresentar um panorama dessas concepções. Ainda discutimos algumas relações históricas entre estética e Matemática, apresentamos nossas concepções sobre experiência estética e experiência matemática estética. E, por fim, apresentamos as temáticas discutidas em cada capítulo.

2 Estética

A palavra "estética" tem origem na expressão grega *aisthésis* que significa percepção, sensação e sensibilidade. De acordo com Houaiss e Villar

(2009, p. 883), o termo estética pode ser inicialmente compreendido como: a “parte da filosofia voltada para a reflexão a respeito da beleza sensível e do fenômeno artístico” e a “harmonia das formas e/ou das cores; beleza”. Duarte Júnior (2003, p. 8) considera a estética como “[...] a parcela da filosofia (e também, mais modernamente, da psicologia) dedicada a buscar sentidos e significados para aquela dimensão da vida na qual o homem experiencia a beleza. Estética é a ‘ciência’ da beleza.”. Já Abbagnano (1970, p. 348) argumenta que o termo estética designa “a ciência filosófica da arte e do belo”. O nome, originalmente introduzido por Alexander G. Baumgarten em 1750, significa propriamente “doutrina do conhecimento sensível”. No entanto, “o nome designa qualquer análise, investigação ou especulação que tenha por objeto a arte e o belo, prescindindo de toda doutrina ou diretriz específica” (ABBAGNANO, 1970, p. 348).

Ao longo da história da filosofia foram construídas diferentes concepções sobre estética. Segundo Shelley (2020), desde sua introdução no léxico filosófico no século XVIII, a estética tem sido utilizada para designar tipos de objetos, de julgamentos, de atitudes, de experiências e de valores. As teorias estéticas tratam de diferentes aspectos como a classificação de obras de arte, a relação entre percepção e razão no julgamento estético, o contraste entre atitudes e práticas estéticas, a base de definição de experiência estética, a relação entre valor e experiência estética (SHELLEY, 2020).

De acordo com Levinson (2005), as ideias referentes à estética podem ser organizadas em três focos principais: a) arte – a prática da arte, atividades de criação e apreciação da arte, objetos que são obras de arte; b) propriedade estética – característica ou aspecto estético das coisas, como beleza ou graça; e c) experiência estética – atitude, percepção ou experiência que podem ser classificadas como estéticas. O autor argumenta que esses focos não são mutuamente exclusivos, possuindo muitas relações entre si. Além disso, existem temas que perpassam esses focos, como a estética da natureza, que "[...] pode ser entendida como referindo-se a certas propriedades distintas de fenômenos naturais que podem ser classificados como estéticos [...]" (LEVINSON, 2005, p. 2, tradução nossa)[1], como a beleza e o sublime; a teoria do criticismo, a qual "[...] pode ser entendida como um estudo de parte da prática da arte: aquela que se preocupa com a recepção das obras de arte, incluindo sua descrição, interpretação e avaliação." (LEVINSON, 2005, p. 2, tradução nossa)[2], e a natureza da criação, que "[...] pode ser prontamente concebida como atividade relacionada à arte ou quase artística." (LEVINSON, 2005, p. 2, tradução nossa)[3].

O primeiro foco da teoria estética se concentra em definir e teorizar a respeito do conceito de arte. Uma concepção de arte se relaciona à ideia de forma. Segundo Shelley (2020), o formalismo considera que as propriedades artísticas de uma obra de arte são formais, isto é, são compreendidas por meio de sua forma, através da visão ou da audição. Essas propriedades possibilitam indicar se a obra é, de fato, artística, além de qualificá-la como boa ou ruim. Essa visão tem origem nas ideias de Kant, que considerava "[...] que a beleza de objetos, obras de arte e fenômenos naturais igualmente, consistia em sua capacidade de estimular o livre jogo das faculdades cognitivas em virtude de suas formas puras, tanto espaciais como temporais, e sem a mediação de conceitos." (LEVINSON, 2005, p. 3, tradução nossa)[4]. Os teóricos Clive Bell e Roger Fry são representantes dessa linha de pensamento no século XX (LEVINSON, 2005).

---

[1] [...] can be understood to concern itself either with certain distinctive properties of natural phenomena that can be classified as aesthetic [...]

[2] [...] can be understood as a study of part of the practice of art: that part concerned with the reception of artworks, including their description, interpretation, and evaluation.

[3] [...] can be readily conceived as art-related or quasi-artistic activity.

[4] [...] who thought that the beauty of objects, artworks and natural phenomena alike, consisted in their ability to stimulate the free play of the cognitive faculties in virtue of their pure forms, both spatial and temporal, and without the mediation of concepts.

De acordo com Levinson (2005), outra noção de arte a considera uma forma de expressão ou comunicação. No século XX, essa noção foi apoiada por Benedetto Croce, R.G Collingwood e Leo Tolstoy. Uma terceira concepção de arte expressa a ideia de mimesis, imitação ou representação do mundo. Levinson (2005, p. 3, grifo do autor, tradução nossa)[5] aponta que "Esta concepção de arte tem raízes muito profundas e pode ser localizada, embora com algum anacronismo, nas primeiras obras do cânone da estética, a *República* de Platão e a Poética de *Aristóteles*.". Essa noção integra as teorias estéticas de Gotthold E. Lessing, G. W. F Friedrich Hegel, Arthur Schopenhouer, Arthur Danto e Kendall Walton.

Outra concepção de arte considera que a atividade artística tem por objetivo a criação de objetos belos, como a representação da beleza humana. Nessa noção se encontram as ideias de arte como a exibição de habilidades artísticas (Francis Sparshott) ou como experiência (John Dewey). Concepções mais recentes de arte consideram que a produção artística pode ocorrer para fomentar experiências estéticas (Monroe Beardsley), à produção de objetos de significado cultural (Arthur Danto). (LEVINSON, 2005).

As teorias sobre propriedade estética consideram que essas propriedades podem ser percebidas, observadas ou experienciadas e caracterizam o valor estético dos objetos (LEVINSON, 2005). Algumas dessas teorias consideram que as propriedades estéticas

> [...] têm caráter gestáltico; requer gosto pelo discernimento; tem um aspecto avaliativo; proporciona prazer ou desprazer na mera contemplação; não é governado por condições; é emergente em propriedades perceptivas de nível inferior; exige imaginação para atribuição; requer pensamento metafórico

[5] This conception of art has very deep roots, and can be located, though with some anachronism, in the earliest works in the canon of aesthetics, the *Republic* of Plato and the *Poetics* of Aristotle.

> para atribuição; é notavelmente um foco de experiência estética; está notavelmente presente em obras de arte. (LEVINSON, 2005, p. 4, tradução nossa)[6].

Levinson (2005) considera que existe convergência nas ideias sobre propriedade estética. Algumas propriedades estéticas são: "[...] beleza, feiura, sublimidade, graça, elegância, delicadeza, harmonia, equilíbrio, unidade, poder, impulso, [...] tranquilidade, alegria, crueza, serenidade, rigidez, comicidade, extravagância, languidez, melancolia, sentimentalismo [...]" (LEVINSON, 2005, p. 4, tradução nossa)[7].

As teorias sobre experiência estética focam em atitudes, percepções, emoções relacionadas a essa experiência (LEVINSON, 2005). Shelley (2020) aponta que as teorias de experiência estética se dividem em duas: as internalistas se relacionam a características da experiência, geralmente fenomenológicas, as ideias de John Dewey e de Monroe Beardley (meados do século XX) se configuram nesse âmbito; já as externalistas consideram características externas, relacionadas ao objeto experienciado, as quais têm como teóricos George Dickie e Monroe Beardley (segunda metade do ségulo XX). Segundo Levinson (2005, p. 4, tradução nossa)[8], as teorias sobre experiência estética apontam as seguintes características da mente humana:

> [...] desinteresse, ou desapego de desejos, necessidades e preocupações práticas; não instrumentalidade, ou sendo realizada ou sustentada para seu próprio

[6] [...] having gestalt character; requiring taste for discernment; having an evaluative aspect; affording pleasure or displeasure in mere contemplation; being non-conditiongoverned; being emergent on lower-level perceptual properties; requiring imagination for attribution; requiring metaphorical thought for attribution; being notably a focus of aesthetic experience; being notably present in works of art.

[7] [...] beauty, ugliness, sublimity, grace, elegance, delicacy, harmony, balance, unity, power, drive, [...] tranquillity, cheerfulness, crudity, serenity, wiriness, comicality, flamboyance, languor, melancholy, sentimentality [...]

[8] [...] disinterestedness, or detachment from desires, needs and practical concerns; non-instrumentality, or being undertaken or sustained for their own sake; contemplative or absorbed character, with consequent effacement of the subject; focus on an object's form; focus on the relation between an object's form [...] and its content or character; focus on the aesthetic features of an object; and figuring centrally in the appreciation of works of art.

> benefício; caráter contemplativo ou absorvido, com consequente apagamento do assunto; foco na forma de um objeto; enfocar a relação entre a forma de um objeto [...] e seu conteúdo ou caráter; foco nas características estéticas de um objeto; e figurando de forma central na apreciação de obras de arte.

Esse breve panorama do estudo da estética evidencia como o tema é diverso e engloba diferentes concepções. Essa temática tem sido estudada principalmente no campo da filosofia, mas é também relevante no contexto da Matemática. A seguir, destacamos algumas concepções de estética ao longo da história dessa área.

3 Estética e Matemática

Sinclair e Pimm (2006) discutem os momentos de afinidades entre estética e Matemática ao longo da história. Os autores apontam que na Antiguidade Grega a relação entre essas áreas era evidente. Nos séculos seguintes, essa relação deixa de ser discutida. Mas, a partir do século XX, discussões sobre essas afinidades se tornam frequentes e diversas.

Segundo Sinclair e Pimm (2006), na Escola Pitagórica (século VI a.C.), estética e Matemática eram interconectadas. Isso condicionava a visão de mundo dos pitagóricos, que consideravam que "[...] a realidade [...] [seria] revelada em conceitos matematicamente harmoniosos." (SINCLAIR; PIMM, 2006, p. 4, tradução nossa)[9] e que "[...] a beleza da matemática [era] a mais alta ordem de interesse estético." (SINCLAIR; PIMM, 2006, p. 4, tradução nossa)[10]. Os pitagóricos acreditavam que "tudo são números" e essa visão ia além da utilidade dos números para contagem e medição. Por meio deles, os pitagóricos acreditavam que se poderia conhecer o mundo, como apontam Sinclair e Pimm (2006, p. 1, tradução

---

[9] [...] reality [...] [would be] revealed in mathematically harmonious concepts.

[10] [...] the beauty of mathematics [was] the very highest order of aesthetic interest.

nossa)[11]: "Através do número, pode-se conhecer o mundo, e através das harmonias encontradas em padrões numéricos e em formas geométricas, pode-se ter acesso à essência mais clara e mais indubitável – o real.".

A visão pitagórica também influenciou as ideias de Platão (429?–347 a.C.) e Aristóteles (384–322 a.C.). Para Platão, a Matemática era abstrata, ou seja, não estava presente na realidade, era uma entidade divina, assim como sua beleza e perfeição. A esse respeito, Sinclair e Pimm (2006, p. 4, tradução nossa)[12] apontam que "Platão viu a matemática como fornecendo a mais fundamental de todas as ideias e acreditava em objetos matemáticos como formas perfeitas.". Por exemplo, Emmer (2006, p. 239, tradução nossa)[13] aponta que "[...] Platão descreve os cinco sólidos regulares do espaço tridimensional (3D) como as formas mais bonitas que a mente humana é capaz de imaginar. Estes não são objetos físicos, dos quais se pode fazer um modelo, mas ideias – ideias platônicas [...]".

Já Aristóteles entendia que Matemática demonstra ordem, simetria e definição, as quais eram consideradas as principais formas de beleza (SINCLAIR, 2009; SINCLAIR; PIMM, 2006). Além disso, ele relacionava a Matemática ao Belo e ao Bom, como esclarecem Hoinsky e Polansky (2016, p. 52, tradução nossa)[14]:

> Beleza e bondade não são, elas mesmas, o assunto da matemática, nem essas ciências explicitamente nomeiam a beleza e o bem, mas Aristóteles vê a

---

[11] Through number, one could come to know the world, and through the harmonies found in numerical patterns and in geometrical forms, one could gain access to the clearest and most indubitable essence – the real.

[12] Plato saw mathematics as providing the most fundamental of all ideas and believed in mathematical objects as perfect forms.

[13] [...] Plato describes the five regular solids of three-dimensional (3D) space as the most beautiful shapes the human mind is capable of imagining. These are not physical objects, which one can make a model of, but ideas – Platonic ideas [...]

[14] Beauty and goodness are not themselves the subject matters of mathematics, nor do these sciences explicitly name beauty and the good, yet Aristotle views mathematics as pertaining to these since the subject matter, arguments, and results of the mathematical sciences display the forms of beauty.

> matemática como pertencente a estes, uma vez que o assunto, os argumentos e os resultados das ciências matemáticas exibem as formas da beleza.

Segundo Sinclair e Pimm (2006), relacionar a Matemática ao divino e à perfeição deixou de ocorrer na Era Cristã. Nesse período, essas características eram atribuídas apenas à Deus e, portanto, relacioná-las à Matemática era uma ideia condenável. Esse fato talvez explique a escassez de discussão sobre o assunto, mesmo com grandes avanços na Matemática nos séculos XVII e XIX. Um exemplo de menção a valores estéticos da Matemática, nesse período, é o diário do matemático Carl Friedrich Gauss (1777–1855), o qual "[...] contém muitas referências à beleza ou à elegância de suas próprias ideias e descobertas matemáticas."[15] (SINCLAIR; PIMM, 2006, p. 7, tradução nossa).

No desenvolvimento da Matemática Islâmica, na Idade Média, houve referências à relação entre estética e Matemática. Ibn al-Haytham (965–1040), por exemplo, discutia sobre a beleza estética da Matemática. Abu Salh al-Kuhi (940–1000), por sua vez, também considerava aspectos estéticos no desenvolvimento matemático, de acordo com Sinclair e Pimm (2006, p. 5, tradução nossa)[16]: "Ele escreveu sobre as regras da geometria como sendo 'consistentes e imutáveis' e evitou o tipo de 'má' matemática que se baseava em aproximações numéricas e imperfeitas.". Mas, com o passar do tempo, a idolatria à Matemática e a atribuição de qualidades divinas a ela, como beleza e perfeição, foram também condenadas pelos praticantes da religião islâmica. (SINCLAIR; PIMM, 2006).

Houve grande concentração de discussões acerca da relação entre estética e Matemática a partir do século XX. Essas discussões estiveram

[15] [...] contains many references to the beauty or elegance of his own mathematical ideas and discoveries.

[16] He wrote of the rules of geometry as being 'consistent and unchanging' and eschewed the kind of 'bad' mathematics that was based on numerical, imperfect approximations.

centradas no interesse de entender se a Matemática pertence à Arte ou à Ciência. Esse interesse também se relacionou à psicologia da descoberta ou da produção matemática. A esse respeito, Sinclair e Pimm (2006, p. 8, tradução nossa) apontam que os matemáticos desse período que escreveram sobre o assunto "[...] voltaram-se para a questão central de como as respostas afetivas e as sensibilidades estéticas estavam envolvidas no processo de criação matemática."[17].

Henri Poincaré (1854–1912) considerou que a produção do conhecimento matemático depende de escolhas subconscientes que estão sujeitas a valores estéticos (SINCLAIR, 2009; SINCLAIR; PIMM, 2006). Ele ainda apontou que a Matemática é um meio para se estudar a Natureza, possuindo objetivos filosóficos e estéticos (SARAIVA; TEIXEIRA, 2017). Ele considerou que a Matemática proporciona aos matemáticos sentimentos prazerosos comparáveis aos sentidos pelas artes. Segundo o matemático

> A matemática tem um tríplice objetivo. Deve fornecer um instrumento para o estudo da natureza. Mas não é só isso: tem um objetivo filosófico e, ouso dizer, um objetivo estético. Deve ajudar o filósofo a aprofundar as noções de número, espaço e tempo. Seus adeptos, sobretudo, encontram nela fruições análogas às proporcionadas pela pintura e a música. Admiram a delicada harmonia dos números e das formas; maravilham-se quando uma nova descoberta lhes abre uma perspectiva inesperada [...] (POINCARÉ, 2011, cap. V).

Godfrey Harold Hardy (1877–1947) definiu a beleza matemática como aquela presente em produtos matemáticos, como nas provas. O matemático caracterizou essa beleza com base na "profundidade" e "significância" da ideia matemática, distinguindo beleza "trivial" da beleza "importante", que só seria encontrada nas ideias matemáticas que

---

[17] [...] turned to the central question of the extent to which affective responses and aesthetic sensibilities were involved in the process of mathematical creation.

possuíssem tais características (SINCLAIR, 2009; SINCLAIR; PIMM, 2006). G. H. Hardy comparou o trabalho do matemático ao trabalho do artista, afirmando que, em ambos os casos, está fundamentado na criação de padrões (SCHIRALLI, 2006).

François Le Lionnais (1901–1984), por sua vez, discutiu a relação entre estética e Matemática por um viés não-formalista, apresentando "fatos" e "métodos" pelos quais a beleza matemática seria revelada. Desse modo, ele considerava que não só entidades matemáticas, como definições e teoremas, poderiam ser passíveis a julgamento estético, mas também os métodos e processos do fazer matemático. Além disso, o matemático trouxe contribuições à discussão ponderando que as preferências estéticas dos matemáticos são subjetivas, sendo influenciadas por suas inclinações pessoais. (SINCLAIR, 2009; SINCLAIR; PIMM, 2006).

Morris Kline (1908–1992) apontou que a estética podia guiar a investigação matemática e ainda motivar novas provas (SINCLAIR; PIMM, 2006). Essa motivação estética mostra a natureza artística da Matemática, como aponta o matemático

> A determinação das afirmações precisas contidas nos teoremas e as provas que estabelecem esses teoremas são atos de criação. Como nas artes, cada detalhe da obra final não é descoberto, mas composto. [...] Claro que o processo criativo deve produzir uma obra que tenha *design*, harmonia e beleza. Essas qualidades também estão presentes nas criações matemáticas. O *design* implica a presença de padrões estruturais, de ordem, simetria e equilíbrio. (KLINE, 1953, p. 467, tradução nossa, grifo nosso)[18]

[18] The determination of the precise assertions contained in the theorems, and the proofs which establish those theorems, are acts of creation. As in the arts, each detail of the final work is not discovered but composed. [...] Of course the creative process must produce a work that has design, harmony and beauty. These qualities too, are present in mathematical creations. Design implies the presence of structural patterns, of order, symmetry, and balance.

Nesse panorama histórico da relação entre estética e Matemática, a estética se faz presente no entendimento da natureza da Matemática e do processo de produção do conhecimento matemático, aproximando o trabalho do matemático ao do artista, além de possibilitar critérios para o que se considera como beleza matemática (SINCLAIR; PIMM; HIGGINSON, 2004). Segundo Sinclair (2006), a estética pode ter função de avaliação, geração e motivação. A função avaliativa se refere ao julgamento estético dos objetos matemáticos, como provas e demonstrações. A função geradora remete ao uso da sensibilidade estética como forma de auxiliar os caminhos tomados na resolução de problemas, ou seja, a estética possibilita a geração de novas ideias e de *insights*. A função motivadora compreende o papel da estética em influenciar a preferência por determinados campos da Matemática ou pelo engajamento na resolução de determinados problemas. Desse modo, compreende-se que existem elementos e valores estéticos intrínsecos à Matemática, além de uma dimensão estética no processo de produção do conhecimento.

No contexto da estética enquanto elemento intrínseco da Matemática, diversas entidades matemáticas podem apresentar qualidades estéticas. Bosque-Artaza, Lupiáñez-Gómez e Segovia-Alex (2018) apresentam diversos elementos matemáticos e suas qualidades estéticas a partir da perspectiva de diversos matemáticos. Eles citam que Dreyfus e Eisenberg (1986) consideram que os argumentos matemáticos são passíveis de qualidades estéticas relacionadas à simplicidade, concisão e clareza. Já Durán (2001) considera que o raciocínio matemático pode ser julgado esteticamente por sua generalidade, economia, surpresa, inevitabilidade e profundidade. Ernest (2015), por sua vez, considera que teoremas podem ser caracterizados esteticamente em relação à generalização, abstração e potencial; os conceitos em relação à economia, simplicidade e elegância;

os métodos em relação à surpresa, sagacidade e inteligência; as demonstrações em relação à lógica, rigor, raciocínio, dedução e pensamento puro; as teorias em relação à interconexão, ligação e rigor; as aplicações em relação ao padrão, estrutura, simetria, regularidade e *design* visual; e os modelos em relação à aplicabilidade, possibilidade de modelagem e generalidade empírica. Corroborando essas ideias, pode-se considerar a estética como um elemento essencial da Matemática, como aponta Cifuentes (2005, p. 8)

> O estético não é apenas um olhar sobre a matemática, [...] existe um conteúdo estético na matemática, e esse conteúdo está ligado ao que pode ser "apercebido" pelo intelecto. [...] São valores estéticos da matemática, por exemplo, a perfeição, a simetria, a forma, o contexto, o contraste, a ordem, o equilíbrio, a simplicidade e a abstração, também a liberdade.

Em relação ao papel da estética na produção de conhecimento matemático, Sinclair (2004) aponta que o trabalho do matemático não se limita à apresentação de resultados verdadeiros, mas também ao modo como os resultados são apresentados. A autora aponta:

> Em termos de dimensão estética de expressão e de comunicação, quando os matemáticos são guiados por critérios estéticos enquanto eles organizam e apresentam os seus resultados, eles estão manifestando uma crença na qual a matemática não se refere apenas a apresentar os resultados verdadeiros e corretos. Em vez disso, a matemática envolve contar uma boa história, que pode evocar sentimentos como *insight* ou surpresa no leitor, apelando para alguns dos estratagemas narrativos encontrados em boa literatura. Esta crença é também evidente no esforço dos matemáticos em encontrar melhores provas para os resultados que já são conhecidos, ou em discutir e compartilhar a elegância

> e beleza de teoremas ou problemas. (SINCLAIR, 2004, p. 269, grifo nosso, tradução nossa).[19]

A partir das considerações acerca da relação entre estética e Matemática, destaca-se a diversidade de ideias e produções registradas ao longo da história. Seja como elemento intrínseco à Matemática ou como dimensão do julgamento da produção e dos resultados matemáticos, a estética é um aspecto de importância na filosofia da Matemática, em sua história e no trabalho do matemático.

4 Experiência Estética

Destacamos como a temática estética é diversa nos campos filosóficos e matemáticos. Consideramos que é necessário evidenciar essa dimensão no campo da Educação, particularmente da Educação Matemática. Entendemos que a estética perpassa todas as dimensões da vida humana (DEWEY, 2010). Corroborando essa ideia, Duarte Júnior (2003) aponta que a experiência da beleza, ou experiência estética, ocorre diariamente na vida dos seres humanos. Considerando os objetos utilizados por nós no dia-a-dia (como uma caneta, uma roupa, um carro), não nos preocupamos apenas com sua funcionalidade, mas também com sua aparência, com sua estética, seu estilo. E "Mesmo as atividades mais racionais que desempenhamos são perpassadas pelo sentimento estético." (DUARTE JÚNIOR, 2003, p. 11).

Boal (2009) aponta que o pensamento humano é constituído por duas formas complementares de pensamento: o Pensamento Simbólico e

[19] In terms of the aesthetic dimension of expression and communication, when mathematicians are guided by aesthetic criteria as they arrange and present their results, they are manifesting a belief, once again, that mathematics does not just present true and correct results. Rather, mathematics can tell a good story, one that may evoke feelings such as insight or surprise in the reader by appealing to some of the narrative stratagems found in good literature. This belief is also evident in the effort mathematicians spend on finding better proofs for results that are already known, or on discussing and sharing elegant and beautiful theorems or problems (SINCLAIR, 2004, p. 269).

o Pensamento Sensível. O Pensamento Simbólico é um pensamento noético, sendo responsável pela comunicação por meio de símbolos; já o Pensamento Sensível é estético, sendo responsável pelas emoções e sentimentos (SANCTUM, 2012). Boal (2009, p. 82) aponta que para que o ser humano tenha plena percepção do mundo, a estética e a noética devem ser utilizadas conjuntamente pois “Nenhuma das duas formas de pensar pode proporcionar, sozinha, a mais completa percepção do mundo, da qual só seremos capazes se formos capazes de conjugá-las.”. O autor ainda aponta que na união das duas formas de pensar, o ser humano consegue compreender o mundo:

> O Pensamento Sensível penetra unicidades ao sentir, gustar, cheirar, ver e ouvir, enquanto o Pensamento Simbólico inventa conjuntos ao fabricar palavras: mar, mal, amor, sal, açúcar, vinagre, política, esquerda, direita... Unidos, oferecem a mais completa e profunda compreensão do mundo. Separados, um se perde nas abstrações esvoaçantes que o outro não alcança. Um não desce à terra; o outro, dela pouco se eleva. (BOAL, 2009, p. 93).

Desse modo, compreendemos que é preciso valorizar a dimensão estética em espaços educacionais, pois a compreensão do mundo não se dá apenas de modo racional, necessitando das sensibilidades estéticas. Corroborando essa ideia, Gusmão (2013) defende que educação estética é fundamental para o processo educacional. Segundo a autora:

> A educação visa o ajustamento do indivíduo na sociedade, ou seja, busca a harmonia, a integração do indivíduo com a sociedade, de modo que seja possível transformá-la, e, para tal, a educação estética, a educação da sensibilidade, é de fundamental importância nesse processo de transformação. (GUSMÃO, 2013, p. 45).

Defendemos que nesses espaços sejam criadas condições para que os estudantes vivenciem experiências estéticas, pois elas são envolventes, intensas e significativas, criando condições ideais para o aprendizado (PARRISH, 2009). De acordo com Sinclair (2006, p. 41, grifo da autora, tradução nossa)[20], experiência estética "[...] denota a qualidade do encontro de alguém com seu ambiente, que é integrador e cumulativo, e que transforma eventos e momentos díspares em *experiências* memoráveis, satisfatórias e coerentes.".

Beardsley (1958) considera que as experiências estéticas têm as seguintes características: foco (a atenção do sujeito está fixada no objeto da experiência), intensidade e unidade, a qual se relaciona à coerência e à completude. A coerência diz da conexão dos elementos do objeto; quando há coerência, uma coisa leva à outra, há continuidade, clímax (SHELEY, 2020). A completude, por sua vez, se refere à presença de elementos que se contrabalanceiam; nessa experiência ocorre um alcance de equilíbrio que provoca prazer (SHELEY, 2020). Corroborando essa ideia, Dewey (2010, p. 139) aponta que a experiência estética se diferencia das demais por ser marcante e única, a qual

> [...] só pode compactar-se em um momento no sentido de um clímax [...] de longa duração se chegar em um movimento excepcional que abarque em si todas as outras coisas e o faça a ponto de todo o resto ser esquecido. O que distingue uma experiência como estética é a conversão da resistência e das tensões, de excitações que em si são tentações para a digressão, em um movimento em direção a um desfecho inclusivo e gratificante.

A estética, portanto, é uma dimensão da vida humana, sendo necessária para uma experiência completa do mundo. A experiência estética é

[20] [...] denote the quality of someone's encounter with his or her environment, one that is integrating and cumulative, and that turns disparate events and moments into memorable, satisfying, coherent *experiences*.

uma experiência intensa, significativa, memorável e satisfatória. Diversos contextos podem possibilitar experiências estéticas. E os contextos matemáticos? Seria possível constituir uma experiência estética cujo “objeto” estético seja o conhecimento matemático? Como possibilitar experiências estéticas no contexto da Educação Matemática? A seguir, discutimos sobre a noção de experiência matemática estética.

5 Experiência Matemática Estética

A estética permeia a existência humana e a experiência estética é uma experiência significativa para quem a vivencia. A estética se constitui em um modo de compreender a Matemática, julgar seus objetos e processos, além de ser um conteúdo intrínseco. A esse respeito, Gusmão (2013, p. 41) destaca que o pensamento matemático envolve processos simbólicos e sensíveis:

> [...] as dimensões do pensamento matemático são permeadas pela razão e pela intuição. A aquisição do conhecimento em matemática envolve tanto lógica, razão e linguagem, quanto intuição, imaginação e sensibilidade, estas últimas estão intimamente ligadas à experiência estética.

Desse modo, compreendemos a experiência matemática estética como uma noção que busca criar ou analisar os contextos em que possibilitam experiências estéticas integradas ao ensino, aprendizagem ou formação de professores de Matemática. Esse conceito pode ainda englobar o aspecto pedagógico da experiência estética (PARRISH, 2009) ou da noção de Educação pela Arte (GUSMÃO, 2013) a contextos de aprendizagem, ensino ou formação que evidenciam a estética matemática (SINCLAIR, 2006) e/ou a integração de artes, tecnologias digitais e ideias matemáticas.

Gadanidis *et al.* (2016) e Gadanidis, Clements e Yiu (2018) discutem as possibilidades de aprendizagem matemática em cenários educativos que buscam criar condições para a ocorrência de experiências estéticas, valorizando aspectos estéticos matemáticos e integrando tecnologias digitais. Para o desenvolvimento de experiências matemáticas estéticas, os autores apontam que é preciso permitir que os estudantes experienciem a estética da matemática por meio da surpresa e do *insight*, do engajamento vicário e das sensações viscerais. Ainda discutem que é necessário fomentar o pensamento matemático, por meio de atividades que tenham poucos pré-requisitos, mas que permitam a exploração de conceitos matemáticos complexos. Além de aspectos estéticos e matemáticos, esses autores apontam que a implementação dessas ideias no contexto escolar deve ser flexível e abranger o currículo.

Rosa e Pazuch (2014), por sua vez, destacam a possibilidade de experiências estéticas num contexto de aprendizagem matemática no Ensino Superior com o uso de Histórias em Quadrinhos (HQs) Matemáticas interativas. Segundo os autores:

> A experiência estética pode ser entendida como o conjunto de ações proeminentes da articulação das práticas educativas em Educação Matemática, como a elaboração e uso de problemas matemáticos [...]. Dessa forma, a partir do uso de produtos projetados com intencionalidade educativa matemática, ou seja, as HQs Matemáticas Interativas que traduzem esses problemas em linguagem multimodal, a qual contempla a arte e do belo executados digitalmente. (ROSA; PAZUCH, 2014, p. 146).

Rosa (2017) aponta que o uso de tecnologias de realidade aumentada possibilita a ocorrência de experiências estéticas no contexto matemático da formação de professores. Segundo o autor, esses contextos transformam a produção do conhecimento: “São diversas as ações formativas que podem ser criadas com a [...] Realidade Aumentada, e que cada vez mais possibilitam experiências estéticas que [...] podem transformar a produção do conhecimento matemático." (ROSA, 2017, p. 164). Ainda no contexto da formação de professores, Scucuglia (2020) investiga a produção musical matemática por estudantes de Licenciatura em Matemática e sugere: "Uma forma de desenvolver EMEs é com o uso integrado de tecnologia digital e artes no ensino e aprendizagem da matemática." (SCUCUGLIA, 2020, p. 973, tradução nossa)[21].

6 Experiência Estética e Educação Matemática

A partir das considerações apresentadas, destaca-se a diversidade de concepções sobre estética ao longo da história no contexto da Filosofia e da Matemática. Com base nesse contexto plural, questiona-se: qual o papel da estética na Educação Matemática? Como a dimensão estética tem sido tratada nesse campo? Ela tem trazido contribuições teóricas, metodológicas, práticas, curriculares, motivacionais, de aprendizagem, de ensino, de formação? Espera-se que este livro possa trazer luz sobre esses questionamentos. Em cada capítulo, os autores e as autoras discutem aspectos teóricos, práticos e empíricos das relações entre estética, Matemática, Educação Matemática, Educação e Filosofia, trazendo possibilidades de respostas a essas questões.

Bicudo e Klüber apresentam considerações acerca da experiência estética na Educação Matemática por meio de um ponto de vista fenomenológico. Os autores discutem a relação entre estética e educação, discorrendo sobre essas concepções ao longo da história. Eles ainda apresentam uma breve revisão de literatura, discutindo diferentes concepções acerca da estética e da Educação Matemática. Os trabalhos são

[21] One way to develop AMEs is with the integrated use of digital technology and the arts in mathematics teaching and learning.

apresentados em quatro categorias, as quais abordam: a) a experiência matemática como experiência estética, b) a experiência estética por um viés filosófico apoiado em Deleuze, Foucault e Larossa, c) a estética como caraterística intrínseca da Matemática, e d) a estética a partir de uma visão fenomenológica. Em relação a esta categoria, os autores discutem as noções de estética e de experiência estética de acordo com a Fenomenologia e como elas se manifestam no contexto da Educação Matemática.

Lino *et al.* discutem a relação entre estética e Matemática no contexto da produção matemática, mas especificamente, da resolução de problemas. Inicialmente, os autores apresentam diferentes concepções acerca da beleza da Matemática, enfatizando aspectos cognitivos e estéticos da demonstração. Eles também abordam diferentes concepções acerca da resolução de problemas matemáticos, discutindo que ela pode ser entendida como uma arte, configurando o foco do fazer matemático, ainda evidenciam o aspecto pedagógico dessa noção, que pode configurar numa metodologia de ensino que facilita a aprendizagem de Matemática. Além dessas discussões teóricas, os autores apresentam diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras, o que evidencia a diversidade de processos matemáticos utilizados nessas demonstrações. Os autores enfatizam as escolhas de cada demonstração, nas quais a estética permeia os processos e os objetos matemáticos, além de a própria demonstração poder ser apreciada esteticamente.

Em seu capítulo, Grande discute alguns aspectos dos diagramas de Feynman para a mecânica quântica, englobando uma ideia de integração entre Física e Matemática. O autor traz reflexões sobre o uso de representações e modelos visuais, os quais utilizam a Matemática para representar fenômenos físicos. Além disso, ele também explica a funcionalidade dos diagramas de Feynman, discorrendo sobre a teoria envolvida, assim como apresentando exemplo da utilização. Esse capítulo traz contribuições acerca de uma visão de estética integrada ao aspecto visual que, nos casos apresentados, são auxiliares na produção do conhecimento.

Idem, Barbosa e Nespoli apresentam atividades que buscam desenvolver o pensamento computacional e possibilitar experiências estéticas aos estudantes. As autoras consideram o pensamento computacional como os processos de pensamento envolvidos na formulação ou modelagem de problemas para que um agente de processamento de informações possa executar. A estética é entendida como a percepção do belo na relação do sujeito com o mundo e experiência estética como uma experiência significativa e memorável, que impacta o sujeito. Nesse sentido, elas compreendem que a experiência estética cria condições favoráveis para a aprendizagem. As autoras descrevem atividades destacando os elementos potenciais no desenvolvimento do pensamento computacional, assim como das possibilidades de vivenciar experiências estéticas. Esse capítulo contribui na compreensão da Experiência Estética na Educação Matemática por exemplificar modos pelos quais a estética pode ser explorada com intenções e sentidos diversos. Assim, a estética é tratada como aspecto intrínseco à Matemática, como ideia pedagógica que pode favorecer a aprendizagem, e como elemento de apreciação artística na composição de ambientes digitais que estimulam os sentidos por meio de cores, sons e movimento.

Martins, Peralta e Gonçalves, em uma discussão sobre preconceito e normatividade, trazem reflexões acerca da relação entre gênero e estética. Os autores discutem como essa relação é destacada na sociedade por meio da imposição de padrões e da existência de critérios. Em relação à temática na educação, os autores analisam como a questão do gênero é tratada em documentos curriculares e apontam uma diminuição da discussão desse assunto em documentos recentes. Especificamente em relação à Educação

Matemática, os autores analisam questões estéticas referentes a representação de gêneros em materiais didáticos de matemática destinados a estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental da rede estadual paulista de ensino. Os autores constatam que esses materiais auxiliam na perpetuação de marcadores binários de gênero e da heteronormatividade. Esse capítulo traz discussões pertinentes acerca de uma visão de estética "padrão", que pode propagar padrões e promover preconceitos, e de estéticas "diversas", que valoriza e exalta a diversidade de gêneros, corpos e raças.

Graciolli e Scucuglia discutem aspectos relacionados à estética, à arte e à Matemática. Nesse capítulo, o foco da discussão são os origamis, produções artísticas feitas em papel por meio de dobraduras. Os autores enfatizam diversos aspectos dos origamis como sua aplicação na ciência, suas relações com a Matemática, constituindo um novo tipo de Geometria, além de como ocorrem o ensino de técnicas de dobraduras por meio de diferentes mídias. A esse respeito, os autores enfatizam como os vídeos digitais têm contribuído para a divulgação e o ensino da produção de origamis. Nesse sentido, eles apresentam dados de um estudo que abrange a temática, discutindo como aspectos matemáticos, estéticos e didáticos emergem num contexto em que estudantes de Licenciatura em Matemática produzem vídeos enfatizando a relação entre Matemática e Origami. Nesse capítulo, a noção de estética se faz presente de modo diversificado, sendo relacionado à arte do origami, ao conhecimento matemático e à produção de narrativas multimodais (vídeos digitais).

Scucuglia *et al.* discutem a exploração da estética nas ações realizadas no programa Residência Pedagógica junto à estudantes de Licenciatura em Matemática. Os autores apresentam produções audiovisuais realizadas no contexto do programa, as quais foram o foco devido ao ensino remoto. São apresentados relatos dessas produções, especificamente, sobre a produção de vídeos e de músicas. Em relação à produção de vídeos, os autores discutem que ela ocorreu com a finalidade de suporte pedagógico, desse modo, os licenciandos produziram vídeos integrando conceitos curriculares. Também houve produção de vídeos com finalidade artística, como o desenvolvimento de curta metragens de trinta segundos, com mensagens subliminares. A arte também se fez presente na produção de músicas com temas matemáticos, as quais, no contexto pedagógico, possibilitam engajamento, “memorização”, colaboração e criatividade. Esse capítulo, portanto, explora a dimensão artística no contexto da Experiência Estética na Educação Matemática. Nesse sentido, os autores apresentam ações formativas que buscaram integrar tecnologias digitais e artes, proporcionando aos futuros docentes experienciar uma dimensão sensível da Matemática, ao mesmo tempo, em que se refletiu sobre o ensino, a aprendizagem e a integração de tecnologias digitais.

Borba, Domingues e Costa apresentam o Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática. Esse projeto visa promover a produção de vídeos digitais com conteúdo matemática por diferentes públicos, com ênfase na sala de aula de Matemática da Educação Básica e nos cursos de Licenciatura em Matemática. Os autores apresentam detalhes sobre a gênese e a realização desses festivais em suas edições. Ainda focam em episódios caracterizados como estéticos, que evidenciam a produção artística durante os festivais, a linguagem matemática multimodal possibilitada pelos vídeos digitais, o humor presente nos vídeos e os aspectos sociais que permeiam a Educação Matemática no contexto pandêmico. Esse capítulo abrange diferentes concepções de estética, destacando como essa noção está ligada às artes, à Matemática, ainda evidencia como esse projeto tem corroborado para a promoção de experiências estéticas ligadas ao ensino, à aprendizagem e à formação em Educação Matemática.

Zamonel *et al.* discutem a temática de Imagem Pública da Matemática (IPM). Os autores discorrem sobre as visões negativas que as pessoas detêm sobre a Matemática e sobre os matemáticos, as quais são fomentadas por meio de suas representações na mídia (televisão, cinema, literatura). O capítulo ainda apresenta dados de um estudo que buscou investigar a (des)construção da IPM de estudante dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Os autores apresentam e discutem a produção de desenhos por esses sujeitos cujo objetivo era a representação do sentido de Matemática para eles. Essa produção ocorreu antes e depois de uma atividade formativa que buscou explorar as ideias de infinito e de frações por meio de experimento e da representação visual do paradoxo de Zenão. Os autores apontam que a atividade auxiliou na mudança da IPM dos estudantes, pois os desenhos produzidos após a atividade possuíam cores, relacionavam a Matemática a ambientes além dos escolares, além de relacionar a Matemática aos seres humanos. Esse capítulo, portanto, evidencia a estética da produção artística e da Matemática.

Nesse sentido, acreditamos que este livro contribui à Educação Matemática com novas questões teóricas e práticas acerca da temática "experiências estética", fomentando aspectos de inovação à pesquisa, à ação filosófica-pedagógica, aos processos formativos e ao ensino e aprendizagem de Matemática. De maneira geral, o livro mostra que a interface do uso de tecnologias digitais e das artes pode constituir cenários que fomentam a realização de experiências matemáticas estéticas. Contudo, cenários educacionais de naturezas diversas podem também constituir potencialidades estéticas.

Referências

ABBAGNANO, N. *História da Filosofia*. Lisboa: Presença, 1970.

BEARDSLEY, M. C. *Aesthetics*. Indianapolis: Hackett, 1958.

BOAL, A. *A estética do oprimido*. Rio de Janeiro: Garamond, 2009.

BOSQUE-ARTAZA, B. A.; LUPIÁÑEZ-GÓMEZ, J. L.; SEGOVIA-ALEX, I. Estética y educación matemática. *In*: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 22., 2018, Gijón, España. *Anais* [...]. Gijón, España: Universidad de Oviedo, 2018. p. 161–170. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/13797/. Acesso em: 15 jun. 2021.

CIFUENTES, José C. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55–72, 2005.

DEWEY, J. *Arte como experiência*. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T.. On the Aesthetics of Mathematical Thought. *For the Learning of Mathematics*, Montreal, v. 6, n. 1, p. 2–10, 1986. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/40247796. Acesso em: 15 jun. 2021.

DUARTE JÚNIOR, J. *O que é beleza*: (experiência estética). 3. ed. 2. reimpr. São Paulo: Brasiliense, 2003.

DURÁN, A. J. El valor estético de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, [*s. l.*], v. 4, n. 2, p. 329–354, 2001.

EMMER, M. Aesthetics and Mathematics: Connections Throughout History. *In*: FISHWICK, P. (org.). *Aesthetic Computing*. Cambridge: The MIT Press, 2006. p. 239–258.

ERNEST, P. Mathematics and Beauty. *Mathematics Teaching*, Derby, England, n. 248, p. 23–27, 2015. Disponível em: https://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT248/MT248-15-10.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021.

GADANIDIS, G. *et al.* Designing aesthetic experiences for young mathematicians: A model for mathematics education reform. *International Journal for Research in Mathematics Education*, [*s. l.*], v. 6, n. 2, p. 225-244, 2016. Disponível em: https://researchideas.ca/wmt/docs/AME-gadanidis-borba-hughes-lacerda-2016.pdf. Acesso em: 25 fev. 2021.

GADANIDIS, G.; CLEMENTS, E.; YIU, C. Group Theory, Computational Thinking, and Young Mathematicians. *Mathematical Thinking and Learning*, [*s. l.*], v. 20, n. 1, p.

32-53, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1403542. Acesso em: 27 jan. 2021.

GUSMÃO, L. D. *Educação Matemática pela Arte*: em defesa da Educação da Sensibilidade no campo da Matemática. 152 f. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

HOINSKI, D.; POLANSKY, R. Aristotle on Beauty in Mathematics. *Dia-noesis*: A Journal of Philosophy, [*s. l.*], n. 2, p. 37–64, 2016. Disponível em: https://www.academia.edu/download/63022524/Polansky_t220200420-67764-epj8co.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021.

HOUAISS, A.: VILLAR, M. S. *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

KLINE, M. *Mathematics in Western Culture*. London, Oxford, New York: Oxford University Press, 1953.

LEVINSON, J. Philosophical Aesthetics: An Overview. *In*: *The Oxford Handbook of Aesthetics*. [*S. l.*]: Oxford University Press, 2005. Disponível em: https://www.oxfordhandbooks.com/view/10.1093/oxfordhb/9780199279456.001.0001/oxfordhb-9780199279456-e-1. Acesso em: 18 jun. 20221.

PARRISH, P. Aesthetic principles for instructional design. *Educational Technology Research and Development*, Washington, v. 57, p. 511–528, 2009. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11423-007-9060-7. Acesso em: 25 fev. 2021.

POINCARÉ, H. *O valor da Ciência*. 4. reimp. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011.

ROSA, M. Insubordinação criativa e a cyberformação com professores de matemática: desvelando experiências estéticas por meio de tecnologias de realidade aumentada. *REnCiMa*: Revista de ensino de ciências e matemática, São Paulo. v. 8, n. 4, p. 157-173, 2017. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1500. Acesso em: 19 jun. 2021.

ROSA, M.; PAZUCH, V. Contribuições ao Design Instrucional e à Cyberformação por meio do feedback de estudantes sobre HQs matemáticas interativas. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 16, n. 4, 2014. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/1274/1024. Acesso em: 19 jun. 2021.

SANCTUM, F. Pensamento Sensível e Pensamento Simbólico – Uma Concepção Boalina da Arte. *In*: CONGREÇO DA ABRACE, 7., Porto Alegre. *Anais* [...]. Porto Alegre: ABRACE, 2012. p.1-4

SARAIVA, M. J.; TEIXEIRA, A. M.. Matemática e Arte. *ubimuseum*, Covilhã, Portugal, n. 4, p. 59–78, 2017. Disponível em: http://www.ubimuseum.ubi.pt/n04/home_htm_files/Ubimuseum 04art04.pdf. Acesso em: 16 jun. 2021.

SCHIRALLI, M. The Meaning of Pattern. *In*: SINCLAIR, N.; PIMM, D.; HIGGINSON, W. (ed.). *Mathematics and the Aesthetic*: New Approaches to an Ancient Affinity. New York, NY: Springer New York, 2006. p. 105–125.

SCUCUGLIA, R. On music production in mathematics teacher education as an aesthetic experience. *ZDM*, Berlin, v. 52, p. 973-987, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-019-01107-y. Acesso em: 25 fev. 2021.

SHELLEY, J. The Concept of the Aesthetic. *In: The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020. Disponível em: https://plato.stanford.edu/entries/aesthetic-concept/. Acesso em: 17 jun. 2021.

SINCLAIR, N. The Roles of the Aesthetic in Mathematical Inquiry. *Mathematical Thinking and Learning*, [*s. l.*], v. 6, n. 3, p. 261–284, 2004. Disponível em: https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0603_1. Acesso em: 14 jun. 2021.

SINCLAIR, N. *Mathematics and beauty*: aesthetic approaches to teaching children. New York, NY: Teachers College Press, 2006.

SINCLAIR, N. Aesthetics as a liberating force in mathematics education? *ZDM*, Berlin, v. 41, n. 1–2, p. 45–60, 2009. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-008-0132-x. Acesso em: 14 jun. 2021.

SINCLAIR, N.; PIMM, D. A Historical Gaze at the Mathematical Aesthetic. *In*: SINCLAIR, N.; PIMM, D.; HIGGINSON, W. (ed.). *Mathematics and the Aesthetic*: New Approaches to an Ancient Affinity. New York, NY: Springer New York, 2006. p. 1–17.

SINCLAIR, N.; PIMM, D.; HIGGINSON, W. Mathematics, the noetic and the aesthetic. *In*: ANNUAL MEETING NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26., 2004, Ontario, CA. *Proceedings* [...]. Ontario, CA: Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto, 2004. p. 3-20.

Capítulo 1

Experiência Estética na Educação Matemática: um Olhar Fenomenológico

Maria Aparecida Viggiani Bicudo
Tiago Emanuel Klüber

Introduzindo o assunto do tratado neste capítulo

O título deste livro, “Experiências Estéticas em Educação Matemática”, nos provocou a adentrar pela busca de compreendermos a presença da experiência estética na Educação Matemática. Para tanto, buscamos por significados de estética no âmbito da Filosofia, no da Educação, no da Educação Matemática e colocamos em destaque nossas compreensões sobre a visão de estética articuladas em leituras que realizamos de textos de Edmund Husserl e de Merleau-Ponty. Esses estudos nos conduziram a perguntar por possibilidades de vivência da experiência estética na realização de atividades que visam o ensino e a aprendizagem da Matemática, no próprio movimento de constituição e de produção do conhecimento matemático, realizado pelo corpo-próprio e respectivos modos de viver no mundo junto aos outros.

Apresentando compreensões de Estética e de Educação

A ciência filosófica da arte e do belo traz em seu cerne o que é o belo, problema esse elucidado na Antiguidade, especificamente por Platão, Aristóteles e Plotino, os quais

> [...] ao lado de considerações estéticas mais ou menos “puras’, seguiram a antiga tendência à identificação do belo como o bom na unidade do real perfeito

> e, portanto, subordinaram na maior parte dos casos, ao tentar definir a essência do belo e não apenas averiguar em detalhes os problemas estéticos, o valor da beleza a valores extra-estéticos e particularmente a entidades metafísicas (FERRATER MORA, 1994, p. 909).

A concepção de Platão sobre o belo está em consonância com sua visão de real como sendo o que existe de modo perfeito no mundo das Ideias, dissociado do mundo terreno, que está afeto aos aspectos correlatos às aparências que sustentam opiniões embasadas em dados sensíveis. Para ele, o belo também está dissociado desse mundo sensível. É um valor associado ao bem, à verdade, à perfeição e ao imutável. O juízo estético é pautado no ideal de beleza. Do mesmo modo que para Platão, Aristóteles compreende o fazer artístico no âmbito do seu modo de compreender o real enquanto passível de ser conhecido no âmbito deste mundo terreno. Os critérios para julgar o belo, como entendemos em sua filosofia, orientam-se pela simetria, equilíbrio e proporção.

A concepção platônica se impõe com maior força ao modo da civilização ocidental compreender e julgar o belo: como sendo um ideal que está além das experiências individuais, pautadas em opiniões.

De acordo com Azzi (2011, p. 29, inserção nossa), as artes aparecem nos livros II e III (da República) quase que inteiramente subordinadas a um projeto pedagógico radical que visa educar os homens para a sociedade ideal. Essa subordinação não se limita à poesia, mas estende-se a todas as demais atividades produtivas. O filósofo argumenta que a feiura e a desarmonia se relacionam à linguagem perversa e à deficiência de caráter, enquanto que as atividades opostas se conectam às características positivas.

No mundo ocidental, desde o período da filosofia grega, a estética, tomada como arte, foi vista com finalidades educacionais, tendo potencial para educar "para o soerguimento da alma" (ABBAGNANO, 2007, p. 373). Os valores subjacentes às propostas e atividades educacionais se relacionam à ideia do belo, que, se a filosofia que lhes dá sustentação for a de Platão, então o Belo está entrelaçado ao Bem, à Verdade, ao Perfeito, ao Ideal. Se a filosofia for a aristotélica, os valores que embasam os julgamentos estéticos se associam mais àqueles do raciocínio lógico, pois é esperado que neles se sobressaiam a simetria, o equilíbrio e a proporção.

Nos séculos XVII e XVIII emerge e se consolida um conceito de arte como cópia fiel do objeto, guardando identidade com o real e, portanto, com a verdade, entendida como objetivamente dada nos objetos do mundo externo ao sujeito. Nessa acepção, o aceitável esteticamente é o que copia fielmente o real. O julgamento estético é pautado na interpretação dessa cópia, em termos de simetria, de equilíbrio, de proporção, mas, também, do Belo idealmente conjeturado. A noção de estética, segundo Nunes (1969) *apud* Vicente (2017, p.143)

> representa uma posição interpretativa em face do belo e da obra de arte, posição que criou a tradição e que nos impôs, sob uma pauta comum de pensar, certas categorias de que até hoje nos servimos para falar da arte e da sua essência. Ela encerra uma experiência sedimentada na qual se acha resumido todo um ciclo histórico do pensamento. Esse ciclo abrange o conceito platônico de Belo, a teoria da imitação de Aristóteles, o sentido da palavra *tekne* para os gregos, os transcendentais da escolástica, as ideias de *belo natural,* de arte como artifício ou como produção da beleza, de contemplação desinteressada, de representação, de vivência.

Essa concepção de arte evidencia um dualismo no qual prevalece a dicotomia do fora (o real) e a imitação do real pela expressão na obra de arte, realizada pelo sujeito que, em sua subjetividade e ao seu modo, representa o real.

A Matemática e os seus objetos, ao serem tomados como “o real”, como “aquilo que está fora”, e a aprendizagem como o que “está dentro” do sujeito, como se dando nele, então a experiência estética pode se dar com sentido de “imitação” da beleza e alcance da verdade inerente à realidade Matemática. Essa ideia vai ao encontro da concepção de estética como apresentando um equilíbrio entre estabilidade, coerência, estilo formal e precisão, bem como, com ideias de mera representação do real, como uma intuição que descreve o real com matemática. Nesse caso, a aprendizagem da Matemática que dá ênfase à estética tende a se dar na direção de o sujeito que aprende se esmerar em evidenciar esses aspectos pertinentes à Matemática, nas atividades que realiza.

> Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty, a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show (RUSSELL, 1872-1970, [frase retirada do site da Sociedade Portuguesa de Matemática])[1].

Esse entendimento possui o sentido de uma beleza intrínseca à Matemática, convergindo para as compreensões que foram cunhadas nos séculos XVII e XVIII. Desse modo, essa ideia denota uma concepção de beleza *ideal de estético*, naturalizando e difundindo a noção de que os padrões matemáticos, como as proporções de formas geométricas ou as formas simétricas, são vitais para a experiência estética, de modo geral.

Na Educação Matemática tem havido um movimento que busca retomar a experiência estética, visando ampliar modos de compreender e de

[1] “Matemática, vista corretamente, não possui apenas verdade, mas beleza suprema, uma beleza fria e austera, como a de uma escultura, sem apelo a qualquer parte de nossa natureza mais fraca, sem os apelos deslumbrantes da música ou da pintura, sublimemente pura e capaz de uma perfeição austera como a maior das artes pode mostrar.”. Disponível em: https://www.spm.pt/news/4209. Acesso em: 10 abr. 2021.

trabalhar com o ensino e a aprendizagem da Matemática. É senso comum, contemporaneamente, no âmbito de práticas educacionais, tomar-se a música, a pintura, a arte cênica em seus aspectos lúdicos, visando suavizar a árdua tarefa de ensinar e de aprender essa ciência e seus modos de fazer. A experiência estética não é focada. O "soerguimento da alma" não se dá. Entendemos que, para que a experiência estética seja vivenciada de modo a preencher de sentido o realizado nas práticas educacionais, é preciso um *fazer matemático* junto ao aluno para que o dito nas atividades propostas seja habitado por ele.

Joel Martins (1992) traz a educação como *poíesis*. Esse é um termo que vem do grego antigo e diz da ideia de criar ou fazer.

> A etimologia advém do grego *piein*, por criar, com sufixo -*sis* referente a ação. É uma das modalidades da atividade humana dividida por Aristóteles no século IV A.C, dentre teoria e práxis. Em que teoria é a busca pelo verdadeiro conhecimento, práxis é a ação destinada a resolução de problemas e poíesis então seria o impulso do espírito humano para criar algo a partir da imaginação e dos sentimentos (POÍESES, 2020).

Esse termo também deu origem, na língua portuguesa, ao termo poesia, quando se compreende ingenuamente que ele tem a ver apenas com poemas. Entretanto, ao trazê-lo para *o fazer*, construir e habitar o construído, como expõe Heidegger (1971) em *Poetry, Language, Thought,* os significados do termo se abrem e "a proposição poética pode ser uma fala sobre algo que não reflita a existência de uma realidade concreta e reproduza a aparência das espécies na ordem das essências, mas representa uma nova visão de mundo, a do imaginário e da invenção" (MARTINS, 1992, p. 89-90).

Entendemos que a Educação Matemática pode ser assumida como *poíesis*, caso em que o fazer das atividades desenvolvidas com professores e alunos, por exemplo, enfatizam o fazer, construir, pensar sobre o feito e construído e demorar-se nesse pensar, habitando para construir e também aquilo foi construído.

Apresentando estudos sobre Estética em Educação Matemática

Com o tema em vista, efetuamos um levantamento no *google scholar*, o qual busca em todos os indexadores acadêmicos abertos disponíveis na *web*. Focando o tema em suas possibilidades de expressão, utilizando as chaves de busca "experiência estética" e "Educação Matemática", chegamos ao total de 387 textos no dia 04/03/2021. Por conta do grande número de textos e da impossibilidade de ler a totalidade deles, admitimos um segundo filtro, escolhendo apenas artigos publicados em periódicos, sem intervalo temporal, uma vez que o crivo de avaliação tende a ser mais rigoroso do que em eventos e que nestes, muitos textos são exploratórios sobre o tema. Dissertações e teses não foram tomadas, uma vez que buscamos por textos com circulação mais ampla. Deste escrutínio, restaram 34 textos, os quais foram refinados, por meio de ferramenta "pesquisar", identificando a presença das expressões "experiência estética", "experiências estéticas", "*aesthetic experience*" ou apenas "estética", "estético" e "*aesthetic*". Esses excertos foram visitados para efetuar mais um refinamento. Na primeira busca, quando focamos simultaneamente nos termos "experiência estética" e "Educação Matemática", encontramos textos que citam alguma referência de Educação Matemática; os pesquisadores eram da área de programa que possui em seu nome "Educação Matemática", ou o pesquisador era da área de Educação Matemática, mas não tratavam do tema no corpo do texto. Com esse *screening* o número de textos foi reduzido para 18, os quais tratam, com diferentes enfoques, *a experiência estética*.

Dentre estes textos, podemos distinguir quatro modos de compreender a experiência estética na Educação Matemática.

O primeiro grupo, compreendendo a experiência estética em alinhamento com Gadanidis e Hoogland (2003), Gadanidis, Namukasa e Moghaddam (2008), Gadanidis *et al.* (2016), para eles, *a experiência matemática é uma experiência estética*, bem como, toda experiência estética é histórica. Os aspectos emocionais, ilustrativos e artísticos são valorizados nesta perspectiva, bem como a mudança de "enredo" das aulas de matemática. Os trabalhos de Figueiredo e Groenwald (2017, 2019) se alinham à perspectiva de Gadanidis e colaboradores, e também citam o texto de Rosa (2015), admitindo que os aspectos estéticos presentes na simulação, com o auxílio das tecnologias digitais, bem como a visualização, apoiando-se em Borba, Silva e Gadanidis (2014), tendem a *proporcionar experiência estética*, a partir do movimento, cor, imagem e atos de articulação destes aspectos. Lucas e Rosito (2018) também se afinam a este entendimento, uma vez que entendem que *a experiência estética é um processo* que considera emoções e sentimentos como um saber epistêmico. A experiência estética é constituída por "[...] emoções e sentimentos nos processos de ensinar e aprender Matemática como um saber epistêmico. Essa compreensão está fundamentada nas ideias de Paulo Freire" (LUCAS; ROSITO, 2018, p. 165). Assim, a experiência *estética produz conhecimento* pelas emoções e leva à compreensão que prática pedagógica vai além de aspectos racionais, estruturantes, considerando expectativas, relacionamentos, etc. Silva e Gautério (2019) afirmam que o estudo e a apreciação da arte podem contribuir para a sua experiência estética, sendo estendida para o ensino de Matemática e Geometria. Para este grupo é forte a dimensão visual, emocional e articulação com as artes.

Um segundo grupo de textos assume a experiência estética a partir das ideias de Deleuze, Foucault e Larossa. "Acredita-se, a partir da teoria de Foucault, que a etnomatemática pode compreender o idioma matemático como experiência estética dentro do espírito de uma época e de um povo, o seu *zeitgeist*" (SANTOS; LOPEZ BELLO, 2019, p. 24). Farina e Albernaz (2010, p. 310) compreendem a formação de professores de Matemática como experiência estética, afinando-se, segundo eles, às ideias de Larossa (1998), entendendo que a "[...] experiência de formação implica um voltar-se para si mesmo, uma relação com a própria matéria da qual a subjetividade se constitui, uma relação com aquilo que a desestabiliza". A grande experiência estética está associada com a obra de arte, de maneira que possa superar padrões estritamente racionais, disciplinadores e normativos (FARINA; ALBERNAZ, 2010). Clareto (2013, p. 65), assume, referenciando a compreensão de Farina, que *a estética organiza o conjunto de critérios e referências para o existir* "constituindo um modo de expressão para as relações, uma maneira de dar forma ao próprio território existencial. Por isso, pode-se dizer que a cartografia é um estudo das relações de forças que compõem um campo específico de experiências.".

Há um terceiro grupo de textos que compreende os aspectos *estéticos a partir de uma estética interna à própria Matemática, associando-a à obra de arte*. Para Sabba (2016), a beleza das relações matemáticas diversas, como proporções e séries harmônicas, e o prazer e admiração que daí decorrem *causam experiência estética*. Cifuentes (2011) diz que intuição, imaginação e sensibilidade estão em estreita ligação com a experiência estética. *O estético é intrínseco à Matemática*. Considera como "[...] aspectos estéticos da Matemática, a perfeição, a simetria, o contexto, o contraste, a ordem, a simplicidade e a abstração, e também a liberdade" (CIFUENTES, 2011, p. 656). Gusmão, Franco e Cifuentes (2017, p. 368, grifos dos autores, SIC) dizem que compreender Matemática é também "[...] apreender a sensibilidade que está por [traz] dos conceitos matemáticos em estudo, ou melhor dizendo, ter a "experiência estética" desses conceitos". E prossegue: "A apreensão estética na relação da Matemática com a arte e outras ciências, reside na "percepção" da disposição, da ordem, da elegância e da harmonia dos objetos matemáticos em suas relações mútuas". Assim, apoia-se nos conceitos de intuição (no sentido intuicionista e empirista) e imaginação com autores como Bachelard e Poincaré. Gusmão, Franco e Cifuentes (2017) entendem que assumir a arte como uma forma de pensar (estética), por meio da experiência do sensível, pode despertar a experiência estética. Esta é a ciência do conhecimento sensível (GUSMÃO; FRANCO; CIFUENTES, 2017). Esse grupo assume os matemáticos como estéticos, convergentes às concepções de estética internas à resolução de problemas, imagens, aos atos involuntários pautados na experiência estética, de algum modo, alinhados à filosofia intuicionista da Matemática.

Um quarto grupo busca na tradição fenomenológica e hermenêutica a compreensão de experiência vivenciada para compreender as experiências estéticas vivenciadas pelos sujeitos, tanto em condições especiais, como naquelas em que a cegueira está presente (MARTINS; GALIAZZI; AGUIAR DE LIMA, 2020), como em ambientes virtuais (ROSA; PAZUCH, 2014). A experiência estética, compreendida na tradição hermenêutica é uma *abertura à alteridade, ao outro, ao que lhe é estranho*. A utilização de *artefatos com funções estéticas* pode contribuir para a experiência estética, mas não se resumem a eles. Assim, a experiência estética pode ocorrer em situações que envolvem obra de arte, mas também em situações cotidianas (MARTINS; GALIAZZI; AGUIAR DE LIMA, 2020). Rosa e Pazuch (2014) inferem que o *feedback* pode ser considerado como experiência estética, em decorrência da ampliação do processo imaginativo favorecido por histórias em quadrinhos (HQ) em seus aspectos. As tecnologias digitais podem mediar a experiência estética com a incorporação do lúdico. "A experiência estética, então, remete-nos à vivência que possibilita trabalhar/experienciar o belo [...]" (ROSA; PAZUCH, 2014, p.146). Conceituam, ainda, experiência estética como "o conjunto de ações proeminentes da articulação das práticas educativas em Educação Matemática, como a elaboração e uso de problemas matemáticos, e a própria Cibercultura" (ROSA; PAZUCH, 2014, p.146). Tonéis e Petry (2008, p. 301), assumem que "[...] a experiência estética é a forma fundamental do ser". Estudam a experiência matemática com jogos digitais, defendendo que há que se retomar *o acontecer da* experiência matemática, para além das tecnologias.

Outros trabalhos são o de Brolezzi e Ota (2018). Eles entendem que a empatia (abertura ao outro e seu pensar), conforme entendimento de Vygotsky, é originada na experiência estética. A experiência estética do belo para um, pode não o ser para outro. Em pesquisa, Brolezzi e Ota (2018), citam Zeki, Romaya, Benincasa e Atiyah (2014) que afirmam que compreensão e experiência estética estão dissociadas, pois, sujeitos que tinham menos compreensão consideravam fórmulas matemáticas mais belas que os instruídos em matemática. Abreu da Silveira e Teixeira Júnior (2015) afirmam que a experiência estética não se dá em uma relação de causa e efeito. *A estética da Matemática deve ser vista em suas regras*, de acordo com a filosofia de Wittgenstein.

Weissheimer e Montoito (2020), sem explicitar o sentido de experiência estética, em referência à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), entendem que a progressão do conhecimento pode se dar pela ampliação das experiências estéticas dos estudantes.

Destas pesquisas que se dedicam de diferentes modos e em diferentes níveis de aprofundamento sobre o tema "experiência estética", podemos afirmar que todas, em alguma medida, *buscam associá-la ao belo*. Por mais óbvia que pareça essa afirmação, ela lança luzes para esclarecer que a concepção convencional veiculada pela tradição instaurada nos séculos XVII e

XVIII ecoa fortemente nessas pesquisas. É certo que há aquelas que relativizam o belo, segundo a subjetividade que se dirige a ele.

De um lado, é possível, também, compreender que há pesquisas em que *a experiência estética é propiciada, causada por aspectos que possuem estética,* externos ao sujeito. A associação à obra de arte, ou a objetos tomados como esteticamente privilegiados, também é notável. De outro lado, a experiência estética está posta em objetos puramente matemáticos, nos seus modos de expressão e *"layout"*. Estes dois entendimentos, apesar de parecerem distintos, posicionam *a experiência estética como um movimento em direção ao belo que está nos objetos* reais (tese realista de objetos independentes da consciência) ou idealizados (tese idealista de objetos da existência de objetos produzidos pela consciência).

Por fim, há pesquisas que compreendem *a experiência estética como um tipo de ação intrínseca ao sujeito* que se permite dispor frente ao mundo, frente ao outro e aos objetos, ainda que se valha de artefatos ou objetos classificados como estéticos.

Em nossa compreensão, cada uma destas pesquisas é um modo possível de compreender a experiência estética, seja em sua manifestação mais imediata, seja em compreensões teóricas mais refinadas. Porém, *a questão da possibilidade da experiência estética*, enquanto uma questão radical, ao menos nos textos em pauta, fica obscura. Essa possibilidade, segundo compreendemos, é um momento, no sentido fenomenológico, das vivências estéticas quando da constituição e produção do conhecimento matemático. A isso nos dedicaremos no próximo subtítulo.

Apresentando a vivência estética no próprio movimento de constituição e de produção do conhecimento matemático

A vivência estética é um momento (parte não-independente) dos diversos atos envolvidos na experiência estética. Porém, aqui, não podemos nos confundir com os termos vivência e experiência. Buscando explicitar sentidos e significados desses termos, trazemos Bicudo (2020a, p. 38), esclarecendo que a "[...] vivência flui enquanto seu movimento dura na temporalidade. A cada momento, vive-se o presente da ação que desliza para o já foi, chamando para o "agora" o que está no fluxo do horizonte dessa ação que está sendo realizada". Ales Bello (2016, p. 29) assinala que "as vivências espelham todas as operações, todas as experiências, todas as constituições do sujeito humano, e da realidade natural, mas as conexões de sentido acontecem somente entre as próprias vivências [...]". As vivências se dão no próprio ato de percepção realizado pelo sujeito, corpo-vivente que, intencionalmente, se dirige de modo atento ao que busca saber do que se trata isso que vê.

Visar intencionalmente algo diz, também[2], de uma relação com algo que é externo, transcendente, ou meramente transcendente no sentido realista, e que é acolhido no movimento do ato de perceber o percebido nesse ato[3]. A realização do ato se dá na experiência vivenciada no corpo-próprio, ou seja, no corpo entendido em sua totalidade carnal, psíquica e espiritual, que Husserl denomina com a palavra *Leib*. *Leib* traz consigo o entendimento de um corpo que sempre é movimento intencional, ou seja, expressa em sua motricidade sempre um ir onde há algo que percebe como o que há a fazer, o que intenciona realizar. Ele realiza uma articulação carnal que traz a dimensão *hylética*[4] do movimento de conhecer realizado pelo sujeito em seu ser corpóreo, reunindo, então, o sentido sensorialmente nos aspectos sensórios do corpo, o momento noético, intencional

[2] "Também" porque as vivências são todas imanentes ao fluxo da consciência; porém podem ser dirigidas de modo imanente no caso de intencionalmente ter como alvo outras vivências ou de modo transcendente, quando visam a objetos externos que se encontram na circunvizança.

[3] Essa relação é denominada por Husserl como noesis e noema (ALES BELLO; MANGNARO, 2012, p. 122).

[4] O termo tem origem no vocabulário grego *Hylé (Matéria). (ALES BELLO, 2016, p. 86). Porém, na tradução para a língua portuguesa utiliza-se as suas variações tanto como hylética, quanto hilética.*

que acolhe o visto no fluxo da consciência e o noemático, que diz do objeto visto. Ales Bello assim expressa essa ideia: "[...] não apenas a duplicidade entre o momento noético intencional e o noemático, mas também entre a noesis intencional e o aspecto hylético ou material, que diz respeito à dimensão sensorial" (HUSSERL, 2019, p. 20).

Aprofundando um pouco a complexidade do *Leib* (corpo-vivente ou corpo-próprio). É uma complexidade física, psíquica e espiritual e, sendo desse modo, liga-se ao Mundo-Vida[5] (*Lebenswelt*) pelas sensações, compreendendo de modo imediato no ato de perceber; movimenta-se intencionalmente *(dirigindo-se à, estendendo-se à, sem, no entanto, dar-se conta o tempo todo)*, percebe a si e ao outro na carnalidade do corpo-próprio que vê como semelhante e como diferente. Sabe que é o outro porque está lá enquanto ele está aqui, mas, pela intropatia[6], o sente como igual enquanto corpo-próprio que também tem sensações, sentimentos e pensa, ainda que não do mesmo modo que ele. É a gênese do dual: igual e diferente.

Na dimensão da subjetividade do sujeito são articulados os sentidos trazidos nas sensações e que vão fazendo "sentido" na materialidade hilética da carnalidade do corpo-vivente; as vivências, percepção do movimento dos atos realizados; os atos espirituais que se referem aos juízos que dizem de compreensões que não estão dadas nas próprias sensações e nos atos psíquicos, como por exemplo, esta água está mais fria do que aquela. Essa articulação carrega consigo um movimento de expressar de modo organizado o que foi vivido, compreendido e articulado pelo

[5] Diz-se mundo da vida, porque a vida não está dentro do mundo, mas o mundo é correlato à vida. Assim, não é vida no mundo, mas mundo da vida, aqui descrito como mundo-vida.

[6] Intropatia é conhecimento do outro que se dá diretamente na vivência em que o outro é percebido em seu corpo-próprio. É constituinte da intersubjetividade, juntamente com a linguagem. Portanto, não é um conceito teórico ou intelectualmente explicitado.

sujeito[7]. A expressão se materializa na linguagem. Esta é que dá sustentação e mantém em sua historicidade, a produção do conhecimento. Ela se realiza de modo diferente em consonância com a região de possibilidades que o ser humano encontra de dizer de sua compreensão do mundo: pela linguagem proposicional, configura-se o conhecimento que se desenvolve como científico, na civilização ocidental; pelos sons organizados em uma gramática específica e articulados à harmonia, configura-se a região da música; pelas imagens, cores, movimentos e perspectivas, configuram-se as artes cênicas e a pintura; pelo movimento simultâneo de variados artefatos, manuseio de objetos por intermediários genéricos (*mouse*, *mousepad*, telas *touch*), toca-se sem tocar o objetos, materializa-se o imaterializável, sincronismo de visualização de objetos ausentes na extensão espacial ao toque das mãos, configurando-se as tecnologias digitais da comunicação e informação. Essas não são regiões que se excluem, porém que se entrelaçam, conforme o que se busca expressar.

O dito neste parágrafo nos permite avançar em direção à vivência estética e no seu possível entrelaçamento com a vivência do conhecer/fazer/produzir matemática.

Buttingsrud (2017), em um trabalho sobre "*Phenomenology and Dance*" expõe uma compreensão de vivência estética que vem ao encontro de nossa própria compreensão. Entretanto, nós trazemos um recorte de sua fala, pois, ao focar o dançarino, artista que realiza a dança, expõe o *Leib*, *percebendo-se e percebendo os movimentos que realiza*, como que numa reversibilidade, a música que dança é dançada, a espacialidade em

[7] Sujeito, no âmbito da fenomenologia husserliana e assumida por Merleau-Ponty, é uma concepção bastante elaborada, pois envolve a percepção da singularidade de si e de si como diferente do outro; bem como a percepção de que o outro também porta sua singularidade, dele se diferenciado; porém percebe também ambos (o sujeito e o outro) como humanos, corpos-encarnados que são e que portam semelhanças. Ele nunca é isolado do mundo-vida, pois, pelas sensações e por ser *Leib* (corpo carnal com movimento intencional) está sempre 'plugado' ao mundo, e, portanto, ao outro e respectivo entorno.

que se movimenta. Essa vivência evidencia a reunião articulada em um nível não apenas racional de muitos aspectos que se dão concomitantemente. Expõe mais do que uma reunião, uma "magia" de um momento vivenciado em que a *poíeses* se faz e que ela expressa como: *"I define this state of self-consciousness as embodied reflection."* [8] (BUTTINGSRUD, 2017, p. 6)

A autora mencionada, Buttingsrud (2017), entrevistou bailarinos que descreveram a consciência de corpo no palco, as quais podem ser explicitadas mediante uma terminologia comum aos textos fenomenológicos que revelam reflexão. Relatam que são corporeamente atentos, intensamente autoconscientes e conscientes do outro e do mundo, que estão desvendando experiências transformadoras por meio do corpo, que articulam com experiências pré-reflexivas.

> This could indicate a reflective state of consciousness, yet, there is a simultaneous lack of thinking and rational control, reports of having artistic blackouts, feeling 'something taking over', 'someone else leading their arms and legs', of being in a trance. There seems to be an experientially lived as well as theoretically seen experience of the self in which the subject's bodily aspect of self "thinks"/reflects/accesses herself as object through/in/by means of her embodied activity, in which she is completely immersed. I define this state of self-consciousness as embodied reflection (BUTTINGSRUD, 2017, p. 6).[9]

Enfatizamos que essa autora nos diz que essa não é uma vivência mística nem experienciada exclusivamente por artista ou especialistas em arte, porém que todo ser humano tem a capacidade de vivenciar de modo

[8] Eu defino este estado de auto-consciência como reflexão corporificada.

[9] "Isso poderia indicar um estado reflexivo de consciência, ainda, há uma falta simultânea de pensamento e de controle racional, relatos de apagões artísticos, de sentimento de 'algo assumindo o controle', "de outra pessoa estar conduzindo seus braços e pernas', de estar em transe. Parece haver uma vivência experienciada e também teoricamente vista do self em que o aspecto corporal do self do sujeito "pensa"/reflete/acessa a si mesmo como objeto através de/em/por meio de sua atividade corporificada, na qual ele está completamente imerso. Eu, define este estado de auto-consciência como reflexão corporificada" (BUTTINGSRUD, 2017, p. 6, tradução nossa).

afetivo e corpóreo experiências como essas. É esse entendimento que vem ao encontro do nosso. De modo específico, destacamos a vivência com fazer/compreender/produzir matemática. Esse estado corpóreo que é simultaneamente racional e não-racional, é também um modo de se dispor no mundo, movendo-se, estendendo-se aos outros e às coisas, toca-se a si mesmo, de maneira reversa.

Essa concepção a respeito de estética emerge no âmbito de uma visão de realidade e de conhecimento que entende que não há uma separação entre o visado como externo, o mundo tomado como objetivamente dado e os aspectos subjetivos do sujeito. Ao invés disso, retomando a obra de Husserl e aquelas bastante divulgadas entre nós, as de Merleau-Ponty, a primeira realidade, não passível de ser negada, é o corpo-vivente que vive. Focando esse corpo, a pergunta: como vive? Vivendo, tocando o que está a sua volta, seres humanos e demais seres, inclusive os histórico-culturais em seus modos de materializarem-se, de se manterem e durarem, pelos sentidos do ver, ouvir, tocar, sentir odores e sabores, bem como de se locomover, ou seja, pelo sentir cinestésico. Assim, o mundo-vida chega a esse corpo, mas apenas porque esse corpo se abre a esse mundo, também, percebendo-se como um sensível, como sentido que já na complexidade que vai se configurando pela postura sempre indagadora "o que é?" isso que estou tocando, entendida aqui como uma indagação posta pelo olhar intencional que sempre perscruta indagadoramente o existente, em uma dimensão pré-predicativa[10], o ato de ver traz consigo o visto, ato esse denominado por Husserl de *noesis-noema*, como percebido. Portanto, não como uma cópia fiel do objetivamente existente. Por ser o percebido, já se

[10] Pré-predicativa diz do que o sujeito sentiu e compreendeu de modo imediato na totalidade do seu corpo vivente, mas ainda não mediatizado pela linguagem, qualquer que seja.

manifesta como ideia[11] que, no longo percurso de constituição do conhecimento para o sujeito sobre o mundo que sempre lhe chega como percebido, é envolto em um fluxo de realização de atos que culmina com a compreensão do sentido disso que foi percebido, articulado e passível de ser expresso em linguagem. A explicitação mais pormenorizada desse movimento se encontra, por exemplo, em Husserl (2006), Husserl (2002); Husserl (1982), em *Cartesian Meditations,* Husserl (1970), no famoso *Crisis*; Bicudo e Silva (2018); Bicudo (2020b).

Esse modo de compreender o conhecimento, inclusive o da Matemática, distancia-se, portanto, daquele das experiências estéticas que emergiram no século XVII, consolidado em XVIII. A arte não é vista, na visão fenomenológica, como produto de identidade do real com a verdade e com o belo. Porém, como uma expressão de vivências físicas, psíquicas e espirituais entrelaçadas em que aspectos do belo estão sendo intencionalmente enfatizados.

Com isso que vimos explicitando, foram se abrindo possibilidades de compreender que a experiência estética não está dirigida às coisas, ainda que possa, pela dimensão hilética, visá-las, mas ela é um modo de já estar disposto no mundo na dinamicidade do *estender-se a*, e, portanto, o seu teor (o belo, o prazer, o deleite), é apenas possibilidade, uma vez que ela se abre no pré-predicativo. Dito de outro modo, a experiência do belo é uma manifestação da experiência estética que é um modo originário de o corpo encarnado vivenciar o sensível, pois toca, tocando-se, ouve, ouvindo-se, sente, sentindo-se; é um corpo sensível e *sentiente*. Assim, há uma reversibilidade nesta experiência. A experiência estética se abre ao

[11] Para Husserl a ideia diz do visto (da essência da coisa vista, percebida, sentida) no ato de perceber e que é trazido à totalidade do corpo vivente no movimento de noesis-noema, ou seja, de ver e do visto, apenas como o percebido, não como a coisa em si.

(não) belo, ao *não (estruturado), ao não (prazeroso), em toda a sua amplitude.* Por fim, é relevante compreender que:

> es una comunicación no conceptual, es decir, un acto de comunicación que se realiza sin la intermediación, sin la intermediación de las imágenes, e incluso sin la intermediación de la lengua constituida. Es en el ámbito de lo estético donde la conciencia asiste a la *Sinnbildung*, a la generación misma del sentido, en un extraño régimen donde no hay presente intencional y donde afloran los sentidos no-intencionales que caracterizan la naturaleza misma de la experiencia estética. En esta comunicación excepcional no se transmite lo establecido, lo previsible, sino la resonancia propia de los procesos mismos de generación de sentidos, es decir, aquello que es imprevisible y que se sustrae a la conciencia explícita del "yo" (FALCÓN, 2008, p. 88-89).[12]

Expondo aberturas para a Educação Matemática

Após esse itinerário que percorremos, podemos perguntar mais detidamente: e a experiência estética na Educação Matemática? Os distintos modos de compreender a experiência estética no âmbito da Matemática e da Educação (Matemática) que fizemos o esforço de expor neste texto, mostram que o conceito emerge com fortes vínculos àquilo que podemos chamar de experiência estética com matemática, experiência estética como uma dimensão humana das vivências que realizam as experiências do belo, da percepção da obra de arte, do sentimento da plenitude, do prazer. Nós a compreendemos como o modo de sentir e perceber-se sentindo.

Indagando os sentidos e significados que sustentam aquelas compreensões, é plausível dizer que *a experiência estética* se dirige aos

[12] [...] é uma comunicação não conceitual, ou seja, um ato de comunicação que se realiza sem a intermediação, sem a intermediação das imagens, e mesmo sem a intermediação da linguagem constituída. É no campo da estética que a consciência auxilia [no] *Sinnbildung*, a própria geração de sentido, em um regime estranho onde não há presente intencional e onde emergem os sentidos não intencionais que caracterizam a própria natureza da experiência estética. Nesta comunicação excepcional, não se transmite o estabelecido, o previsível, mas a ressonância dos próprios processos de geração dos sentidos, isto é, o que é imprevisível e que escapa à consciência explícita do "eu". (Tradução nossa)

múltiplos modos de manifestação do que é enlaçado e produzido na experiência vivenciada. Por exemplo, a compreensão entre os matemáticos, da beleza, do rigor, da estrutura matemática em si, como uma estética intrínseca à Matemática, é descrição da experiência estética vivenciada com a Matemática. Os próprios matemáticos divergem entre si sobre o que é mais ou menos esteticamente belo, como a diferença entre Russell e Poincaré, o primeiro atribuindo às estruturas internas e formais e o segundo a possibilidade de compreender o real. Os distintos atos envolvidos na descrição destas experiências estéticas, como a memória, o juízo atribuído às estruturas matemáticas, a reflexão, permitem dirigir-se à Matemática como bela. Porém, tais atos, de distintos sujeitos, tendem a manifestar diferentes experiências para com os mesmos objetos postos em questão, ainda que possam convergir para aspectos semelhantes. É neste sentido que dizemos que na vivência da *intropatia* não podemos sentir a dor do outro, mas perceber a dor que o outro sente e nos sentirmos solidários a ele. O mesmo movimento se passa com a experiência estética da Matemática.

Desse modo, as tentativas de expressar a sua experiência ou argumentar sobre ela não têm o alcance de produzir a mesma experiência estética no outro, pois o outro já vivencia experiências estéticas, visando algo. Assim, por mais legítimas que sejam as descrições da Matemática como experiência estética, podendo ser tomadas como verdade emergente de quem as relata, essa vivência se realiza na sua própria dinâmica e se dá no fluxo do movimento e tempo vivenciado pelo próprio sujeito.

Quando essas experiências são trazidas em um texto afirmativo a respeito do belo em Matemática, por exemplo, como no caso dos autores que citamos e neste nosso próprio texto, já há um pensar em movimento de articular-se de modo inteligível já tomando a forma de ser expresso em linguagem e, nesse caso, ao ser expresso, já está na dimensão da linguagem refletida e não mais pré-predicativa. Já houve um movimento dinâmico de entrelaçamento das diferentes sensações conduzidas pelos sentidos, dos atos psíquicos e dos de julgamento, que são os espirituais.

Na Educação Matemática, em nossa compreensão, a intenção de quem se preocupa com a experiência estética deve enfatizar essas vivências que podem se dar em diferentes atividades propostas e desenvolvidas com vistas a educar matematicamente.

Entendemos que há uma tendência que busca evocar compreensões matemáticas como experiência estética associada a aparatos estéticos. Conforme nossa compreensão, a *experiência estética está aí*, ela se dá, mesmo quando não é evocada.

Portanto, no ensino de Matemática que busca se apoiar no "valor do belo", "na beleza", concernente à Matemática, há uma inversão, pois, a valoração é secundária à experiência estética que já estava presente, uma vez que é por meio da dimensão hilética que se constroem os valores, do bem ou mal, belo ou não-belo, etc. (ALES BELLO, 2016). Assim, o apelo aos valores do estético não podem se confundir com a própria experiência estética. Exemplificando, podemos pensar em uma demonstração qualquer, escrita com clareza, estrutura e encadeamentos lógicos tidos como perfeitos, a qual o matemático assume como bela. A sua experiência estética é legítima e ela é preenchida nos atos intencionais, com o sentido do belo, seja pela clara compreensão, seja pelo modo como conseguiu escrever ou ainda por mostrar o quanto ela não pode ser acessada por outros. Porém, aos que acompanham a demonstração, os gestos, a emoção de quem a faz, a segurança com que expõe, também está em sua experiência estética, sendo articulada pelo que lhes chega sensorial e psicologicamente, de imediato. Contudo, o valor atribuído por aquele que demonstra e por aqueles que acompanham a demonstração, é distinto. Os atos que permitem articular as vivências, juntamente com o momento hilético, conferem o sentido à experiência.

Desse modo, somos chamados a um pensar radical sobre experiência estética, pois ela é um acontecer, é um acontecimento que se abre a si mesmo, no próprio movimento de abrir-se ao outro e às coisas.

Expondo sentidos e significados para a Educação Matemática, entendemos que ela trabalha com a lógica da Educação e da Matemática (BICUDO, 2020a) de tal maneira que os aspectos veiculados pela tradição, disponibilizados pela linguagem e objetos físicos são visados, por um lado no momento noético e por outro, na visada do momento hilético (ALES BELLO, 2016). Esses aspectos se reportam a materiais didáticos, aos recursos visuais, às particularidades de cada um deles, bem como aos recursos pedagógicos, que são visados (noeticamente) em seu momento hilético (materialidade que é o preenchimento de sentido daquilo que é visado por atos da consciência, tanto no espaço, fenomenicamente falando, quanto nas próprias vivências). Contudo, há que se compreender que "A percepção, enquanto captação tátil da forma, não está no dedo que toca, no qual estão localizadas as sensações táteis. O pensamento não está realmente localizado na cabeça, como as sensações localizadas de tensão". (ALES BELLO, 2016, p. 85). Prossegue, esclarecendo que esse modo natural de se expressar mostra que "[...] a força atrativa da localização hilética faz concentrar a atenção sobre o corpo próprio" (ALES BELLO, 2016, p. 87). Portanto, o momento hilético permite abarcar a mera materialidade, não em si, mas pelo preenchimento do sentido concernente àquilo que se mostrou (*hylé*, matéria que apresenta). Segundo a mesma autora, o momento hilético não é egológico, pois se constitui sem a interferência do eu, ainda que este esteja sempre presente e ativo. Quanto ao nosso tema de estudo, a experiência estética na Educação Matemática, é relevante ter isso em conta, pois o momento hilético é afetivo e impulsivo, imediatamente intuitivo, constituindo a matéria para o momento em que o ato noético (o do ver, sentir) é realizado. Assim, a descrição da experiência estética daquilo que é externo se constitui desta materialidade dada no momento da vivência da dimensão do hilético, de que o sujeito se dá conta de estar vivenciando.

Nesse sentido, não será incomum encontrar matemáticos, professores e outras pessoas que dizem ter passado a amar Matemática, mesmo em aulas sem apelo explícito ao que se denomina por esteticamente apropriado. É como diz Merleau Ponty na obra O Olho e o espírito, ao analisar a obra de Cézanne:

> Cabe esperar que essa imagem se anime para os outros. Então, a obra de arte terá juntado vidas separadas, não existirá mais apenas numa delas como um sonho tenaz ou um delírio persistente, ou no espaço como uma tela colorida: ela habitará indivisa em vários espíritos, presumivelmente em todo espírito possível, como uma aquisição para sempre (MERLEAU-PONTY, 2013, p. 91).

A Educação Matemática, portanto, pode criar condições para a manifestação de aspectos que podem ser enlaçados pelo corpo-próprio, hileticamente, nunca sendo tomadas em sua mera materialidade (fisicalidade). A paixão ou ódio, o móvel e o estático, o amplo e o restrito, o diálogo com o outro, contribuem para a vivência de valores concernentes a esta experiência estética. Entretanto, entendemos que se a experiência estética for posta como um objetivo em si, na experiência empírica realizada pelo sujeito com objetos exteriores, ou pela disposição estética que se origina do olhar geométrico ou apenas na expressão artística, pode ocorrer uma ruptura entre a experiência estética vivenciada em acontecimentos e o valor que se atribui a ela quando da produção do conhecimento matemático.

Em outras palavras, ainda que os aspectos veiculados pela Educação Matemática possam ensejar sentidos e valores que preenchem o sentido da experiência estética vivenciada, o sentido do conhecimento matemático e o sentido dos aspectos tomados como estéticos podem não ser convergentes, conduzindo à compreensão de que a experiência estética é uma experiência que não ocorre na produção do conhecimento matemático. Assim, se distancia da experiência estética como um momento vivenciado em que possibilidades se fazem sentidas, inclusive a possibilidade de vivenciar esteticamente a Matemática.

Um dos autores deste artigo traz sua lembrança a respeito da primeira vez que, conforme ele, se lembra de ter atribuído valor positivo à experiência estética de uma demonstração matemática. Relata: “deu-se em uma orientação, na qual estudava *Soma de uma Progressão Aritmética*, do tipo $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Esse momento vive em mim, pulsando como algo excepcional. Até aquele momento já tinha realizado incontáveis demonstrações ao longo da graduação e a minha experiência estética era como que dolorosa, ao realizar uma demonstração. Era uma experiência tolhida, pois em sua dinâmica, não a habitava, eu me percebia vivendo-a dolorosamente, em uma dimensão psicológica. No entanto, nesse dia, ao dialogar por bastante tempo com o orientador, sobre outros aspectos, sobre as possibilidades de resolver aquele problema de que estávamos tratando, o diálogo amistoso, a atenuação da tensão, a não preocupação com obter sucesso, a reflexão livre, a manifestação dos sentimentos para com o que fazíamos e como fazíamos, sem avaliação formal, apenas fluindo naquilo que fazíamos, levou-me à perplexidade quando me dei conta da clara compreensão de habitar aquilo, em cada momento. Vivenciei um modo de habitar aquela demonstração. Não apenas em sua beleza interna e clarividente naquele momento, mas no gesto de quem a conduzia, no acolhimento do meu pensar atento, mesmo não sabendo de que estava se abrindo em mim a possibilidade de *compreender-como-ele* aquele assunto, porém, *ao-meu-modo*. A vivência agora experienciada por mim ao relatar essa lembrança é outra: é perceber-me sentindo saudade, potência, capacidade que até então eram-me negadas pela externalidade de uma estética estruturada para ser vista como bonita, não podendo ser habitada como um todo. Uma estética 'intangível'".

Essa descrição da experiência estética revela vivências de que o sujeito se deu conta. Os atos envolvidos, como juízo, suspenso naquele momento, abriu lugar à imaginação, como ato imagético que atribui sentido à experiência vivida. A suspensão dos juízos, permitiram alterar o valor atribuído à demonstração, valorizando-a não por sua aparência, mas pelo sentido que a sustentava.

Focando a descrição dessa experiência estética compreendemos que, naquele momento, em um agora que é um instante e que sempre escorrega para o já foi, o ato de imaginar fluiu preenchendo aquela vivência, em que os juízos de certo e errado, belo e feio não estavam presentes. Foi uma vivência do próprio *insight* de ver além da própria demonstração, técnica e corretamente, de um ponto de vista da lógica e da ferramenta matemática, compreendida, repetida e realizada. O sentido do dito naquela demonstração se fez para esse sujeito dessa vivência. Segundo ele: "expressou-se como um arrebatamento, um modo de tocar o intocável, de ver o invisível, vendo-me e tocando-me quando via e tocava, escrevendo, acompanhando o movimento do pensar do outro ao mesmo tempo em que estava pensando".

Esse relato nos conduz ao entendimento que é no diálogo *com-o-aluno-junto-com-a-matemática* que a experiência estética pode se dar na Educação Matemática enquanto a ação de educar matematicamente.

Um remate textual

Ao longo deste texto, às voltas com os possíveis sentidos e significados de experiência estética, buscamos expor compreensões sobre o tema, esclarecendo o modo como ele vem sendo tomado na comunidade de educadores matemáticos. Ao mesmo tempo em que compreendíamos o que se mostrava disto que é a experiência estética para esta comunidade, nesta temporalidade, avançamos na compreensão da experiência estética em sentido fenomenológico.

Dentre os principais aspectos, destacamos a compreensão de que a experiência estética é um acontecer, porém, ainda sem a atribuição de valor que é um momento secundário, refletido, já dirigido à experiência estética que se deu e se dá, como um modo de estar disposto no mundo-vida.

Essa compreensão, além de contribuir para uma reflexão mais radical sobre o tema, evidencia que além de artefatos ou de concepções que compreendem a experiência estética como o contato com a obra de arte em geral, que são um modo de compreender a experiência estética, faz-se necessário compreender que a "reflexão corporificada" é um modo racional e não racional da vivência concernente à experiência estética.

Compreendemos que a experiência estética se dá a todo momento, mesmo quando ela não é evocada explicitamente nas ações didático-pedagógicas de Educação Matemática. É neste sentido que entendemos a Educação Matemática como *poíesis*.

Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALES BELLO, A.; MANGANARO, P. *(a cura di) .....e la coscienza?* Fenomenologia, psicopatologia neuroscienze. Bari: Rdizioni Giuseppe Laterza, 2012.

ALES BELLO, A. Primeira parte: pensar Deus. *In*: ALES BELLO, A. *Edmund Husserl*: pensar Deus, crer Deus. São Paulo: Paulus, 2016. p. 1-100.

AZZI, R. *A arte e a educação em Platão e Schiller*. 2011. Dissertação (Mestrado em Estética e Filosofia da Arte) – Instituto de Filosofia, Artes e Cultura, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2426/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_ArteEduca%C3%A7%C3%A3oPlat%C3%A3o.pdf. Acesso em: 11 abr. 2021.

BICUDO, M.A.V; SILVA, A.A. Análise de descrições de vivências em situações de constituição de conhecimento. *In*: BRANDÃO, C. *et al.* (org.). *A prática na investigação qualitativa*: exemplos de estudos. Aveiro: Ludomedia, 2018. p. 153-178.

BICUDO, M. A. V. The origin of number and the origin of geometry: issues raised and conceptions assumed by Edmund Husserl. *Revista Pesquisa Qualitativa*, São Paulo, v. 8, n. 18, p. 387-418, ed. especial. 2020a.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Fenomenológica em Educação: possibilidades e desafios. *Revista Paradigma*, Maracay, v. XLI, p. 30-56, jun. 2020b.

BUTTINGSRUD, C. *Embodied Reflection*. California: California Digital Library, 2017.

BROLEZZI, A. C.; OTA, I. N. N. Arte, Educação Matemática e Empatia: algumas reflexões. *REVEMAT*, Florianópolis, v.13, n.2, p.228-249, 2018.

CIFUENTES, J. C. O “salto arquimediano”: um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático. *Scientiae Studia*, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 645-67, 2011.

CLARETO, S. M. Entre maças e números: a sala de aula de matemática, políticas cognitivas e educação matemática. *Horizontes*, Itatiba, v. 31, n. 1, p. 63-70, jan./jun. 2013.

FALCÓN, L. A. El régimen de phantasia y la experiencia estética em Merleau-Ponty. *Eikasia. Revista de Filosofía*, [*s.l.*], año IV, v. 21, p. 83-106, nov. 2008.

FARINA, C.; ALBERNAZ, R. M. Professor de matemática: saber em formação movente. *R. Inter. Interdisc. INTERthesis*, Florianópolis, v.7, n.1, p. 302-323, jan./jul. 2010.

FERRATER MORA, J. *Dicionário de Filosofia*. Buenos Aires: Suramericana, 1994.

FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O. Produzindo problemas abertos utilizando tecnologias digitais no processo de formação inicial de professores de matemática. *REnCiMa*, São Paulo, v.8, n.2, p.95-114, 2017.

FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O. Design de problemas na formação inicial de professores para a (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais. *Unión*, [*s.l.*], n. 56, p. 47-66, ago. 2019.

GADANIDIS, G.; HOOGLAND, C. The Aesthetic in Mathematics as Story. *Journal of Science*, Canadian, v. 3, n. 4, p. 487-498, oct. 2003.

GADANIDIS, G.; NAMUKASA, I.; MOGHADDAM, A. Matemática-para-professores Online: facilitando mudanças conceituais nas visões sobre matemática de professores do ensino elementar. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 21, n. 29, p. 131-155, 2008.

GADANIDIS, G. *et al*. Designing aesthetic experiences for young mathematicians: a model for mathematics education reform. *RIPEM*, [*s.l.*], v. 6, n. 2, p. 225-244, 2016.

GUSMÃO, L. D.; FRANCO, V. S.; CIFUENTES, J. C. A Imaginação e a Intuição na Dinâmica do Conhecimento Matemático: subsídios para uma pesquisa epistemológica e pedagógica. *Perspectiva da Educação Matemática*, Mato Grosso do Sul, v. 10, n. 22, p. 366-387, 2017.

HEIDEGGER, M. *Poetry, Language, Thought*. (translation and Introduction by Albert Hofstadter): New York: Harper &Row, Publishers, 1971.

HUSSERL, E. *The Crisis of Europe en sciences and transcendental phenomenology*. Evanston: Northwesternon University Press., 1970.

HUSSERL, E. *Cartesian Meditations*: An Introdution to Phenomenology. Tradução de Dorian Cairns. Sétima impressão. MARTINUS NIJHOFF PUBLISHERS: 1982.

HUSSERL, E. *Idee per una Fenomenologia pura e per uma filosofia fenomenológica*. Volume II. Tradução de Enrico Filippini. Torino: Einaudi, 2002.

HUSSERL, E. *Ideias para uma Fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica*: introdução geral à fenomenologia pura/Edmund Husserl. 5. ed. Tradução de Marcio Suzuki. Cidade da editora: Aparecida Ideias & Letras, 2006.

HUSSERL, E. *Il bambino. La genesi del sentire e del coscere l'altro* (traduzione, prefazione, analisi del texto e commento di Angela Ales Bello). Roma: Fattore Umano Edizioni, 2019.

LUCAS, G. A. de.; ROSITO, M. M. B. Experiência estética e educação matemática: reflexões sobre a formação docente. *Revista @mbienteeducação*, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 163-179, jan./abr. 2018.

MARTINS, D. S.; GALIAZZI, M. DO. C.; LIMA, C. A. de. O ensino de matemática para cegos no município do Rio Grande. *Revista Pesquisa Qualitativa*, São Paulo, v.8, n.19, p. 889-918, dez. 2020.

MARTINS, J. *Um enfoque fenomenológico do currículo*: educação como poíesis. Organização do texto: Vitoria Helena Cunha Espósito. São Paulo: Cortez, 1992.

MERLEAU-PONTY, M. "*O olho e o espírito*". [s.*l.*]: Cosac & Naify, 2013.

POIESIS. *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2020. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Poiesis. Acesso em: 14 mar. 2021.

ROSA, M.; PAZUCH, V. Contribuições ao Design Instrucional e à Cyberformação por meio do Feedback de Estudantes sobre HQs Matemáticas Interativas. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 16, n. 4, p. 138-160, ed. especial. 2014.

SABBA, C. G. Fazendo Arte na Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Costa Rica, Año 11, n. 15, p 271-288, 2016.

SANTOS, A.; LOPEZ BELLO, S. E. Vivências Etnomatemaéticas: linguagem, escrita e ficções de si. *Revista Panorâmica*, [*s.l.*], v. 28, p. 12-27, jul./dez. 2019.

SILVA, R. S.; GAUTÉRIO, V. L. B. Práticas Multidisciplinares: atividades lúdicas e tecnologia digital aliada ao estudo de artes e geometria. *Relacult*: Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade, Foz do Iguaçu, v. 5, p. 1-13, abr. 2019. Disponível em: https://periodicos.claec.org/index.php/relacult/article/view/1253. Acesso em: 10 abr. 2021.

ABREU DA SILVEIRA, M. R.; TEIXEIRA JUNIOR, V. P. Educação Matemática, linguagem e arte: a apreciação da matemática pela compreensão de suas regras. *Revista Reflexão e Ação*, Santa Cruz do Sul, v.23, n.1, p.204-220, jan./jun.2015.

SPM. Sociedade Portuguesa de Matemática. *Frase do matemático e filósofo inglês Bertrand Russell*, 2015. Disponível em: https://www.spm.pt/news/4209. Acesso em: 10 abr. 2021.

TONÉIS, C. N.; PETRY, L. C. Experiências matemáticas no contexto de jogos eletrônicos. *Ciências & Cognição*, [*s.l.*], v. 13, n. 3, p. 300-317, dez. 2008.

VICENTE, V. Estética e pensamento em Merleau-Ponty, ou: sobre o sensível e seus rebentos. *Revista Sísifo*, [*s.l.*], v. 1, n. 6, p. 142-152, nov. 2017.

WEISSHEIMER, R. F.; MONTOITO, R. Literatura infantil e geometria: conexões possíveis mapeadas pelo estado do conhecimento. *Research, Society and Development*, [*s.l.*], v. 9, n. 9, e245997178, 2020.

Capítulo 2

Sobre a Estética e a Resolução de Problemas: a Beleza Matemática, o Raciocínio Heurístico e a Compreensão dos Objetos e Processos Matemáticos

Carla Marilla Caldeirani Lino
Daniela Zanardo Rossetto
Giovana Aparecida Bertolucci
Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

> *Chaque être crie en silence pour être lu autrement.*
> Cada ser grita em silêncio para ser lido de outra forma.
> Simone Weil (1909 – 1943), *La pesanteur et la grâce* (1947)

É possível identificar a beleza na Matemática em incontáveis dimensões: nos processos de raciocínio desenvolvidos nas investigações, na aplicabilidade para resolução de problemas cotidianos e nos objetos matemáticos, como figuras geométricas, fractais, entre outros. Desse modo, não é difícil conceber como bela uma ciência tão vasta e multifacetada.

Muitos matemáticos trazem suas concepções de análise estética para diferentes áreas ou produtos da Matemática. Breitenbach (2013), por exemplo, buscou a ideia de beleza na Matemática a partir das concepções de Immanuel Kant (1724 – 1804). Constatou que, para o filósofo, objetos matemáticos como definições e teoremas possuem a finalidade formal e objetiva de resolver problemas, mesmo que a intencionalidade do seu desenvolvimento não tenha sido essa, uma vez que a relação entre os objetos matemáticos culmina em suas finalidades.

Por isso, a autora interpreta que Kant concebe que os objetos matemáticos não são passíveis de análise estética. É possível analisar sua funcionalidade, ou seja, afirmações cognitivas e conceituais ligadas a uma perfeição relativa de acordo com suas aplicações, mas não à beleza. Os objetos matemáticos são comumente apreciados por apresentarem inesperadas utilidades, pela harmonia na condução dos propósitos. Breitenbach (2013) identifica que esse tipo de apreciação, segundo Kant, não é estética porque considera aspectos racionais, e não subjetivos. Para o filósofo, de acordo com Breitenbach (2013), a experiência da beleza deve ser subjetiva, independente da intencionalidade, ligada à harmonia em que é possibilitada a cognição.

A beleza, portanto, se refere à compreensão do admirador, sendo subjetiva na medida em que depende de quem aprecia, mas intencional para ele, uma vez que ele deve compreender o sentido do que é admirado. Assim, a autora destaca que é necessário não confundir prazer intelectual (utilidade dos objetos matemáticos) com prazer estético (capacidade de cognição causada pela apreciação).

Breitenbach (2013) depreende que nessa filosofia as provas matemáticas são bases para a cognição, já que possuem natureza intuitiva e estão ligadas à essência do objeto matemático, e não à sua utilização, estimulando o raciocínio do observador. A beleza resulta, portanto, da "surpresa" pela construção de objetos matemáticos por meio da intuição, da ampliação do conhecimento sobre esses objetos e suas relações com os demais e pela compreensão conceitual desses objetos (representações sensíveis).

Assim, para Kant as provas matemáticas inspiram admiração pelos processos cognitivos envolvidos, e por isso são passíveis de análise estética. Para Breitenbach (2013), a resposta estética advém da atividade imaginativa e não conceitual envolvida na demonstração[1], ou seja, as provas proporcionam entendimento, estimulam a imaginação para sua

[1] Neste trabalho estamos considerando demonstração e prova como sinônimos.

compreensão, gerando satisfação na busca por conceitos sem ter finalidade na produção deles.

Nessa concepção, a admiração estética está diretamente ligada à capacidade intuitiva e intelectual de compreensão e imaginação, mas o julgamento é estético e não conceitual. Para Breitenbach (2013), a articulação de conhecimentos que auxilia nas inferências em cada etapa de uma prova é guiada pela intuição e leva à cognição por meio da imaginação requerida nesse processo. Daí advém o prazer estético nas demonstrações matemáticas: uma resposta subjetiva à conexão entre a imaginação e a compreensão – e não apenas o direcionamento para resolução de problemas, como nos objetos matemáticos.

O matemático e filósofo Rota (1997) também investigou diferentes ideias ligadas à apreciação estética de demonstrações matemáticas. Considera as provas e teorias como as mais comumente apreciadas, sendo geralmente consideradas belas de acordo com sua objetividade. Declara que axiomas curtos também são considerados belos e que definições não são apreciadas com tanta frequência. Para o autor, a beleza na Matemática independe de elementos surpresa e exposições extremamente rigorosas, estando mais relacionada ao contexto – padrões de rigor e relevância.

A apreciação matemática, para o autor, requer familiaridade com a teoria, que é desenvolvida com o tempo e não pode ser ensinada ou treinada. Isso porque não se trata da finalidade maior das pesquisas e nem do ensino, podendo aparecer no trabalho do matemático de forma imprevisível. Mas Rota (1997) é claro ao afirmar que a "falta" de beleza matemática se relaciona à falta de aperfeiçoamento de um trabalho.

Ainda no que se refere à apreciação da beleza matemática de demonstrações, o autor reitera que é necessário compreender a prova desde seu contexto de desenvolvimento e as dificuldades nesse processo. Observa ainda que a verdade de uma asserção nem sempre garante a sua clareza, e é a clareza que mantém viva a busca na Matemática.

Rota (1997) conclui que a beleza matemática está ligada ao esclarecimento que ela proporciona: um teorema é belo quando é perceptível o modo como ele se conecta no restante da teoria e como é compreensível; uma prova é bela quando desvenda e explica o teorema.

Concluímos que, tanto para Rota (1997), quanto para Breitenbach (2013), a beleza matemática se sobressai quando se trata de demonstrações matemáticas. Essa beleza consiste, de forma subjetiva, na capacidade de compreensão que é fornecida pela prova, sendo diretamente proporcional à iluminação gerada por ela.

Paterson (2013) é mais objetiva nessa análise ao identificar propriedades que ampliam ou restringem certas funções cognitivas proporcionadas por uma demonstração que podem auxiliar a prever e compreender reações estéticas positivas e negativas perante a prova. Para a autora, são as funcionalidades da demonstração na Matemática que levam à percepção estética sobre ela.

Ela ressalta que é necessário distinguir a demonstração em si de suas apresentações, uma vez que a beleza matemática está relacionada com o conteúdo desenvolvido e não com o estilo que é apresentado. De fato, de acordo com Paterson (2013), as propriedades estilísticas, quando alteradas, não exigem alterações em nível de argumentação, o que não ocorre com as propriedades relacionadas ao conteúdo, uma vez que constituem a identidade da prova.

Para uma apreciação estética das demonstrações matemáticas é necessário observar, em consonância com a autora, propriedades matemáticas estruturais (forma: número de hipóteses, casos, simetria de argumentos...), cognitivas (possibilidade de compreensão, oferecimento de visualizações, nível de intuição exigido, complexidade...) e metodológicas (tipos de argumento, rigor, padrões, pureza de métodos...).

No tocante às funções cognitivas proporcionadas pelas demonstrações, Paterson (2013) destaca:

1. Verificação e certificação: consiste em justificar e estabelecer a veracidade de um teorema, permitindo sua aplicação. Para essas funções, os indicadores positivos são o cumprimento de expectativas, utilização de métodos logicamente válidos, e pureza de métodos. Já os indicadores negativos estão relacionados ao tamanho e à complexidade (geram desconfiança, pois podem esconder erros), e a recorrência a teoremas inesperados.
2. Unificação e conexão: esclarecimento de uma área de estudo e contextualização do resultado demonstrado, expondo relações que validam (ou não) o uso de axiomas e conjecturas. Os indicadores positivos para essas funções são a explicitação detalhada de estruturas, mistura de métodos e possíveis generalizações (usos do resultado em outros contextos). Enquanto isso, um indicador negativo para essa função é a pureza de métodos.
3. Explicação: é uma das principais funções atribuídas às demonstrações. Os indicadores positivos são a validação do teorema, a contribuição para a compreensão (simplicidade, visualizações), analogias, simetrias de casos, entre outros. Já o tamanho, complexidade e a simplicidade exacerbada (informações podem ser ocultadas, nesse caso) inibem essa função, por isso são considerados indicadores negativos.
4. Convencimento: validação do resultado. O uso de estrutura lógica e métodos conhecidos e visualizações que facilitam o entendimento geram um senso de confiança, por isso são considerados indicadores positivos. Já argumentos que não proporcionam compreensão de dúvidas iniciais ou que geram questionamento sobre métodos ou axiomas e conjecturas, por exemplo, são indicadores negativos para essa função.
5. Ser ferramenta de construção: adaptação ou introdução de novos métodos, teorias ou padrões de raciocínio. Os indicadores positivos para essa função são as novas técnicas ou extensões de antigas. Já a familiaridade é um indicador negativo, mesmo entrando em conflito estético com a função de convencimento.

Paterson (2013) reconhece que preferências estáveis por certa demonstração provêm da importância dos indicadores (positivos ou negativos) ao longo do tempo ou das várias funções dessa prova. Salienta também, assim como Breitenbach (2013), que indivíduos buscam por funções específicas, e que a estética evidencia suas visões filosóficas sobre demonstrações, mostrando também padrões de rigor e prática.

Por fim, a autora declara que a ideia de uma análise estética por meio do funcionalismo mostra também diferenças de práticas, experiências e pontos de vista filosóficos. De fato, quando o julgamento estético é formulado por meio das funções de uma prova matemática, é revelada também a maneira como o apreciador utiliza as demonstrações, e é isso que direciona sua percepção estética. Para Paterson (2013), esses são os juízos intuitivos, ou seja, a sensibilidade estética voltada ao que é considerado como sucesso.

Desse modo, Paterson (2013) afirma, assim como Rota (1997), que para realizar uma análise estética é necessária familiaridade com a Matemática, ou seja, compreensão do conteúdo, de seus usos e do contexto matemático mais amplo.

Para uma avaliação estética, conforme Scucuglia *et al.* (2020), é importante conhecermos a diferença entre produtos e processos. Em Matemática, os produtos são os teoremas, as fórmulas e as construções geométricas, ao passo que os processos são as ferramentas matemáticas, ou seja, as demonstrações, os processos heurísticos, os estilos de escrita, etc. Dessa forma, a resolução de um problema ou a demonstração de um teorema são processos, ao passo que um problema ou um teorema são produtos e, em consequência, comparáveis a uma obra de arte, quando considerados como artefatos que são apresentados a uma comunidade e que podem ser apreciados esteticamente sem a necessidade de se fazer referência às suas propriedades e características matemáticas: “triângulos, espirais, fractais, como o conjunto de Mandelbrot e até representações gráficas de funções como a de Weierstrass, podem ser vistas esteticamente sem qualquer aptidão matemática ou conhecimento de qualquer natureza. Nesses casos, não parece haver uma estética especificamente matemática em ação." (PATERSON, 2013, p. 79). Por outro lado, a apreciação estética dos processos depende do conhecimento matemático.

Em relação ao que é considerado belo em Matemática, conforme assinalado por Cellucci (2015), há duas perspectivas diferentes. A primeira, que remonta à Antiguidade, é que a beleza matemática reside nas propriedades intrínsecas de certas entidades matemáticas e, em consequência, não depende da avaliação de quem as observa e nem de um período da história. A segunda perspectiva, propagada na idade moderna e contemporânea, defende que a beleza matemática é uma projeção de quem observa as entidades matemáticas. Dessa forma, quando as entidades matemáticas exibem propriedades que são avaliadas pelos critérios estéticos de quem as observa, tais propriedades serão chamadas de propriedades estéticas e o observador projeta beleza nessas entidades matemáticas e irá descrevê-las como belas. Nessa perspectiva, a beleza matemática depende do observador e do período da história.

A Arte de Resolver Problemas

Frequentemente as pessoas se deparam com problemas em seu cotidiano. Como consequência, o ato de tentar resolver os desafios encontrados está enraizado na história da humanidade. A História nos mostra, desde os primeiros registros, que o ser humano tem desenvolvido estratégias para resolver os seus problemas (BALIEIRO, 2017).

No nosso cotidiano surgem situações que demandam a criação de novas estratégias para a sua solução, já que todo o arcabouço de experiências vividas não fornece uma solução adequada para tais situações. Conforme

Puchkin (1969), essas situações são normalmente chamadas de problemas e o processo mental e psicológico que nos auxilia na elaboração de uma nova estratégia para a solução dos problemas é chamado de pensamento criador ou, de acordo com a terminologia herdada dos trabalhos de Arquimedes (287 – 212 A.E.C.[2]), atividade heurística.

O termo heurístico é de origem grega, cujo sentido é "encontrar, descobrir, inventar". Heurística, que o dicionário português (FERREIRA, 1997, p. 1049) diz ser "um conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas", vem da expressão grega, isto é, a arte relativa à descoberta e à invenção.

Já a heurística moderna, como aponta Polya (1995), busca compreender os processos utilizados na resolução de problemas, com ênfase nas operações mentais, investigando as suas bases lógicas e psicológicas. Nessa perspectiva, o autor assinala que a base da heurística está na experiência em resolver problemas e na experiência em observar essa atividade e, nesse processo, a heurística pode contribuir para o ensino, em especial, de Matemática, ao buscar uma compreensão ampla e abrangente das operações mentais úteis na resolução de problemas.

O matemático húngaro George Polya (1887 – 1985) foi um dos pioneiros na pesquisa sobre esse tema e exerceu influência significativa no que diz respeito ao surgimento desse novo campo de pesquisa em Educação Matemática. Partindo do pressuposto que a resolução de problemas proporciona ao aluno a oportunidade de exercitar seu pensamento ao construir estratégias de resolução e argumentação, ele buscou entender quais processos cognitivos estão envolvidos no raciocínio que é utilizado ao longo do processo de resolução de um problema.

---

[2] A.E.C. é a abreviação do termo "Antes da Era Comum". Atualmente, os historiadores e os antropólogos têm optado pelo uso de Era Comum no lugar de Era Cristã, evitando referência a uma religião particular.

Polya explica e discute o processo heurístico e os elementos que dele fazem parte por intermédio de um dicionário de heurística elaborado por ele. O dicionário é denominado *Pequeno Dicionário de Heurística*, possui sessenta e sete artigos, com significado e fundamentos de cada um deles e faz parte do Capítulo 3 do livro *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, traduzido para o português, em 1994, com o título *A arte de resolver problemas*.

Analogia, condicionamento, diagnóstico, indução, decomposição, recombinação e a própria heurística, são alguns dos verbetes presentes no dicionário. Entre os verbetes, o *Raciocínio heurístico,* de acordo com o dicionário de Polya (1995), é provisório e plausível e tem como meta a descoberta da solução para um problema que se quer resolver.

Dentre as publicações de Polya relacionadas com aspectos inerentes ao processo heurístico, destacam-se além de *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, as obras *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954) e *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (1962). De acordo com Rossetto (2018), encontramos nessas obras uma lista de indagações e sugestões que, passo a passo, buscam orientar de que forma podemos encontrar a solução de um problema, além de discutir as atividades que envolvem a resolução de problemas.

A divisão do processo de resolução de um problema em etapas foi proposta por ele e é uma de suas concepções mais conhecidas e propagadas a respeito desse assunto. De acordo com Polya (1995), a resolução de um problema pode ser dividida em quatro fases, que são: compreensão do problema; estabelecimento de um plano de resolução; execução do plano; retrospecto da resolução completa.

A busca pela compreensão do que está sendo proposto deve conduzir o aluno a fazer uma análise do problema como um todo. É preciso encontrar quais são os dados, o que é desconhecido e quais são as condições estabelecidas.

A elaboração de um plano de resolução envolve a tradução para a linguagem matemática do que foi dado em forma de texto, assim, é preciso identificar a relação existente entre as informações dadas e as incógnitas presentes a partir da compreensão do enunciado do problema. Para facilitar seu trabalho ao elaborar estratégias para obter a solução, o aluno pode pensar em problemas semelhantes que ele já tenha resolvido ou ainda buscar resultados que possam ser úteis na resolução, estabelecendo associações.

É preciso verificar se cada uma das etapas de solução está sendo realizada corretamente durante a execução do plano traçado, pois essa análise facilita a descoberta de um erro cometido em determinado estágio do processo de resolução, evitando que haja interferência na solução final encontrada.

O retrospecto da resolução completa é uma etapa importante para a aprendizagem do aluno, pois nessa fase é possível examinar se, de fato, aquela é uma solução válida para o problema proposto, além disso, nessa retrospectiva é possível verificar se existem maneiras diferentes de obter a mesma solução. Nessa etapa, o professor deve conduzir o aluno a entender que esse conjunto de estratégias pode ser utilizado como um mecanismo para resolver problemas semelhantes, posteriormente. Além disso, conforme Polya (1995), o educador deve compreender e transmitir a ideia de que problema algum fica completamente esgotado, ou seja, é possível aprimorar os resultados encontrados com muito estudo e aprofundamento e também aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução encontrada.

De acordo com Marco (2004), as concepções de Polya provocaram mudanças neste campo de pesquisa que desencadearam uma reelaboração acerca das possibilidades teórico-metodológicas de resolução de problemas por educadores matemáticos, com uma ampliação e reestruturação de suas interpretações a respeito do assunto.

Para Kilpatrick (1987), a contribuição de George Polya no campo da Educação Matemática ocorreu da maneira mais óbvia por meio de suas ideias sobre como os problemas podem ser resolvidos. De acordo com esse autor, "resolução de problemas" tornou-se a palavra de ordem entre os educadores matemáticos modernos e a lista de perguntas e sugestões que ele apresentou foi transformada em um conjunto de estratégias de resolução de problemas.

Atualmente, a resolução de problemas é uma metodologia de ensino que conduz o processo de ensino-aprendizagem-avaliação utilizando situações-problemas como eixo principal. Diversos estudos apresentados no campo da Educação Matemática, como, por exemplo, Marco (2004) e Rossetto e Balieiro (2021), enfatizam que além de proporcionar a aprendizagem de conceitos e habilidades, a resolução de problemas é uma estratégia didática importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, por oferecer aos educandos possibilidades de desenvolver sua autonomia e a capacidade de persistência, pois possibilita a participação ativa do aluno no processo de construção de novos conhecimentos matemáticos e favorece o desenvolvimento de habilidades tais como a capacidade de argumentar, comunicarem ideias, tomar decisões, investigar e compreender situações.

Entretanto, como enfatizado por Polya, para compreendermos os processos heurísticos envolvidos na atividade de resolver um problema ou demonstrar um teorema é necessário também que observemos essa atividade. Nesse contexto, a resolução de problemas possibilita, por meio de uma análise estética, percebermos por meio dos sentidos os processos envolvidos no raciocínio heurístico e construirmos um conhecimento sensível sobre a arte de resolver problemas.

A arte nas diferentes formas de resolver um problema: o caso do Teorema de Pitágoras

Uma demonstração é o raciocínio que fazemos para assegurar a verdade contida num teorema. A escrita da demonstração é a comunicação desse raciocínio por meio de uma linguagem matemática que é regida por procedimentos ordenados. Conforme Abbagnano (2007), ainda hoje, a arte significa qualquer tipo de atividade ordenada (procedimento, técnica) e "técnica é, por isso, a palavra que dá continuidade ao significado original (platônico) do termo arte. Por outro lado, os problemas relativos às belas artes e a seu objeto específico cabem hoje ao domínio da *estética*." (ABBAGNANO, 2007, p. 82). Dessa maneira, uma demonstração é uma forma de arte e sua beleza reside na capacidade de compreensão que é fornecida por essa demonstração.

O Teorema de Pitágoras é um dos mais importantes e conhecidos teoremas na Matemática. Desde a antiguidade, muitos estudiosos têm se ocupado e se dedicado a ele. O Teorema de Pitágoras tem várias aplicações em muitas áreas da Matemática, em especial, na Matemática Elementar, em disciplinas como Geometria Plana e Espacial, Trigonometria Plana, Geometria Analítica Plana e Espacial, e, além disso, em atividades práticas como a agrimensura, arquitetura, edificações, física, urbanização, entre outras áreas.

Atualmente, existem mais de 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, demonstradas ao longo de 4000 anos de História da Matemática, por filósofos, geômetras, astrônomos, matemáticos e personagens notáveis de algumas áreas do conhecimento. No livro *The Pythagorean Proposition* (1940), Elisha Scott Loomis (1852 – 1940) reuniu um total de 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Considerando que a demonstração do Teorema de Pitágoras é um problema que é proposto aos alunos da disciplina Geometria Euclidiana dos cursos de Graduação em Matemática, mas que também pode ser proposto aos alunos desde o nono ano do nível fundamental da Educação Básica e, além disso, levando em conta as diferentes e variadas formas de se demonstrar o Teorema de Pitágoras, apresentamos aqui cinco diferentes resoluções desse problema para apreciação estética.

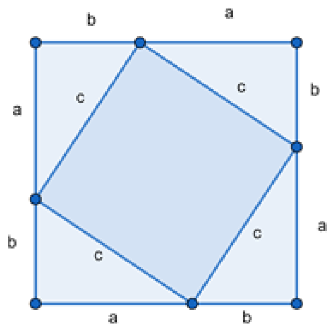
O enunciado do Teorema de Pitágoras como o conhecemos atualmente ou como é apresentado em alguns livros didáticos é escrito, em geral, da seguinte forma: "Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos". Em outras palavras, pode-se enunciar o Teorema de Pitágoras do seguinte modo: se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, aquele enunciado do teorema equivale a afirmar que: $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração atribuída a Pitágoras

A História da Matemática nos mostra que o Teorema de Pitágoras já era conhecido por babilônios, egípcios e chineses, que o utilizavam na resolução de problemas práticos de suas sociedades (KATZ, 2009). Ainda que o teorema fosse conhecido séculos antes de Pitágoras, ele pode ter sido o primeiro a mostrar essa relação existente em um triângulo retângulo, por isso teve seu nome associado a ele. A prova atribuída a Pitágoras é denominada de demonstração por rearranjo ou dissecação. O fato de Pitágoras ter elaborado esta prova é inferido por meio dos escritos do filósofo Proclus (411 – 485), conforme aponta Maor (2007).

Considere um quadrado de lado $a + b$ (Figura 1).

Figura 1 – Ilustração da Demonstração de Pitágoras

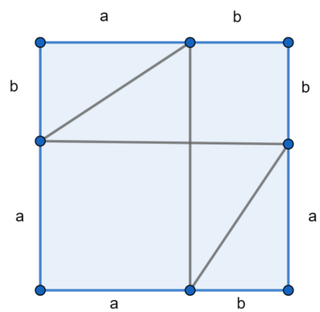


Fonte: Elaborada pelos autores.

Conecte os pontos que dividem os segmentos a e b de cada lado do quadrado maior para formar um quadrado inclinado e denomine seu lado c. O quadrado original é assim dissecado em cinco partes – quatro triângulos retângulos congruentes cujos catetos têm medidas a e b, e a hipotenusa com medida c, e um quadrado interno cujo lado tem medida c.

Agora considere a dissecação mostrada na Figura 2. Nesse caso, o quadrado original é dissecado em seis partes – um quadrado cuja medida do lado é a, um quadrado cuja medida do lado é b e quatro triângulos retângulos de catetos com medidas a e b.

Figura 2 – Dissecção



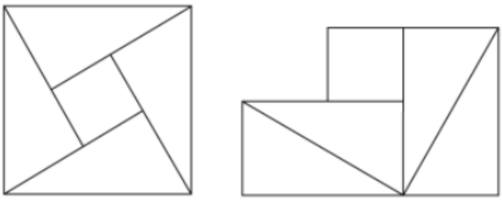
Fonte: Elaborada pelos autores.

Comparando as áreas das duas figuras (Figura 1 e Figura 2), temos $4\frac{ab}{2} + c^2 = 4\frac{ab}{2} + a^2 + b^2$. Logo, dessa expressão, obtemos $c^2 = a^2 + b^2$.

Demonstração de Bhaskara II

O conhecido matemático indiano Bhaskara II (1114 – 1185) ou Bhaskaracharya (Bhaskara – o mestre) trata-se de uma das figuras mais importantes dentre os matemáticos do século XII, e é creditada a ele, uma das mais famosas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Para a demonstração considere a ilustração da Figura 3.

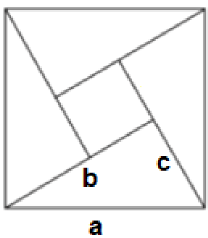
Figura 3 – Ilustração da Demonstração de Bhaskara II



Fonte: Elaborada pelos autores.

Analisando a imagem e aplicando conceitos de álgebra, é possível obter uma demonstração simples do teorema. Vamos nomear as medidas dos lados do triângulo retângulo, com a, b e c, assim como na Figura 4 abaixo.

Figura 4 – Ilustração com indicação dos lados



Fonte: Elaborada pelos autores.

Observe que sobre os lados do quadrado de medida a são construídos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas b e c. Analise também que no interior do quadrado de lado a, no centro, aparece um quadrado cuja medida do lado é $b - c$**.** Assim, a área do quadrado maior pode ser representada pela seguinte relação:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4\,\frac{bc}{2} \qquad (1)$$

Desenvolvendo (1),

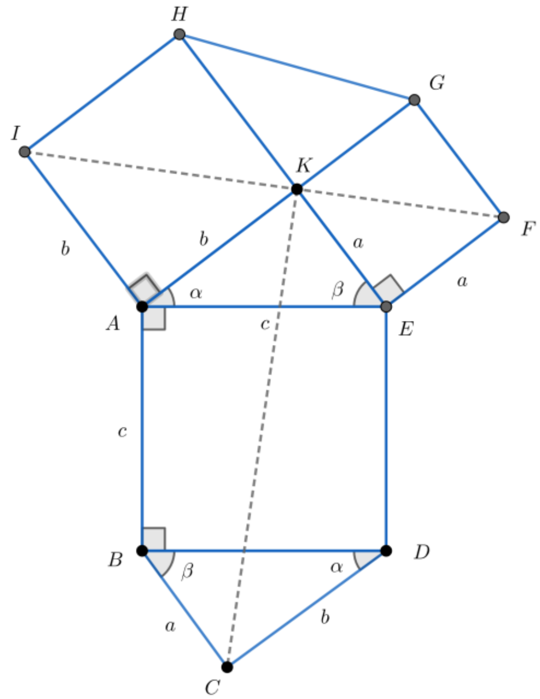
$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Concluindo, assim, a demonstração a partir da construção de Bhaskara.

Demonstração de Leonardo Da Vinci

Leonardo da Vinci (1452 – 1519) foi um pintor e escultor italiano, considerado um dos maiores gênios da humanidade. Criador de obras como o quadro *Mona Lisa, A Última Ceia* e o *Homem Vitruviano*, Da Vinci também apresentou uma demonstração do Teorema de Pitágoras (MAOR, 2007), que foi construída a partir da comparação entre áreas e é ilustrada na Figura 5.

Figura 5 – Ilustração da Demonstração de Leonardo da Vinci



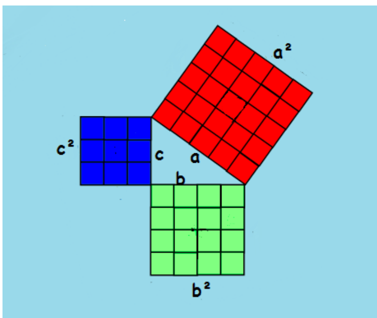
Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura 5, considere o triângulo retângulo AKE e construa os quadrados $EFGK$ sobre o cateto EK com medida a, $AKHI$ sobre o cateto AK com medida b e $ABDE$ sobre o cateto AE com medida c. Em seguida, construa sobre o lado BD do quadrado $ABDE$ o triângulo retângulo BCD congruente ao triângulo retângulo AKE. Agora, temos o hexágono $ABCDEK$, que dividiremos ao meio pelo segmento de reta (tracejado) KC. Em continuação, pelos pontos G e H trace um segmento de reta para construirmos o hexágono $AEFGHI$, que dividiremos ao meio pelo segmento de reta (tracejado) IF. Em seguida, observe que o triângulo retângulo AKE é congruente ao triângulo retângulo HKG. Note que os triângulos retângulos KEF e FGK são congruentes. Os triângulos retângulos IAK e KHI também são congruentes. Assim, podemos concluir que os pontos I, K e F são colineares, já que os triângulos AKE e HKG também são congruentes. Observe também que os quadriláteros $KABC$ de lados com medida b, a, c e $\overline{CK}$) e $IAEF$ (de lados b, c, a e $\overline{FI}$) são congruentes e têm a mesma área. Assim, concluímos que os hexágonos $ABCDEK$ e $AEFGHI$ também têm a mesma área. Do hexágono $ABCDEK$ subtraia os triângulos retângulos congruentes AKE e BCD e do hexágono $AEFGHI$ subtraia os triângulos retângulos congruentes AKE e HKG. Logo, a área do quadrado $ABDE$ é igual à soma das áreas dos quadrados $AKHI$ e $EFGK$. Portanto, considerando respectivamente as medidas dos lados desses quadrados, temos $c^2 = b^2 + a^2$.

Demonstração por Quadriculados

Construindo um triângulo retângulo de catetos com medidas b e c, e de hipotenusa com medida a, compondo quadrados sobre a hipotenusa e sobre os catetos e fazendo quadriculados em cada quadrado obtido sobre os lados desse triângulo retângulo, é possível verificar a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, conforme indicado na Figura 6.

Figura 6 – Ilustração da Demonstração por Quadriculados

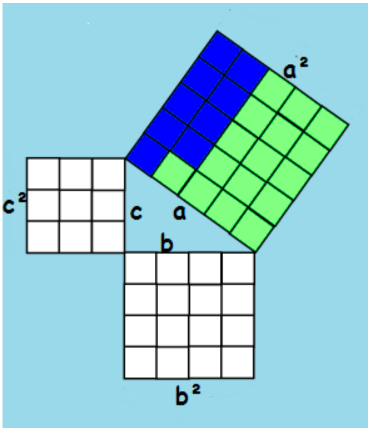


Fonte: Lino (2019, p. 34).

Ao completarmos o quadrado de lado com medida a com os quadriculados dos quadrados de lados com medidas b e c, obtemos a relação

$a^2 = b^2 + c^2$, mostrando então que a soma das áreas dos quadrados formados pelos catetos de medidas b e c é igual à área do quadrado formado pela hipotenusa de medida a de um triângulo retângulo, como na Figura 7 abaixo:

Figura 7 – Ilustração da Demonstração por Quadriculados



Fonte: Lino (2019, p. 34).

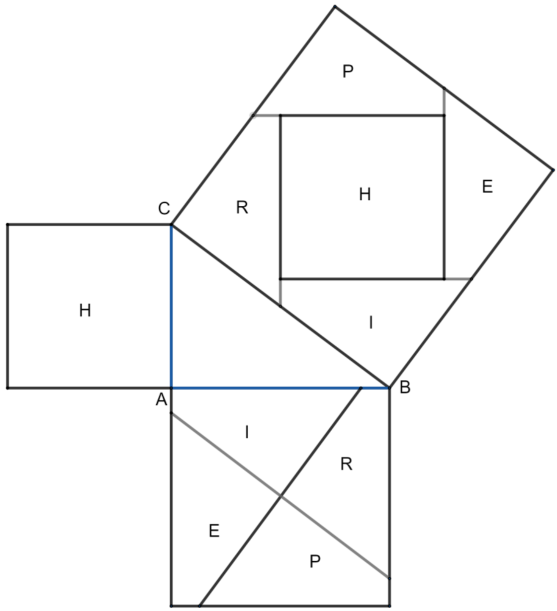
Demonstração de Perigal

Henry Perigal (1801 – 1898) foi um corretor da bolsa de valores britânica e um matemático amador. Ele ficou conhecido na Matemática por sua demonstração do Teorema de Pitágoras mediante dissecação.

Para sua demonstração, Perigal disseca (decompõe) o quadrado construído sobre o maior cateto do triângulo retângulo por dois segmentos de retas que se intersectam no centro desse quadrado, um segmento de reta paralela e outro segmento de reta perpendicular à hipotenusa do triângulo retângulo, dividindo esse quadrado em quatro quadriláteros convexos congruentes.

Esses quatro quadriláteros convexos e mais o quadrado construído sobre o cateto menor do triângulo retângulo, compõem todo o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo. Essa demonstração visual mediante a decomposição e recomposição ficou conhecida com *dissecção de Perigal.*

Figura 8 – Ilustração da Demonstração de Perigal



Fonte: Adaptado de Perigal (1873, p. 104).

Por meio da Figura 8 considere o triângulo ABC retângulo em A, o quadrado desenhado sobre o cateto de lado $\overline{AB}$ que foi dividido em quatro quadriláteros congruentes (P, E, R e I) e o quadrado H desenhado sobre o cateto de lado $\overline{AC}$. Pela construção de Perigal sabemos que os quadriláteros (P, E, R e I) e o quadrado H sobre o cateto de lado $\overline{AC}$ totalizam juntos a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de lado $\overline{BC}$.

Ao considerarmos os quadriláteros congruentes que compõem o quadrado construído sobre o cateto de lado $\overline{AB}$, que possuem dois ângulos retos opostos; e usando o fato de que um dos segmentos de reta que passa pelo centro do quadrado construído sobre o lado $\overline{AB}$ é paralelo à hipotenusa $\overline{BC}$, conseguimos provar que a figura obtida que está no centro do quadrado construído sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ é um quadrado congruente ao construído sobre o cateto de lado $\overline{AC}$. Portanto, é possível demonstrar o Teorema de Pitágoras utilizando a construção de Henry Perigal.

Algumas Reflexões Finais

Na metodologia de resolução de problemas estão presentes certos elementos que fazem parte de processos heurísticos argumentativos (intuição, analogia, indução, análise, síntese, refutação, dedução, etc.) e que possibilitam, ao final desse procedimento, uma construção de uma demonstração organizada, lógica e rigorosa.

Ao resolver problemas práticos ou teóricos, podemos observar o desenvolvimento de métodos experimentais, intuitivos, analógicos e indutivos. Dessa forma, a atividade de resolver problemas e de demonstrar teoremas é constituída por aspectos formais, mas tais atividades também se constituem como uma atividade social, negociada em comunidade.

Um dos aspectos dessa dimensão social é o estilo, que é definido como qualquer forma específica de utilizar a linguagem e que é característico de um autor, escola, período, gênero ou qualquer outro atributo linguístico.

No transcorrer da História da Matemática, diferentes formas de linguagem e estilos de escrita surgem nas diferentes sociedades para exibir as ideias presentes na resolução de um problema ou na demonstração de um teorema. Como consequência, os estilos de escrita dos indivíduos, em cada período histórico, afetam a forma como se organizam as exposições das ideias matemáticas usadas para formalizar logicamente as demonstrações das proposições com o escopo de verificar a veracidade.

Os diferentes estilos e processos argumentativos adotados estão presentes nas inúmeras estratégias de investigar e de inventar soluções para os problemas que surgem em diversos ramos da Matemática, bem como para compreender a gama de elementos, relações, métodos heurísticos, lógicos e formais existentes na resolução de problemas e na demonstração de teoremas. Dessa maneira, as experiências, práticas e preferências de cada indivíduo caracterizam seu estilo singular de escrita matemática e demonstrativa.

Diferentes formas de resolver um problema ou de demonstrar um teorema implicam em diferenças nos níveis de compreensão. Para Cellucci (2015), uma vez que existem diferenças significativas entre as demonstrações em termos de compreensão, então também há diferenças significativas na beleza. Ao considerarmos as diferentes demonstrações aqui apresentadas do Teorema de Pitágoras, podemos afirmar que a mais bela, do ponto de vista do observador, será aquela que trouxer a ele a maior compreensão.

A resolução de problemas é um processo de descoberta e um processo de justificação, porque envolve encontrar hipóteses e verificar se elas são verdadeiras e, para Cellucci (2015), a avaliação estética pode nos orientar na escolha de quais hipóteses devem ser testadas e quais devem ser desconsideradas. Desse modo, como afirmam diversos autores (CELLUCCI, 2015, BREITENBACH, 2013, POINCARÉ, 1908), a beleza pode nos fornecer um procedimento heurístico para escolher entre diferentes resoluções, demonstrações e teorias, desempenhando, dessa forma, um papel no contexto da descoberta e do raciocínio heurístico.

Em vista das discussões apresentadas, concluímos que é a possibilidade de construção de conhecimento, de aproximação do admirador à cognição do raciocínio matemático, possibilitada pela assimilação de uma prova matemática ou da resolução de um problema que consiste em sua beleza e que é fruto de admiração estética. Assim sendo, a análise estética da resolução de um problema ou da demonstração de um teorema está diretamente ligada à sensação de percepção do próprio conhecimento, proporcionada pela resolução ou pela prova.

As demonstrações do Teorema de Pitágoras aqui apresentadas podem ser trabalhadas em sala de aula, buscando que o estudante explore os seus aspectos estéticos. Para isso, é possível que o professor explore os aspectos artísticos e filosóficos relacionados a essas demonstrações, buscando compreender a metodologia de resolução de problemas numa perspectiva social, ética e política.

Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BALIEIRO FILHO, I. F. *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya*: quatro Episódios da História da Heurística. São Paulo: UNESP, 2017.

CELLUCCI, C. Mathematical Beauty, Understanding, and Discovery. *Found Sci*, *[S. l.]*, v. 20, p. 339-355, 2015. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10699-014-9378-7#citeas. Acesso em: 07 abr. 2021.

BREITENBACH, A. Beauty in Proofs: Kant on Aesthetics in Mathematics. *European Journal of Philosophy*, [*s. l.*], v. 23, p. 955-977, Abr. 2013. Disponível em: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/ejop.12021?fbclid=IwAR2t-XDe-hckNvhy41omAeIWVLGDJbjZKy__Nipc-IJIvftrc-C6MsX7ecQ. Acesso em: 07 abr. 2021.

FERREIRA, A. B. de H. *Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: Pearson Education, 2009.

KILPATRICK, J. George Polya's influence on mathematics education. *Mathematics Magazine*, [*s. l.*], v. 60, n. 5, p. 299-300, 1987.

LINO, C. M. C. *As contribuições do uso da história da matemática no ensino do teorema de Pitágoras com os alunos da educação de jovens e adultos (EJA)***.** 2019. 186 f. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2019.

LOOMIS, E. S. *The Pythagorian Proposition, Classics in Mathematics Education Series*, Second Edition. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1940.

MAOR, E. *The Pythagorean theorem*: a 4,000-year history. New Jersey: Princeton, 2007.

MARCO, F. F. *Estudo dos Processos de Resolução de Problema Mediante a Construção se Jogos Computacionais de Matemática no Ensino Fundamental*. 2004. 140 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000316327. Acesso em: 18 mar. 2021.

PATERSON, G. D. *The Aesthetics Of Mathematical Proofs*. 2013. Dissertação (Mestrado em Arte) – University of Alberta, Edmonton, Alberta, 2013. Disponível em: https://era.library.ualberta.ca/items/17c2b8bd-d40d-4b18-8404-891d3610d560/download/fe059eb9-0708-4316-8912-2b1bc27f944d. Acesso em: 07 abr. 2021.

PERIGAL, H. On Geometric Dissections and Transformations. *The Messenger of Mathematics*, Cambridge, v. 2, p. 103-141, 1873.

POINCARÈ, H. *Science et Méthode*. Paris: Flammarion, 1908.

POLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning*. New Jersey: Princeton, 1954.

POLYA, G. *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. New York: Wiley, 1962.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PUCHKIN, V. N. *Heurística*: A Ciência do Pensamento Criador. Tradução Vera Neverova. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

ROSSETTO, D. Z. *A Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio*: o currículo do Estado de São Paulo e a visão dos professores. 2018. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira – SP. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/157138. Acesso em: 19 mar. 2021.

ROSSETTO, D. Z.; BALIEIRO FILHO, I. F. A resolução de problemas no currículo de matemática do estado de São Paulo e no caderno do aluno. *Práxis Educacional*, *[s. l.]*, v. 17, n. 45, p. 1-23, 2021. DOI: 10.22481/praxisedu.v17i45.7060. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/praxis/article/view/7060. Acesso em: 07 abr. 2021.

ROTA, G. C. The phenomenology of mathematical beauty. *Synthese*, [*s. l.*] v. 111, p. 171-182, mai, 1997. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1004930722234. Acesso em: 07 abr. 2021.

SCUCUGLIA RODRIGUES DA SILVA, R.; BALIEIRO FILHO, I. F.; SCHMIDT TOTTI, L. A.; BERTOLUCCI, G. A. Aspectos Estéticos em Demonstrações de Bonaventura Cavalieri. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, *[s. l.]*, v. 8, n. 22, p. 55–70, 2020. DOI: 10.30938/bocehm.v8i22.3985. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/3985. Acesso em: 3 abr. 2021.

Capítulo 3

Raciocínio Diagramático em Física: a Estética dos Diagramas de Feynman

Ricardo Mendes Grande

À memória de Freeman Dyson (1923-2020)

1 Introdução histórica

> Feynman: Eu não posso lhe contar quando os escrevi pela primeira vez (...) Eu provavelmente criei diagramas para me ajudar a pensar sobre (expressões de perturbações) (...) Provavelmente, não era uma invenção específica, mas uma abreviação com a qual eu fui me ajudando a pensar e que, gradualmente, desenvolveu-se em regras específicas para alguns diagramas (...).
> Weiner: para ajuda-lo a pensar fisicamente? Em outras palavras, você estava vendo no físico (...).
> Feynman: Não, expressões matemáticas. Expressões matemáticas. Um diagrama para ajudar a escrever as expressões matemáticas (Wurtrich, p. 6, 2010).

Foi em um encontro famoso em uma pousada em Pocono Manor na Pensilvânia em 1948 – *Pocono Conference* (Mehra, pp. 245-248, 1994) – que o célebre físico norte americano Richard Phillips Feynman apresentou alguns dos seus diagramas pela primeira vez. Todavia, a sua recepção foi muito pouco calorosa, em parte, devido à falta de clareza concernente à estrutura dos diagramas e à inexistência de um conjunto claro de regras que regessem o seu uso. Além disso, Feynman foi precedido em sua apresentação por Schwinger[1], um dos criadores da eletrodinâmica

[1] Para uma comparação entre os métodos de Feynman e Schwinger, indicamos Dyson (1949*) & (Yourgrau & Mandelstan, pp. 127-141, 1979).

quântica e cujo método para resolver o famoso *problema dos infinitos* nas teorias da radiação (eletrodinâmica quântica ou QED) se baseava em conceitos padronizados e de domínio dos físicos. O método diagramático de Feynman estava longe de ser claro para a maioria dos cidadãos presentes no encontro. Ora, não existem trajetórias bem definidas em mecânica quântica[2] e Feynman não era claro a respeito dos seus diagramas representarem fenômenos, serem abreviações de fórmulas ou apenas uma "muleta" para o pensamento.

Foi o matemático Freeman Dyson[3] (1949) quem derivou as regras para o uso dos diagramas e ofereceu as instruções para a sua aplicação. Além disso, coube a Dyson (1949*) demonstrar a equivalência das formulações de Feynman, Schwinger e Tomonaga da eletrodinâmica quântica e estender o processo de renormalização a todas as ordens de perturbação. Dyson ainda foi o principal responsável pela difusão das técnicas diagramáticas criadas por Feynman na física do mundo pós-guerra – ver (Kaiser, 2005*). O trabalho de Dyson (1949) parte do formalismo da matriz de espalhamento, mas do ponto de vista didático, é bastante razoável apresentar os diagramas de Feynman como uma consequência da formulação de Feynman (1948) da mecânica quântica. Tal procedimento pode ser feito também no contexto da mecânica quântica não relativística e estendido para a mecânica quântica de campos, como nos mostra Ryder (pp.

---

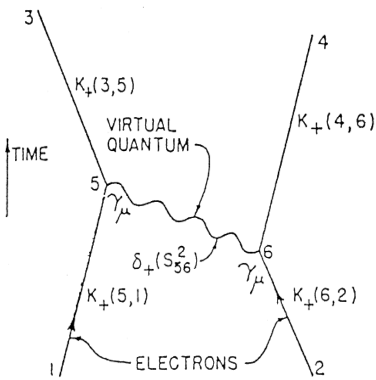
[2] Existem inúmeras interpretações da mecânica quântica (Pessoa Jr., pp. 119-152, 2006*) e David Bohm elaborou uma delas em que é possível falar de *trajetória*. Entretanto, não entraremos no mérito da teoria de Bohm (Pessoa Jr, pp. 239-241, 2006) e aceitaremos, implicitamente, a intepretação de Copenhagen (Pessoa Jr., Cap. XI-XII, 2003). Para o caso da mecânica quântica de campos, recomendamos (Redhead, 1990) para uma discussão concernente à interpretação do conceito de campo quântico. Grosso modo, para o caso do campo quântico, parte-se de um sistema físico dotado de infinitos graus de liberdade (i.e., de um campo clássico). Através da análise de Fourier, a sua quantização é reduzida à quantização de infinitos osciladores harmônicos independentes – ver (Kaku, Chap.2, 1992). Recomendamos, também o trabalho de (Bassalo & Cattani, 2009) para o estudo dos osciladores harmônicos clássico, quântico, relativístico e quântico relativístico.

[3] Dyson publicou dois artigos fundamentais para a eletrodinâmica quântica em 1949. No primeiro (Dyson, 1949*), demonstrou a equivalência das teorias de Feynman, Schwinger e Tomonaga. No segundo (Dyson, 1949), estabeleceu as regras que regem os diagramas de Feynman. Para diferenciar artigos publicados por um mesmo autor em um mesmo ano, utilizaremos o sinal "*" sobre a data de publicação.

156-174, 1994) em seu livro de mecânica quântica de campos. Entretanto, a utilização de diagramas de Feynman em mecânica quântica não relativística é de pequeno valor. Não há dúvidas de que o trabalho de Dyson contribuiu para que Feynman, Schwinger e Tomonaga dividissem o prêmio Nobel[4] de física em 1965. Infelizmente, as regras monolíticas da Academia Real das Ciências da Suécia não permitem que mais do que três pesquisadores de uma mesma área recebam o prêmio simultaneamente.

A primeira aparição de um diagrama de Feynman em um artigo científico de seu criador se deu em 1949 em "Space-time approach to quantum electrodynamics" – ver figura 1. Porém, curiosamente, a primeira ocorrência desse tipo de diagrama se deu em trabalhos de Dyson (1949) alguns meses antes. É importante mencionar que Dyson nunca reivindicou qualquer autoria com relação à utilização de diagramas em seus trabalhos e sempre deu a Feynman todos os créditos por sua criação. E a respeito da publicação dos diagramas por Dyson, Feynman disse a Mehra "Certamente, ele teve a minha permissão para a publicação. Somos bons amigos" (Mehra, p. 630, 1994).

Figura 1



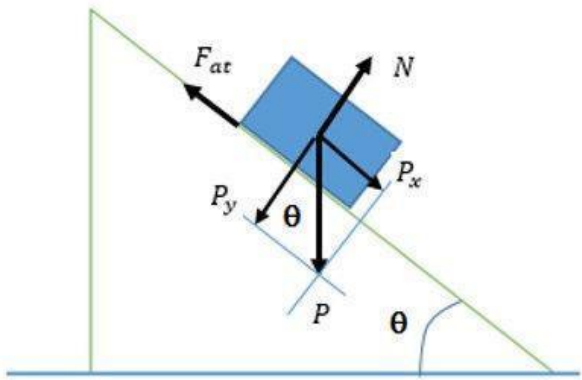
[4] Recomendamos o excelente livro de Schweber (1994) para a história das formulações matemáticas da QED.

2 O que é um diagrama[5] de Feynman[6]?

2.1 Raciocínios diagramáticos

O uso de raciocínios diagramáticos é bastante comum em física, sendo que alguns se utilizam de figuras, desenhos ou diagramas que se colocam como representações de algum aspecto ou recorte da realidade. Na figura abaixo, as forças e as suas componentes envolvidas no problema são representadas por vetores e, o ângulo que dá a inclinação do plano, por um número real.

Figura 2



Neste caso, temos uma representação constituída de dois aspectos:

i. Um objeto físico em um plano inclinado de um ângulo θ;
ii. Representações abstratas das forças e de suas componentes que agem no corpo.

Quanto ao primeiro aspecto da representação, ele é um recorte abstraído e idealizado da realidade. Referente ao segundo, temos conceitos

---

[5] Embora estejamos restringindo o nosso trabalho ao caso da eletrodinâmica quântica, as regras diagramáticas podem ser estendidas a casos mais gerais – ver (Dunne, p. 370, 2001). Também é importante deixar claro que há hierarquias de diagramas (Daniel, p. 126, 2006), as quais não serão discutidas em nosso artigo.

[6] Seguiremos, nesta seção, (Aguílar, 2018).

teóricos envolvidos como os de força de atrito, peso e normal. O desenho acima pode ajudar o físico a resolver o problema elementar do corpo de massa m em um plano inclinado de um ângulo θ, no qual a figura funciona diretamente como ponto de apoio para cálculos básicos. Há inúmeros outros tipos de raciocínios dessa natureza em física e matemática. Em alguns casos, há outras hipóteses, suposições e identificações, como no caso de Descartes.

Descartes foi engenhoso ao identificar a matéria com a extensão, fato que o permitiu trabalhar as suas ideias físicas através de figuras geométricas e movimento e, assim, obter algumas consequências – ver (Garber, pp. 364-382, 2009). Dentre as suas hipóteses e identificações, destacamos as seguintes:

i. Como o espaço é infinito, a matéria o é;
ii. Como o espaço é homogêneo, a matéria também é;
iii. Sendo divisível o espaço, a matéria também o será;
iv. Como não há espaço sem extensão, não há matéria sem extensão.

Já em Newton, temos construções engenhosas, como na primeira proposição da seção II (Proposição I – Teorema I) referente à lei das áreas (Newton, p. 765, 2002) – figuras 3 e 4. Neste caso, mais uma vez, as figuras são representações abstraídas e generalizadas de aspectos da realidade. Como a descrição do movimento de corpos na mecânica clássica se rende, em parte, à geometria de Euclides, é razoável a utilização de triângulos, círculos e afins. Note que estamos aplicando a matemática a uma representação física de algum recorte do mundo. Todavia, há exemplos mais abstratos que o físico usa para representar um determinado aspecto da realidade, como no caso do modelo atômico de Bohr. Não é incomum, entretanto, encontrarmos em textos didáticos ou artigos técnicos de física, desenhos que retratam o elétron como uma partícula em uma trajetória circular - como no ótimo livro de estrutura da matéria de José Leite Lopes (p. 391, 2005) ou no artigo de Weinberger (p. 3075, 2014), do qual retiramos a figura 5. Neste caso, o elétron é representado por uma partícula que orbita um núcleo central de modo que, para uma órbita estacionária, podemos aplicar as leis da eletrodinâmica clássica. Todavia, a transição de uma órbita à outra não é descrita pela mecânica clássica, mas por um postulado (Lopes, pp. 391-395, 2005).

Figura 3

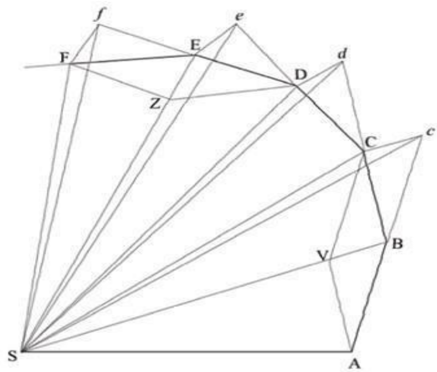
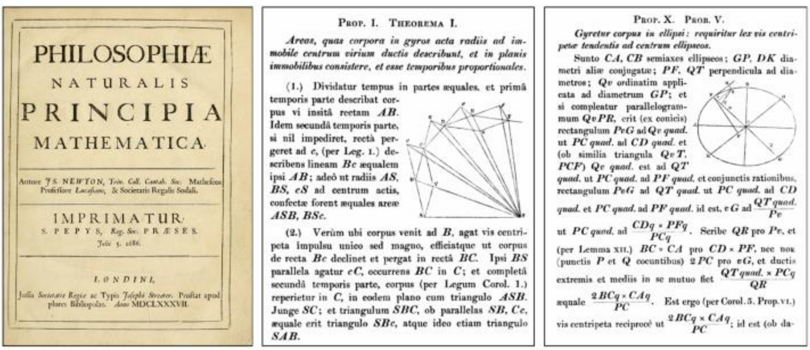


Figura 4



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

PROP. I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, et in planis immobilibus consistere, et esse temporibus proportionales.

(1.) Dividatur tempus in partes æquales, et primâ temporis parte describat corpus vi insitâ rectam *AB*. Idem secundâ temporis parte, si nil impediret, rectà pergeret ad *c*, (per Leg. 1.) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*; adeò ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*.

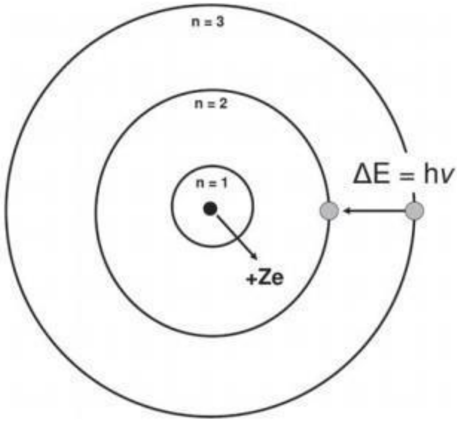
(2.) Verùm ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet et pergat in rectâ *BC*. Ipsi *BS* parallela agatur *cC*, occurrens *BC* in *C*; et completâ secundâ temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1.) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*; et triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Ce*, æquale erit triangulo *SBc*, atque ideo etiam triangulo *SAB*.

PROP. X. PROB. V.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos.

Sunto *CA*, *CB* semiaxes ellipseos; *GP*, *DK* diametri aliæ conjugatæ; *PF*, *QT* perpendicula ad diametros; *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*; et si compleatur parallelogrammum *QvPR*, erit (ex conicis) rectangulum *PvG* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad.* et (ob similia triangula *QvT*, *PCF*) *Qv quad.* est ad *QT quad.* ut *PC quad.* ad *PF quad.* et conjunctis rationibus, rectangulum *PvG* ad *QT quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad.* et *PC quad.* ad *PF quad.* id est, *vG* ad $\frac{QT\,quad.}{Pv}$ ut *PC quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe *QR* pro *Pv*, et (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis *P* et *Q* coeuntibus) $2PC$ pro *vG*, et ductis extremis et mediis in se mutuo fiet $\frac{QT\,quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob da-

Figura 5



A história dos modelos atômicos é longa e rica e, em muitos casos, e.g., modelo de Thomson[7], as representações dos átomos não serviriam de ponto de apoio para a obtenção de expressões matemáticas. Entretanto, no caso do átomo de Bohr, o desenho não é só uma metáfora, mas é possível utilizá-lo como uma ferramenta de cálculo para a obtenção dos níveis de energia do elétron. Curiosamente, o modelo de Bohr não se aplica a átomos mais complicados como o de hélio. Embora, Sommerfeld e Wilson tenham estendido o trabalho de Bohr ao elaborarem um método de quantização que se aplicaria também ao átomo ionizado de hélio (Pauling & Wilson, pp. 28-47, 1935), o estudo adequado da estrutura atômica foi elevado a novos patamares com os trabalhos de Heisenberg e de Schrödinger (Idem, Chap.5&15). No caso de Bohr, temos uma representação bastante idealizada do átomo de hidrogênio e que tem o seu valor heurístico e histórico, mas que não é considerada um *retrato físico* de um átomo. Curiosamente, um retrato falso[8], mas que permite a obtenção de valores

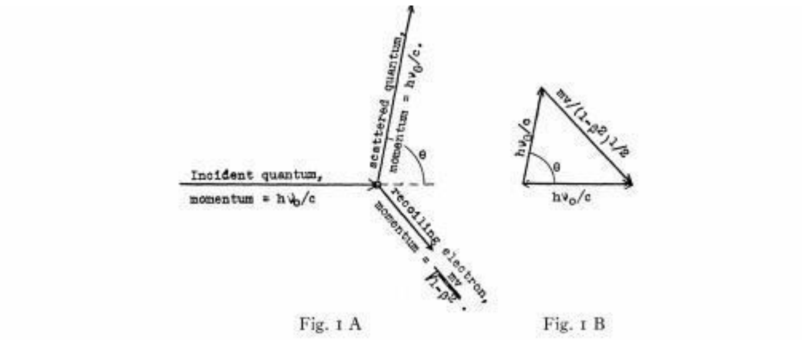
[7] Recomendamos o artigo de Baily (2012) em que são analisados inúmeros modelos atômicos elaborados durante o começo do século XX.

[8] Seria tautológico afirmar que toda teoria física tem a sua aplicabilidade restrita a um pequeno recorte da realidade, mas não é trivial explicar o porquê de ela falhar para casos com alguma similaridade, como ocorre quando se passa de um

corretos para os níveis de energia do elétron. Vejamos mais um exemplo referente ao uso de desenhos ou diagramas na antiga teoria quântica: o efeito Compton.

O efeito Compton nada mais é do que o espalhamento de um fóton por um elétron. Todavia, é interessante citar este efeito pelo fato de o seu autor ter utilizado um desenho como ponto de apoio para os cálculos. A figura 6 (Compton, p. 486, 1923) é bastante ilustrativa por servir a dois propósitos de uma única vez: i. funciona como guia heurístico para cálculos matemáticos; ii. apresenta alguma similaridade com os diagramas de Feynman. Vejamos, então, o que é um diagrama de Feynman.

Figura 6



2.2 Diagramas de Feynman

Referente aos diagramas[9] de Feynman, a nossa tese é a de que funcionam apenas como uma ferramenta para a obtenção de termos de uma expansão em série de expressões matemáticas. Sustentaremos, então, que

átomo com um elétron para outro com dois. Dito de modo simplificado e informal: se o elétron orbita o núcleo do átomo de hidrogênio, por que dois elétrons não orbitariam o núcleo do átomo de hélio? Em que parte da descrição o modelo recortado do mundo perdeu a sua ligação com realidade? A equação de Schrödinger permite obter os níveis de energia mencionados, todavia, o átomo de hidrogênio não é mais descrito do modo que Bohr o descreveu e os elétrons não são vistos como partículas que giram ao redor de um núcleo central do mesmo modo que a Terra orbita o Sol.

[9] Existem interpretações distintas dos diagramas, e.g., discussões sobre a sua ontologia e a respeito do que realmente representam. Recomendamos o artigo de Kaiser (1999) em que é analisada a possibilidade de os diagramas nos comprometerem com uma ontologia de partículas.

não cabe a eles o papel de representar um recorte da nossa realidade empírica. Vejamos o que é um diagrama de Feynman.

Um espalhamento de partículas, grosso modo, pode ser colocado da seguinte maneira esquemática:

Partículas iniciais→ interação→ partículas finais

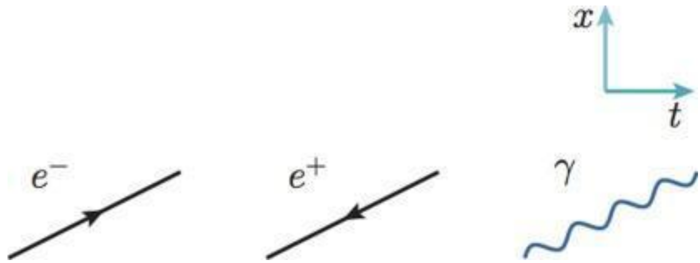
Em mecânica quântica, é mister calcular a amplitude de probabilidade de espalhamento M_{fi}, i.e., uma função complexa dos momentos das partículas e cujo quadrado nos dá a probabilidade de transição de um sistema de um estado inicial $|\psi_i\rangle$ a um estado final $|\psi_f\rangle$. Os diagramas de Feynman são, *a priori*, uma ferramenta bastante útil para a obtenção da amplitude de espalhamento M_{fi}, a qual nos permite calcular o valor de inúmeras expressões físicas (Mattuck, pp. 11-24, 1992).

Podemos dizer que um diagrama de Feynman em eletrodinâmica quântica (QED) é constituído[10] de alguns elementos básicos, dentre eles, linhas estilizadas para cada tipo de partícula e de um eixo bidimensional (que denota o espaço e o tempo). Na figura abaixo (Aguílar, p. 2, 2018), temos as linhas com traços retos para elétrons e^- e pósitrons e^+ e, também, a linha ondulada para o fóton γ. Utilizamos x para denotar as coordenadas espaciais das partículas e, claro, t para a coordenada temporal[11]:

[10] É sempre importante ter em mente que há inúmeras variações estilísticas referentes a um diagrama de Feynman, como mostra Kaiser (p. 163, 2005 & p. 32, 2005*).

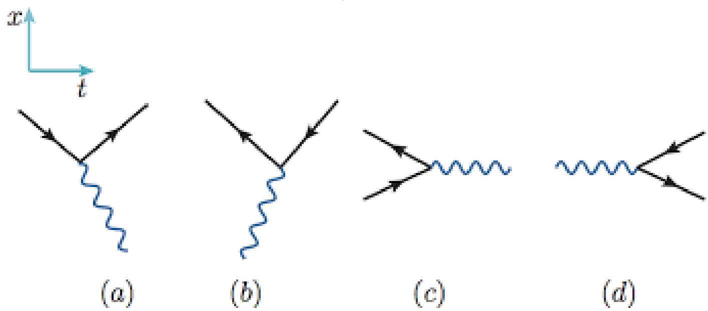
[11] Note que, na figura 1, Feynman representou a coordenada temporal na direção vertical, que será a convenção adotada por Griffiths (p. 59, 1987), diferentemente da que estamos seguindo aqui.

Figura 7



Na representação acima (Aguílar, p. 3, 2018), é importante notar que as setas fazem parte das convenções para a construção dos diagramas – fixada a orientação temporal. Dissemos que a linha ondulada representa o fóton, mas mais precisamente, ela representa o propagador do fóton, i.e., uma função matemática – dita *função de Green* que conecta dois pontos do espaço-tempo – ver (Schulman, Chap.1, 2005). Em um diagrama de Feynman, as interações são representadas nos vértices e, nestes pontos, é que as partículas são criadas ou destruídas. No caso da interação eletromagnética, há apenas um tipo vértice, no qual um fóton é trocado, sendo a intensidade da interação proporcional à carga elétrica do elétron. Em cada vértice são conservadas várias grandezas físicas (quadrimomento[12], carga elétrica, spin, etc).

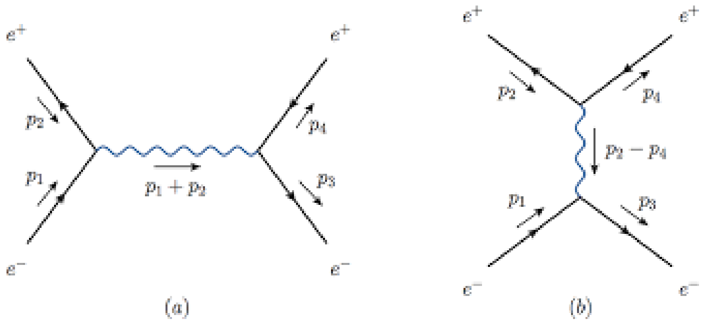
Figura 8



[12] Quadrivetor que substitui o momento linear clássico e incorpora a energia.

Na figura acima[13] (Aguílar, p. 4, 2018), temos em (a) um elétron que emite um fóton e segue a sua *trajetória*; em (b), um pósitron que absorve um fóton e segue o seu *caminho*; em (c), um pósítron e um elétron que se aniquilam dando origem a um fóton. E finalmente, em (d) temos um fóton dando origem a um elétron e um pósitron. Com um pouco de prática, podemos representar também os momentos p_i nos diagramas (idem, p. 7):

Figura 9



Nas figuras acima, temos a representação do espalhamento de um elétron e um pósitron conhecido por *espalhamento Bhabha*, também denotado por:

$$e^+ + e^- \to e^+ + e^-$$

sendo que há apenas[14] duas possibilidades para este evento. Logo, é necessário somar a contribuição para a amplitude oriunda de cada um dos dois diagramas ditos *topologicamente distintos*. No primeiro diagrama,

[13] O leitor atento deve ter percebido que os pósitrons podem ser interpretados como partículas viajando para o passado. Como sustentamos no artigo, os diagramas não são representações da realidade empírica.

[14] Para diagramas de ordens mais elevadas, haverá mais possibilidades, sendo a ordem de um diagrama o número de vértices presentes nele.

um elétron e um pósitron se aniquilam, um fóton virtual[15] é produzido e, então, um par elétron-pósitron é gerado. No diagrama (b), o elétron e o pósitron trocam um fóton. De modo geral, para uma quantidade arbitrária de diagramas, a amplitude de espalhamento é obtida pela adição de todas as amplitudes, isto é, a cada diagrama está associada uma amplitude M_k e a amplitude M_{fi} é dada por $\sum_k \quad M_k$. A necessidade de se adicionar as amplitudes pode ser justificada a partir da formulação de Feynman da mecânica quântica por integrais de trajetórias (ou de caminhos). Nesta formulação, atribui-se uma amplitude de probabilidade a cada trajetória e o resultado final é obtido pela adição de todas elas – ver (Schulman, Chap.9, 2005)[16].

3 O que exatamente um diagrama de Feynman representa?

3.1 A matemática e a realidade empírica

> Por favor, entenda: estes diagramas são puramente simbólicos; eles *não* representam trajetórias de partículas (como você poderia vê-las, digamos, em uma fotografia de uma câmara de bolhas). A dimensão vertical é o *tempo*, e as separações espaciais horizontais não correspondem a separações espaciais (...) Cada diagrama corresponde a um *número* particular, o qual pode ser calculado usando as, então chamadas, *regras de Feynman* (Griffiths, p. 59, 1987).

A matemática é uma teoria de estruturas formais e se aplicará a representações de fenômenos físicos que apresentem uma *estrutura similar*

[15] Partículas virtuais existem durante um período de tempo ínfimo e não precisam satisfazer à equação relativística E2-p2c2=m2c4, enquanto que as partículas reais necessariamente o fazem. Partículas virtuais não podem ser *observadas* diretamente, todavia, os seus efeitos são deduzidos através das partículas reais. Para uma discussão a respeito da interpretação das partículas virtuais, ver (Weingard, pp. 43-58, 1990).

[16] As regras para a utilização dos diagramas também podem ser obtidas a partir da formulação da teoria das perturbações (Dyson, 1949), integral de Wiener (Schulman, Chap.9&10, 2005), dentre outros modos. Deixamos também as seguintes referências: o livro de QED de Bassalo (pp. 147-164, 2006), o guia de McMahon (pp. 163-185, 2008) para o estudo dos diagramas e os clássicos de Schweber (pp. 447-575, 2005) e Schroeder & Peskin (1995) que utilizamos na elaboração deste trabalho. Finalmente, para a teoria matemática das integrais de trajetórias, ver (Alberevio & HØegh-Krohn & Mazzucchi, Chap.3&5, 2008).

e, no melhor dos casos, isomorfa (Grande, Cap.3, 2011). Em geral, não é possível obter um isomorfismo entre um domínio matemático e um determinado domínio da realidade física, visto as estruturas matemáticas serem muito mais *ricas* do que as estruturas físicas que queremos descrever. Por exemplo, não há nada na nossa realidade empírica que nos remeta a um cardinal transfinito fortemente inacessível ou a seu fatorial de Hausdorff. Para fixar as ideias, tomemos um exemplo.

Seja X um conjunto de corpos cujos pesos possamos obter e comparar por meios empíricos usuais. Assuma que $X^* = R$, de modo que "$\leq$" e "$+$" representem, respectivamente, as relações usuais de ordem e a operação binária de adição entre números reais. Denote por Σ a estrutura matemática $\langle X^*, +, \leq \rangle$ e, por Σ^*, a estrutura $\langle X, \bigoplus, \preccurlyeq \rangle$ - sendo "$\bigoplus$" a operação de composição de pesos e "$\preccurlyeq$" a relação de comparação de pesos.

Associamos números a corpos através de um homomorfismo[17] $\varphi: X \to X^*$ que satisfaz a:

i. $x \preccurlyeq y \to \varphi(x) \leq \varphi(y)$;
ii. $\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

Neste exemplo assaz trivial, a estrutura dos números reais é utilizada para dizer algo a respeito da nossa física de conjuntos de corpos cujos pesos podem ser medidos. Mais precisamente, podemos afirmar que, na composição de pesos, adicionamos os números referentes aos pesos dos

[17] Para fixar as ideias, sejam A e A' dois anéis. Um anel é um conjunto não vazio munido de duas operações binárias, e.g., "+" e "." (ou "*" e "") chamadas, respectivamente, de *adição* e *multiplicação*, e que satisfaz a um conjunto de axiomas (Gonçalves, pp. 34-35, 1999) . Denotaremos um anel por ⟨A, +, .⟩ ou ⟨A', *, ∘⟩. Um homomorfismo de anéis nada mais é que uma função :AA' , para ⟨A, +, .⟩ e ⟨A', *, ∘⟩, que satisfaz a:

∀a∀b∈A

a+b=ϕa*ϕ(b)

a.b=ϕ(a)∘ϕ(b)

Se for bijetivo, será chamado de *isomorfismo*. Tal definição se estende naturalmente a outras estruturas algébricas como a de corpo. Para o caso da estrutura algébrica de grupo, teremos apenas uma operação binária. No exemplo acima ligado a corpos físicos, o homomorfismo também preserva a estrutura de ordem.

corpos e que se o corpo x tem o seu peso igual ou menor ao de y, então, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. E no caso dos diagramas de Feynman, o que ocorre? Vejamos isso nas próximas subseções.

3.2 Diagramática geral – uma abordagem informal

Para compreender o contexto geral da utilidade dos diagramas de Feynman, seria necessário elaborar uma discussão bastante aprofundada de teoria[18] das perturbações em mecânica quântica de campos[19], o que não se insere na nossa[20] proposta. Aliás, sequer há métodos matemáticos exatos para resolver as equações que descrevem os sistemas físicos do ponto de vista da eletrodinâmica quântica, como nos dizem Peskin & Schroeder (p. 5, 1995):

A notícia ruim é que, mesmo para os processos mais simples da QED, a expressão exata para M não é conhecida. Realmente, este fato não deveria vir como uma surpresa, desde que, mesmo na mecânica quântica não relativística, problemas de espalhamento raramente podem ser resolvidos de modo exato. O melhor que se pode fazer é obter uma expressão formal para M como uma série de perturbação (...).

De maneira bastante simplificada, dado o operador de energia de um sistema físico de campos $\{\phi_i\}$, $H = H_0 + \lambda H_I$, de modo que o primeiro termo à direita represente o sistema livre de interações, sendo que todas as interações estão contidas no termo λH_I (para o parâmetro λ), o objetivo do físico de partículas é obter: $\langle \Omega \rangle$. Tal termo representa o valor esperado

[18] Ver também (Schweber, Chap.14, 2005) & (Mattuck, pp. 52-54, 1992) & (Sakurai & Napolitano, Chap.5-6, 2013).

[19] Recomendamos o excelente texto de divulgação científica escrito em linguagem bem humorada do próprio criador dos diagramas, *QED – The strange theory of light and matter* (Feynman, 1985) e o ótimo artigo de Daniel (2006) para uma introdução bastante didática à mecânica quântica de campos e aos diagramas de Feynman.

[20] A elaboração de um cálculo explícito e detalhado usando os diagramas de Feynman requereria a utilização de um dicionário que traduzisse cada elemento de um diagrama em uma expressão matemática. Essas expressões comporiam uma equação que nos permitiria calcular a amplitude de espalhamento. O leitor pode encontrar cálculos explícitos em Schweber (pp. 487-500, 2005), além de (Aguílar, pp. 5-8, 2018).

do sistema no estado $|\Omega\rangle$ – sendo T, o operador de *ordenação temporal*. A obtenção de $\langle\Omega\rangle$ requeria algumas páginas de cálculos e uma compreensão maior da física e matemática subjacente à teoria quântica de campos e, por isso, apenas deixaremos referências. Para uma abordagem completa, ver (Schweber, Chap.14, 2005) e, para uma *dedução heurística* da expressão, indicamos (Gomes, pp. 199-204, 2002).

O termo $\langle\Omega\rangle$ pode ser expandido através de uma série de funções a um parâmetro, no caso, λ. De maneira bastante esquemática e apenas a título de ilustração, escreva $f^j(x_i)$ para o j-ésimo termo da expansão em série de funções a seguir[21].

$$\langle\Omega\rangle = f^0(x_i) + \lambda f^1(x_i) + termos\ de\ ordem\ \lambda^2$$

No caso geral, cada $f^j(x_i)$ pode ser calculado com o auxílio de um teorema chamado de *Teorema de Wick* – ver (Mattuck, pp. 362-367, 1992) & (Kaku, pp. 151-156, 1992) & (Gomes, pp. 199-211, 2002). O teorema de Wick permite relacionar os elementos de cada termo da série com diagramas de um modo natural. Todavia, elaborar tal relação requereria exercícios algébricos assaz extensos. Por outro lado, podemos exibir um exemplo simples para o elétron não relativístico e que retiramos de (Lopes, pp. 854-857, 2005) e que explicaremos de maneira informal. Para o caso

[21] Note que não estamos especificando as variáveis xi , nem exibindo a forma de cada termo da série para evitar detalhes técnicos que não acrescentariam nada à nossa exposição. Poderíamos colocar o problema da seguinte maneira, a nosso ver, mais intuitiva. Tomemos por S a matriz de espalhamento e, por |i⟩ e |f⟩, os estados inicial e final do sistema físico, de modo que ⟨i⟩ represente a amplitude Mfi. Podemos escrever:

⟨i⟩=⟨i⟩+⟨i⟩+⟨i⟩+⟨i⟩+...

Lembremo-nos de que a amplitude é o termo que nos permite calcular a seção de espalhamento e de que não existem soluções exatas para ⟨i⟩, mesmo para casos mais simples. A série acima é obtida por métodos de teoria das perturbações. Façamos uma analogia que julgamos ilustrativa. Seja a função f(x) dada pela seguinte série:

fx=1-cosxx2=12!-x24!+...

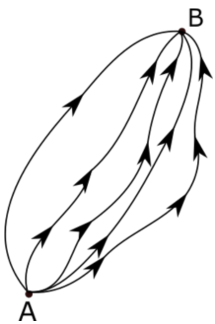
Note que fx =12 . Ora, para valores pequenos de x , os dois primeiros termos forneceriam uma boa aproximação para f(x). Todavia, no caso da mecânica quântica de campos, muitas séries divergem, o que dificulta a justificação matemática da teoria. Entretanto, há regras para obter uma expressão matemática a partir de um diagrama, no caso, uma integral. Por exemplo, para um sistema de férmions sujeitos a um potencial externo, ver (Mattuck, p. 75, 1992).

relativístico, haveria mais diagramas e a abordagem requereria inúmeras informações adicionais. A título de ilustração, teríamos dois diagramas para o primeiro termo da série do propagador de Feynman, um relacionado ao elétron e outro ao pósitron (Bassalo, p. 159, 2006). Lembremo-nos de que os diagramas ganham importância em mecânica quântica de campos e que não é no contexto não relativístico que mostram o seu valor heurístico. Feitas essas observações, sigamos com o exemplo.

3.3 Exemplo prático

Suponha que um elétron se propague de um ponto A até o ponto B em um intervalo de tempo Δt (figura 10) Na formulação da mecânica quântica por integrais de trajetórias, soma-se a amplitude de probabilidade para cada trajetória possível do deslocamento entre os dois pontos – ver (Feynman & Hibbs, pp. 28-39, 2005), (Schulman, pp. 3-8, 2005) & (Alberevio & HØegh-Krohn & Mazzucchi, Chap.3&5, 2008).

Figura 10



Dado o operador de energia $H = H_0 + V$, sendo H_0 o termo referente à partícula livre e V uma *pequena* perturbação, a expressão que nos dá a amplitude de espalhamento do elétron é $K_f(2,1)$ – (Lopes, p. 855, 2005):

$$K_f(2{,}1) = K_0(2{,}1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} K_0(2{,}3)V(3)K_0(3{,}1)d^3x_3 + \cdots$$

$K_f(2{,}1)$ recebe o nome de propagador[22] de Feynman para a partícula (no caso, um elétron). Propagadores são dados por um tipo de função matemática chamada de *função de Green*. Esse tipo de função nos permite[23] obter soluções para a equação de Schrödinger, i.e., conhecido o propagador, obtém-se a solução para a equação de Schrödinger – ver (Schulman, Chap.10, 2005) para uma discussão análoga à nossa, mas com os detalhes matemáticos.

À expressão acima, associamos uma família de diagramas. Na seguinte figura, o termo à esquerda representa a amplitude total de espalhamento, enquanto cada um dos termos seguintes (ou diagramas)

[22] De modo didático, podemos escrever o propagador K para uma partícula do seguinte modo para o caso não relativístico: K=Ko+KoVK, sendo V um potencial e Ko o valor inicial de K. Tal equação, sob condições matemáticas adequadas, pode ser escrita do seguinte modo: K=Ko+KoVKo+KoVKoVKo+...=i=o(KoV)iKo. O primeiro termo se refere à propagação da partícula sem espalhamento, o que nos dá precisamente o primeiro diagrama da figura 11 e, de modo análogo, poderíamos obter todos os demais diagramas.

[23] Grosso modo, se L é um operador diferencial para Lψx,t=f(x,t), sob condições matemáticas plausíveis, é possível associar uma função de Green G à equação Lψx,t=f(x,t) por:

LGx-xo,t-to=δ(x-xo)δ(t-to)

Mais precisamente, para o operador de Schrödinger H, teremos que:

H-i$\hbar\partial$tGx,t;xo,to=-i$\hbar$Idδt-tox-xo

Como dissemos, visamos obter x,t a partir de (xo,to) e da função de Green ou:

x,t=Gt,toψ(xo,to)

Note que:

Gx,t;xo,to=⟨xo⟩

Se o operador H for independente do tempo, teremos que - para t>o e to=o (Schulman, p. 4, 2005):

Gx,t;xo=⟨xo⟩

Note também a analogia com a função de onda x,t- solução da equação de Schrödinger:

x,t=e- iH(t-to)ψ(xo,to)

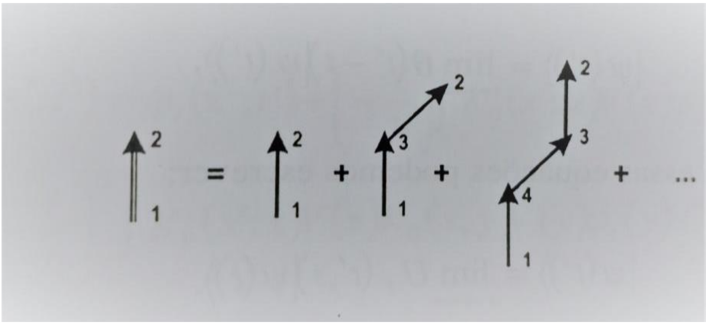
Para encerrar esta nota e a relação do propagador com , dito de modo geral, o propagador G pode ser visto como o núcleo do operador integral (Sakurai & Napolitano, p. 115, 2013) a seguir:

x'',t=d3x'Gx'',t;x',toψ(x',to)

Observação: para a análise do método geral das funções de Green, ver (Butkov, Chap.12§8, 1988); para uma introdução ao método aplicado à equação de Schrödinger, recomendamos (Wallace, pp. 376-378, 1984).

representa um membro da série. Em geral, as representações diagramáticas são muito mais complicadas. Façamos algumas observações sobre o que foi feito nesta seção.

Figura 11



Fonte: (Lopes, p. 857, 2005).

3.4 Observações

Primeiramente, parece-nos claro que os diagramas não podem ser representações[24] da realidade física, visto o conceito de trajetórias espaço-temporais bem definidas ser destituído de sentido em mecânica quântica. Além disso, em um diagrama de Feynman, há menção explícita a partículas virtuais, as quais não podem ser observadas. Caso tais partículas não existam, os diagramas estariam representando o que? Algo inexistente? Neste caso, é imediato que os diagramas de Feynman não poderiam ser uma representação adequada de algum recorte da nossa realidade empírica. Para o caso de as partículas virtuais existirem, não há problema em se representar algo inobservável. Entretanto, mesmo nesta situação, não é possível contornar o problema oriundo do tratamento matemático dado à

[24] Citado por Würtrich (p. 5, 2010), James R. Brown tem a seguinte opinião, i.e., "Então, o que está sendo visualizado? Eu acho que a resposta é simples: diagramas de Feynman são representações geométricas de funções de probabilidades (...). Eles não são retratos de fenômenos (...). O diagrama de Feynman representa (frequentemente de modo brilhante) uma função matemática que está relacionada a um processo físico. Nós vemos as linhas no diagrama; nós não visualizamos o processo físico por si mesmo, nem qualquer tipo de versão abstrata dele". Resumidamente: os diagramas ajudam a obter as amplitudes do tipo Mk, mas não exercem qualquer papel ontológico na representação.

mecânica quântica de campos por Dyson, o qual permite relacionar diagramas a expressões matemáticas. Mais precisamente, Dyson (1952) provou que muitas séries utilizadas em QED divergem, apesar de os seus primeiros termos serem de utilidade teórica para a obtenção de resultados assaz satisfatórios. Grosso modo, não pode haver um homeomorfismo entre uma estrutura matemática que prevê resultados infinitos e um *recorte da realidade* física que é sempre de natureza finita. Isso exclui a possibilidade de diagramas de Feynman serem algum tipo de representação estrutural da realidade empírica - note que Feynman tinha razão na citação com que abrimos o nosso artigo. Teçamos, então, as nossas conclusões.

4 Conclusões

Descrever as interações entre partículas através de palavras seria uma tarefa absurdamente ingrata e, mesmo para o caso das equações, a situação ainda é complicada, visto haver uma quantidade enorme de termos em cada passo da expansão de uma série perturbativa de funções para ordens elevadas. Assim, é mais fácil raciocinar com o uso de diagramas. O bloco fundamental de um diagrama é o vértice, onde são representadas as interações. Sempre haverá uma seta chegando ao vértice e outra saindo. Embora, possa-se dizer que "as interações são representadas nos vértices", os traços não representam as trajetórias reais de partículas no espaço-tempo. De modo mais preciso, os vértices representam a ordenação temporal no sentido de uma partícula ser criada, aniquilada ou trocada e apenas nesse sentido relacional.

Em suma, elaboramos uma discussão a respeito do raciocínio diagramático em física quântica. Dada a complexidade técnica da mecânica quântica de campos, em especial, da eletrodinâmica quântica, não seria possível abordar o tema de uma maneira matemática em poucas linhas. Analisamos, brevemente, a história da criação dos diagramas e tentamos mostrar que o seu papel não é o de representar um fenômeno físico, mas de auxiliar o físico a encontrar as expressões corretas que descrevem os processos de espalhamento. É importante que fique claro que os diagramas por si só não produzem resultados numéricos, mas apenas ajudam os cientistas a encontrar os termos correspondentes a expressões em uma série de funções. Encontrados tais termos, ainda é preciso montar uma equação e resolvê-la.

Nota: agradecemos aos professores Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva e Osvaldo Pessoa Jr. pelo apoio.

Agradecimentos

À FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Processo 12/50508-8).

Bibliografia

AGUÍLAR, A. C. "Diagramas de Feynman: o poder de uma imagem", *Revista Brasileira do Ensino de Física*, vol. 40, nº4, e4205 (2018).

ALBEREVIO, S. A. & HØEGH-KROHN, R. J. & MAZZUCCHI, S. *Mathematical theory of Feynman path integral - an introduction 2nd edition*, Springer-Verlag, Berlin (2008).

BAILY, C. "Early atomic models – from mechanical to quantum (1904–1913)", *The European Physical Journal H*, pp. 1-38, (2012).

BASSALO, J. M. F. & CATTANI, M. S. D. *Osciladores harmônicos – clássicos e quânticos*. Editora livraria da física, SP (2009).

BASSALO, J. M. F. *Eletrodinâmica quântica*, Editora da Livraria da Física, São Paulo, SP (2006).

BUTKOV, E. *Física matemática*, Guanabara Koogan, RJ (1988).

COMPTON, A. H. "A quantum theory of scattering of x-rays by light elements", *The Physical Review*, Second Series, Vol. 25, Nº5 (1923).

DANIEL, M. *Particles, Feynman diagrams and all that*, Phys. Edu. 41 (119), (2006).

DUNNE, P. "Looking for consistency in the construction and use of Feynman diagrams", *Phys. Edu.* **36** 366-374 (2001).

DYSON, F. "The theories of radiation of Tomonoga, Schwinger and Feynman", *Phys. Rev.* 75, pp. 486 -502 (1949*).

- "The S – Matrix in quantum electrodynamics", Phys. Rev. 75, pp. 1736- 1755 (1949).

- "Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics", Phys. Rev. 85 (4), pp. 631-632 (1952).

FEYNMAN, R. P. & HIBBS, A. R. *Quantum mechanics and path integrals*, Dover Publications, Inc. New York (2005).

FEYNMAN, R. P. *QED – the strange theory of light and matter*, Penguim Books, UK (1985).

- "The space-time approach to quantum electrodynamics", Phys. Rev. 76, p. 769 (1949).

- "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", Reviews of Modern Physics, Vol. 20, p. 267 (1948).

GARBER, D. "A física de Descartes" Em COTTINGHAM, J. *Descartes*, Ideias e Letras, SP (2009).

GOMES, M. O. C. *Teoria quântica de campos*, Edusp, SP (2002).

GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra – 4ª Edição*, Editora do Impa, RJ (1999).

GRANDE, R. M. *A aplicabilidade da matemática à física*, tese de doutorado Campinas, SP (2011).

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to elementary particles*, John Wiley & Sons, Inc., USA (1987).

KAISER, D. "Physics and Feynman diagrams", American Scientist, Volume 93, pp. 156-165, (2005).

- *Drawing theories apart – the dispersion of Feynman diagrams in postwar physics*, University of Chicago Press, USA (2005*).

- "Do Feynman diagrams endorse a particle ontology? The roles of Feynman diagrams in S-matrix theory" In CAO, T. Y, *Conceptual foundations of quantum field theory* Cambridge Univ Press UK (1999).

KAKU, M. *Quantum field theory – a modern introduction*, Oxford Univ. Press, New York (1993).

LOPES, J. L. *A estrutura quântica da matéria – do átomo pré-socrático às partículas elementares*, Editora UFRJ, RJ (2005).

MATTUCK, D. *A guide to Feynman diagram in the many body problem*, 2nd edition, Dover Publications Inc., New York (1992).

MCMAHON, D. *Quantum field theory DeMystified*, McGraw-Hill Companies, USA (2008).

MEHRA, J. *The beat of a different drum – the life and the Science of Richard Feynman*, Clarendon Press, Oxford University Press, Printed in the USA (1994).

NEWTON, I. "Principia" In. Hawking, S. *On the shoulders of giants*, Running Press, USA (2002).

PAULING, L. & WILSON, E. B *Introduction to quantum mechanics*, Mcgraw-Hill Book Company, Inc. (1935).

PESKIN, M. E. & SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley Publishing Company, USA (1995).

PESSOA JR., O. *Conceitos de física quântica –vol. 1*, Editora livraria da física, SP (2003).

- *Conceitos de física quântica –vol. 2*, Editora livraria da física, SP (2006).

- "Mapa das interpretações da teoria quântica" Em MARTINS, R. A. & BOIDO, G. & RODRIGUEZ, V. *Física: Estudos Filosóficos e Históricos*, AFHIC, pp. 119-52, Campinas (2006*).

REDHEAD, M. "A philosopher looks at quantum field theory" In BROWN, H. R. & HARRÉ, R. *Philosophical foundations of quantum field theory*, Clarendo Press, UK (1990).

RYDER, L. H. *Quantum field theory*, Cambridge Univ. Press, UK (1994).

SAKURAI, J. J. & NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna* – Segunda edição, Bookman, Porto Alegre (2013).

SCHULMAN, L. S. *Techniques and applicatiions of path integration*, Dover Publications, Inc., New York (2006).

SCHWEBER, S. S. *An introduction to relativistic quantum field theory*, Dover Publications Inc, New York (2005).

- *QED and the men who made it – Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga*, Princeton University Press, Princeton – USA (1994).

WALLACE, P. R. *Mathematical analysis of physical problems*, Dover Publications, Inc., New York (1984).

WEINBERGER, P. "Niels Bohr and the dawn of quantum theory", Philosophical Magazine, Vol. 94, No. 27, pp. 3072–3087, (2014).

WEINGARD, R. "Virtual particles and the interpretation of quantum field theory" In BROWN, H. R. & HARRÉ, R. *Philosophical foundations of quantum field theory*, Clarendo Press, UK (1990).

WURTRICH, S. *The genesis of Feynman diagrams*, Dordrecht, Springer Verlag, London (2010).

YOURGRAU, W. & MANDELSTAM, S. *Variational principles in dynamics and quantum theory*, Dover publications Inc., New York (1979).

Capítulo 4

Aspectos do Pensamento Computacional e Princípios Estéticos em Atividades Matemáticas

Rita de Cássia Idem
Lara Martins Barbosa
Tatiane Sanchez Nespoli

1 Introdução

O **pensamento computacional** tem mobilizado pesquisas e iniciativas educacionais em níveis internacional (DENNING; TEDRE, 2019) e nacional (VALENTE, 2019). Esse termo ganhou destaque com a publicação do artigo de Wing (2006) que afirma que o pensamento computacional é uma habilidade necessária para todos. Entendemos que essa mobilização ocorre como meio de integrar conceitos e ideias da Ciência da Computação ao ensino e à aprendizagem de outras áreas do conhecimento em diferentes níveis educacionais. Isso acontece por conta da crescente importância dessa área, assim como da sua característica transversal, uma vez que as outras áreas do conhecimento, cada vez mais, se unem a ela para se desenvolverem (DENNING; TEDRE, 2019).

O pensamento computacional possui ligações com a Matemática, inclusive históricas (DENNING; TEDRE, 2019), e com o pensamento matemático (WING, 2008). Assim, é possível aliar o ensino e a aprendizagem de Matemática ao seu desenvolvimento. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda a abordagem desse pensamento no ensino de Matemática na Educação Básica (BRASIL, 2018).

Neste capítulo, apresentamos três estudos que estão relacionados ao desenvolvimento do pensamento computacional integrado ao ensino e à aprendizagem de Matemática. Esses estudos buscaram desenvolver atividades matemáticas para estudantes de diversos níveis de ensino, as quais foram elaboradas com o intuito de possibilitar a experiência estética (matemática) na experiência de aprendizagem. Assim, objetivamos **apresentar atividades que favoreçam o desenvolvimento de aspectos do pensamento computacional e da estética, particularmente da experiência estética matemática, e discutir como tais aspectos foram observados em iniciativas educacionais de estudos em Educação Matemática**.

A seguir, traçamos considerações sobre estética, experiência estética e experiência estética matemática. Em seguida, discutimos sobre o pensamento computacional, focando em suas características. Por fim, apresentamos três estudos desenvolvidos com foco em diferentes níveis educacionais, salientando as atividades constituídas nos contextos desses estudos e discutindo as características do pensamento computacional e da estética presente nelas e em sua exploração.

2 A Estética e a Experiência Estética (Matemática)

A estética se faz presente em todas as dimensões da vida humana (DEWEY, 1980). Ela pode ser entendida como "[...] a ciência da comunicação sensorial e da sensibilidade." (BOAL, 2009, p. 31). Ela se relaciona à percepção do belo que ocorre na relação do sujeito com o mundo. Essa percepção é fundamental para a organização sensorial da realidade e provoca sentimentos de prazer (BOAL, 2009).

A estética integra o Pensamento Sensível. De acordo com Boal (2009), o sujeito percebe e se relaciona com o mundo por meio de formas complementares de pensamento: o Pensamento Sensível (estético), que é responsável pelas emoções e sentimentos; e o Pensamento Simbólico (noético), que é responsável pela comunicação racional utilizando símbolos, como as palavras (SANCTUM, 2012). Para que o ser humano tenha plena percepção do mundo, a estética e a noética devem atuar conjuntamente, pois "Nenhuma das duas formas de pensar pode proporcionar, sozinha, a mais completa percepção do mundo, da qual só seremos capazes se formos capazes de conjugá-las." (BOAL, 2009, p. 82). Nesse sentido, é preciso valorizar a dimensão estética, inclusive, em espaços educacionais.

Parrish (2009) aponta que a experiência de aprendizagem deve ter, além de qualidades cognitivas, emocionais, sociais, culturais e políticas, também qualidades estéticas. O autor defende que a experiência de aprendizagem pode ser potencializada por meio da construção de contextos de ensino em que possam ocorrer experiências estéticas. Ele considera que uma experiência é um evento subjetivo que o indivíduo vivencia ativamente. A experiência de aprendizagem, nesse sentido, é uma relação ativa com determinado ambiente cujo resultado é a aprendizagem. E a experiência estética é uma experiência intensa, imersiva, significativa, memorável, satisfatória, coerente; é completa em si mesma e impacta o sujeito de forma imediata (DEWEY, 1980; SINCLAIR, 2006; PARRISH, 2009). Esse tipo de experiência, portanto, cria condições convenientes para a aprendizagem.

Como forma de auxiliar o desenvolvimento de experiências estéticas em contextos de ensino, Parrish (2009) traçou cinco princípios para o desenvolvimento de atividades educacionais. No Quadro 1, a seguir, apresentamos e descrevemos tais princípios.

Quadro 1 – Princípios para o desenvolvimento de experiências estéticas

Princípios	Descrição
1. Organização das atividades	As experiências de aprendizagem devem possuir uma **trama**, ou seja, devem ter começo, meio e fim. Essas experiências devem se iniciar por meio de alguma tensão, como a proposição de um problema ou a apresentação de alguma informação conflituosa. Elas também devem criar um sentimento de antecipação; ao antecipar o final ou o resultado da atividade, faz com que haja um sentimento de recompensa quando esse final é alcançado. As atividades ainda não devem ser triviais, para favorecer o engajamento.

2. Papel dos aprendizes	Os aprendizes devem ser protagonistas da aprendizagem. É necessário valorizar e respeitar as individualidades dos estudantes. Além disso, é preciso favorecer o diálogo, pois é por meio dele que os sujeitos revelam seus valores, crenças e conhecimentos.
3. Tema e conceito curricular	É a atividade de aprendizagem que determina o tema do ensino, não o conceito. O tema da experiência de ensino deve ser baseado nos conceitos curriculares, mas devem ir além deles, ou seja, devem estar relacionados aos contextos desses conceitos.
4. Contexto de aprendizagem	O contexto auxilia na imersão da situação de ensino. Deve-se criar um contexto de aprendizagem que conecta os estudantes ao tema, como fazer uso de imagens, materiais manipulativos e tecnologias digitais.
5. Papel do professor	Os professores assumem diversos papéis na experiência de aprendizagem. Eles constroem as atividades, guiam a experiência e, ao mesmo tempo, participam ativamente dela como um aprendiz mais experiente.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A estética, em particular a experiência estética, pode também favorecer a aprendizagem de Matemática, uma vez que pode motivar o aprendizado e auxiliar no entendimento da natureza da Matemática (SINCLAIR, 2006). Ela pode ser também entendida como um elemento essencial, não apenas um olhar, mas um conteúdo intrínseco (CIFUENTES, 2005). Alguns exemplos de valores estéticos da Matemática são: "[...] a perfeição, a simetria, a forma, o contexto, o contraste, a ordem, o equilíbrio, a simplicidade e a abstração, também a liberdade." (CIFUENTES, 2005, p. 8). Corroborando essa ideia, Sinclair (2006) aponta que há elementos estéticos na Matemática associados ao prazer cognitivo, como padronizar e ordenar, e transformar e equilibrar.

Entendemos que a estética no contexto da Educação Matemática pode favorecer a produção de conhecimento, seja por meio de um ensino que se preocupe em tornar a experiência educativa uma experiência estética, seja por meio de um ensino que valorize os aspectos estéticos inerentes à Matemática. Desse modo, concebemos a experiência estética matemática como uma abordagem e um contexto de ensino que busca proporcionar essas condições.

Nesse sentido, Gadanidis *et al.* (2016) e Gadanidis, Clements e Yiu (2018) apresentam contextos de desenvolvimento de experiências estéticas matemáticas em ambientes educacionais, englobando aspectos da experiência estética e da estética da Matemática. Os autores consideram que essas experiências devem possuir os seguintes elementos: a) poder de ação – promover situações educativas em que os estudantes são ativos na aprendizagem; b) acesso – possibilitar aos estudantes o engajamento matemático de conceitos complexos, com pré-requisitos mínimos (*low floor/high ceiling*); c) surpresa – criar condições para que os estudantes possam experienciar a surpresa matemática e o *insight* conceitual; d) sensações viscerais – promover atividades nas quais se possa experienciar a beleza ou estética da Matemática; e, e) audiência – possibilitar que os estudantes compartilhem as experiências para além da sala de aula, o que pode provocar um engajamento vicário. Scucuglia (2020) complementa essa ideia, afirmando que é possível desenvolver experiências estéticas matemáticas no ensino por meio da integração de tecnologias digitais e das artes aos contextos educativos.

Os elementos discutidos podem auxiliar tanto na construção de atividades matemáticas, quanto na avaliação e análise de atividades. Nós utilizaremos essas concepções na discussão dos aspectos estéticos apresentados nos estudos. A seguir, discutimos aspectos do pensamento computacional.

3 Pensamento Computacional

Entendemos que o pensamento computacional é uma habilidade mental e prática envolvida na formulação de problemas, nas suas soluções e no desenvolvimento de computações, como a modelagem de uma situação, de forma que um agente de processamento de informações, como o computador, possa operar e produzir resultados baseados em objetivos externos específicos (WING, 2011; DENNING, TEDRE, 2019; NARDELLI, 2019).

De forma a auxiliar o desenvolvimento e a análise do pensamento computacional em situações educacionais e em pesquisas, instituições e pesquisadores buscam elencar diferentes aspectos desse pensamento. Segundo Wing (2006, 2008), o pensamento computacional envolve o desenvolvimento de competências de resolução e decomposição de problemas, de abstração, de uso de recursos computacionais e algorítmicos, e de identificação de padrões.

A Sociedade Internacional pela Tecnologia na Educação (ISTE – *International Society for Technology in Education*) e a Associação de Professores de Ciência da Computação (CSTA – *Computer Science Teachers Association*) elencaram diferentes habilidades do pensamento computacional para auxiliar professores da Educação Básica no desenvolvimento e integração desse pensamento às suas disciplinas. Essas habilidades são: coleta, análise e representação de dados, decomposição de problemas, abstração, algoritmos e procedimentos, automação, simulação e paralelização (ISTE; CSTA, 2011).

Brennan e Resnick (2012) indicam diferentes dimensões do pensamento computacional, atrelando o desenvolvimento desse pensamento ao contexto da atividade de programação. Eles apontam que o pensamento computacional envolve conceitos, práticas e perspectivas computacionais.

Os **conceitos computacionais** se referem às ideias envolvidas com ambientes e atividades de programação. As ideias apontadas são: a) sequência – série de etapas; b) *loop* (laço) – recurso para a realização de atividades múltiplas vezes; c) evento – recurso que comanda a realização de determinada ação; d) paralelismo – mecanismo que possibilita a realização de instruções simultaneamente; e) condicional – recurso que aplica condições para a realização de ações; f) operador – mecanismo que possibilita a utilização de relações e lógicas matemáticas; e, g) dados – recurso de armazenamento, recuperação e atualização de valores.

As **práticas computacionais** se relacionam com as atividades realizadas na utilização dos conceitos. As práticas apontadas são: a) ser incremental e iterativo – o processo de programação ocorre envolvendo modificações constantes no plano inicial, com base nas experiências e ideias que vão surgindo; b) testar e depurar – uso de diferentes estratégias para lidar com situações problemáticas, como uso de tentativa e erro, transferência de outras atividades e suporte de outros indivíduos; c) reutilizar e remixar – ler e utilizar programas de outros sujeitos como meio de facilitar a construção de programas próprios; e, d) abstrair e modularizar – construção de projeto complexo utilizando partes menores e gerenciáveis.

As **perspectivas computacionais** estão relacionadas às concepções que os sujeitos constroem sobre o mundo e sobre si. O pensamento computacional envolve as seguintes perspectivas: a) expressão – entendimento da tecnologia digital como meio de produção ou criação; b) conexão – interação social com outros sujeitos, por meio do trabalho colaborativo ou da relação com público consumidor do produto; e, c) questionamento – conexão com tecnologias digitais, entendimento de seu funcionamento e consequente uso delas para solucionar problemas do dia a dia.

Gadanidis (2017) apresenta outras características acerca dos elementos do pensamento computacional. Ele aponta cinco aspectos desse pensamento, particularmente da atividade de programação, que auxiliam o ensino e a aprendizagem de Matemática. São eles: a) poder de ação – estudantes têm controle sobre a atividade e podem explorá-la de acordo com seus interesses; b) acesso – por meio da programação é possível explorar conceitos complexos com poucos pré-requisitos; c) abstração –

desenvolvimento de modelos computacionais que capturem e abstraiam características essenciais de processos e conceitos; d) automação – utilizar modelos para realizar processos mecânicos e repetitivos; e, e) audiência – possibilidade de compartilhar modelos. Os aspectos “poder de ação”, “acesso” e “audiência” são também apontados por Gadanidis, Clements e Yiu (2018) como essenciais para o desenvolvimento de experiências estéticas matemáticas.

Considerando as habilidades elencadas por ISTE e CSTA (2011), as dimensões apontadas por Brennan e Resnick (2012), particularmente os conceitos, e os aspectos indicados por Gadanidis (2017), Barbosa (2019) definiu cinco aspectos do pensamento computacional. São eles: a) pensamento algorítmico – expressar a solução de um problema em etapas sequenciais e finitas; b) decomposição e generalização – transformar uma tarefa complexa em tarefas menores e mais simples, e transferir o método de solução de um problema para outros problemas; c) padrões e abstração – identificar regularidades e lidar com a complexidade, focando nos elementos essenciais; d) representação e automação – reproduzir ideias e conceitos de forma, dentre outras, dinâmica e visual, e usar de mecanismos que possibilitam a realização de processos repetitivos e mecânicos; e, e) avaliação – julgar soluções com base em critérios relacionados à eficácia e ao uso de recursos.

Com base nos elementos do pensamento computacional destacados, discutiremos os aspectos dessa forma de pensamento observados em atividades de Matemática direcionadas a estudantes de diferentes níveis de ensino. A seguir, apresentamos os estudos supracitados, com foco nessas atividades e nos aspectos estéticos e do pensamento computacional observados.

4 Pensamento Computacional e Estética em Atividades Educacionais

As atividades que apresentamos foram construídas em contextos e estudos distintos. O primeiro estudo focou no desenvolvimento de experiências estéticas e do pensamento computacional em atividades sobre **Simetria** para sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental. No segundo estudo, que se encontra em andamento, houve o desenvolvimento de atividades sobre **Padrões** dirigidas para oitavo e nono anos. O terceiro estudo, por sua vez, teve como contexto o desenvolvimento de atividades sobre **Fractais** com estudantes de Matemática do Ensino Superior. Essas atividades e estudos são apresentados em seguida.

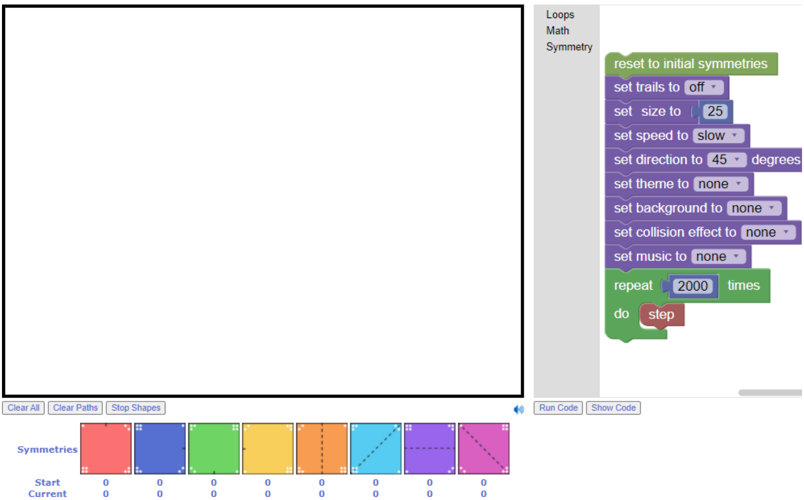
4.1 Simetria

Esse estudo foi desenvolvido em uma Iniciação Científica e contou com o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico). Para o desenvolvimento das atividades no contexto dessa pesquisa, foi utilizado o aplicativo *Bumper Symmetries with Squares* (Simetrias de “bate-bate” com quadrados), elaborado por Gadanidis e Yiu (2017a).

O objetivo da pesquisa foi compreender o uso educacional desse aplicativo *online*, que é voltado ao estudo de simetrias de translação, rotação e reflexão em aulas de Matemática. Essa pesquisa visou responder às seguintes perguntas: *Como as mídias digitais podem ser utilizadas no ensino de simetrias? Que atividades matemáticas podem ser elaboradas visando o uso do aplicativo “Bumper Symmetries with Squares”?* Para atingir esse objetivo e responder às questões colocadas, foram realizadas traduções dos desafios propostos no aplicativo, assim como a resolução desses desafios, a produção de atividades para estudantes do Ensino Fundamental e a elaboração de resoluções das atividades produzidas.

O *Bumper Symmetries with Squares* possibilita explorar a ideia de simetria a partir de transformações. Na Figura 1, a seguir, apresentamos seu ambiente de exploração. Ele é composto por uma área de execução (à esquerda), diferentes quadrados que podem ser selecionados para compor essa área (abaixo da área de execução), e um código de programação construído no Blockly (à direita), que determina o comportamento desses quadrados na execução.

Figura 1 – Ambiente de exploração do aplicativo *online*



Fonte: Gadanidis e Yiu (2017a).

Os quatro primeiros quadrados, de cores vermelho, azul, verde e amarelo, representam simetrias de rotação de 0, 90, 180 e 270 graus, respectivamente. Os quadrados restantes, de cores laranja, ciano, roxo e rosa, representam simetrias de reflexão de acordo com os eixos ilustrados. Diferentes quadrados podem ser selecionados e, conforme os parâmetros expressos no código de programação, eles se movem, colidem e realizam transformações geométricas, representadas por mudanças nas cores dos quadrados. Por meio desse código é possível escolher se, ao se moverem, os quadrados deixarão trilhas (*set trais to* [ ]) no ambiente de exploração e é possível alterar o tamanho dos quadrados (*set size to* [ ]), a velocidade com que os quadrados se movem (s*et speed to* [ ]), a direção da movimentação (*set direction to* [ ] *degrees*), o tema (imagem) dos quadrados (*set theme to* [ ]), o tema de fundo da área de execução (*set background to* [ ]), o efeito exibido quando ocorre colisão entre os quadrados (*set collision effect to* [ ]), a música emitida ao executar o programa (*set music to* [ ]), e a quantidade de vezes que os quadrados se movem até o fim da execução (*repeat* [ ] *times*, *do* {*step*}).

Considerando as possibilidades do aplicativo, foram elaboradas quatro atividades para serem desenvolvidas junto a estudantes do sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental. A primeira atividade propõe a exploração da execução do código de programação, mediante a seleção de um quadrado vermelho e um quadrado azul, que representam simetrias de rotação. Os estudantes devem observar, analisar e indicar o que acontece com os quadrados quando eles colidem. Em seguida, devem explorar os diferentes blocos, com o intuito de conhecer suas funcionalidades. Na segunda atividade, ainda utilizando os quadrados vermelho e azul, é proposto que ocorra a observação e análise da execução quando a direção (bloco *"set direction to [ ] degrees"*) tem angulação zero. Na terceira atividade, os estudantes são convidados a selecionar dois quadrados, diferentes dos já analisados, e observar o que acontece quando o aplicativo é executado. A quarta atividade propõe que sejam selecionados os quadrados amarelo (rotação) e laranja (reflexão) e que seja observado o efeito da execução quando a angulação é 45 graus. O roteiro dessas atividades pode ser acessado por meio do endereço: https://cutt.ly/GcT710p.

O aplicativo, em conjunto com as atividades, possibilita a experimentação-com-tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Nesse tipo de abordagem, o estudante explora atividades investigativas, elabora conjecturas, realiza testes, verifica hipóteses, usa diversas estratégias e formas de resolver problemas (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). Essa abordagem se relaciona à experiência estética e ao pensamento computacional por possibilitar o poder de ação do estudante, sua imersão no contexto educacional e a prática de teste e depuração.

Ao se engajar nas atividades e na experimentação-com-tecnologias, os estudantes devem pôr em prática as habilidades de coleta e análise de dados, além de serem capazes de identificar padrões. Esse aspecto, além de se relacionar ao desenvolvimento do pensamento computacional (WING, 2008; BASAWAPATNA *et al.*, 2011; BARBOSA, 2019) e à estética (CIFUENTES, 2005; SINCLAIR, 2006), é também essencial para a aprendizagem da Matemática (BRASIL, 1998, 2018).

O aplicativo e as atividades ainda possibilitam a abordagem de aspectos estéticos relacionados às artes, como cor, movimento e som. E, por meio das transformações geométricas, representadas através da alteração das cores dos quadrados quando se colidem, é possível que os estudantes experienciem a surpresa matemática. Além disso, a própria temática – simetria – também está relacionada à estética da Matemática.

Considerando os conteúdos curriculares, as atividades possibilitam que sejam abordados aspectos de geometria, como figuras planas, simetria, translação, rotação, reflexão e noção de ângulo. Além disso, as atividades propiciam o uso da tecnologia digital para a abordagem de conceitos matemáticos e de aspectos do pensamento computacional, permitindo o desenvolvimento do raciocínio e o exercício da comparação, da observação e da identificação de regularidades. Essas ideias estão consoantes com os objetivos expressos pela BNCC (BRASIL, 2018) para o sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental. A seguir, apresentamos o estudo realizado a partir da temática padrões.

4.2 Padrões

O estudo de doutoramento em andamento busca compreender os conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver problemas e construir padrões no Scratch. Para isso, houve o desenvolvimento de duas simulações nesse programa, adaptadas dos aplicativos de Gadanidis e Yiu (2017b), que possibilitam a construção de padrões dinâmicos de repetição de formas, cores e sons. Participaram do estudo doze estudantes de oitavo e nono anos do Ensino Fundamental de duas escolas públicas municipais de uma cidade no interior do estado de São Paulo.

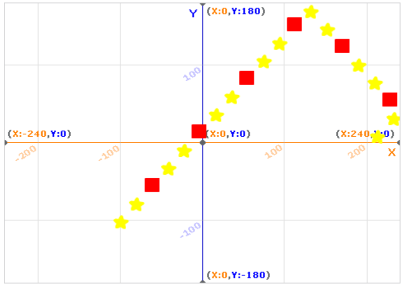
A produção de dados do estudo se deu por meio da realização de Experimento de Ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000) com os estudantes, o qual ocorreu em três encontros, em média. Os encontros foram realizados no contraturno das aulas, nos quais, os participantes trabalharam em duplas explorando as simulações, resolvendo problemas propostos e construindo padrões.

As simulações desenvolvidas possibilitam a construção de padrões de repetição dinâmicos. Com a simulação 1, é possível construir padrões lineares. E com a simulação 2, padrões bidimensionais. Na Figura 2, apresentamos imagens do programa da simulação 1 (Figura 2a), de um padrão linear (Figura 2b), do programa da simulação 2 (Figura 2c) e um padrão bidimensional (Figura 2d). Há ainda códigos de acesso à vídeos que possibilitam observar e ouvir a construção desses padrões. Os vídeos também estão disponíveis nos endereços: a) padrão linear – https://cutt.ly/hcG78y8; b) padrão bidimensional – https://cutt.ly/xcG5hwL.

Figura 2 – Programas e padrões

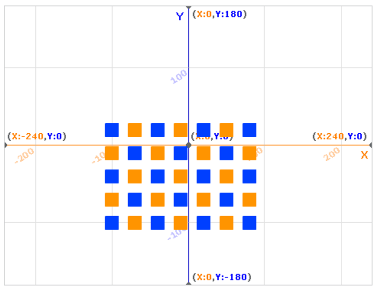
a) Simulação 1

b) Padrão linear e código



c) Simulação 2

d) Padrão bidimensional e código



Fonte: Adaptado de Idem (2020, p. 7).

A construção de padrões ocorre por meio da modificação nas entradas dos blocos, assim como na edição, em termos de inclusão e exclusão de blocos, dos programas das simulações. Na interação com esses programas, é possível se relacionar intuitivamente com conceitos computacionais. Dentre eles, se destacam: sequência, por meio da organização sequencial dos blocos; evento, como o indicado pelo bloco "quando clicar em ", que comanda o início da construção do padrão; *loop* (laço), que ocorre no bloco "repita [ ] vezes", o qual determina a quantidade de elementos na simulação 1 e, similarmente, na simulação 2, na qual o conjunto de blocos do tipo "repita [ ] vezes" possibilita um *loop* dentro de um *loop* (*nested loop*) e determina a quantidade de linhas e colunas do padrão bidimensional, assim como o espaçamento e a ordem da construção vertical. Além desses, o conceito de dados como recurso de armazenamento, recuperação e atualização de valores também é explorado, principalmente, mediante os possíveis valores numéricos e nominais a serem utilizados nas entradas dos blocos. Em relação ao conceito de *nested loop,* Scucuglia *et al.* (2020) discutem que sua abordagem em um contexto que envolve a experimentação e a exploração de elementos artísticos possibilita o desenvolvimento de um pensamento sensível-computacional.

As simulações foram utilizadas na realização de três atividades. A trama da primeira atividade consistiu em, inicialmente, explorar a simulação 1, por meio da formulação de hipóteses, de testes e da determinação de conclusões sobre o funcionamento dos blocos. Essa etapa se relaciona com a perspectiva computacional de questionamento, pois, por meio dessa tarefa, os participantes puderam entender o funcionamento da tecnologia digital, nesse caso, a simulação do Scratch.

Após a exploração, os participantes se engajaram na resolução de problemas de construção. Assim, foram apresentadas diferentes imagens de padrões, as quais os participantes deveriam reproduzir utilizando a simulação. Essa tarefa possibilitou a exploração da ideia de antecipação, uma vez que os estudantes, ao iniciar a tarefa, sabiam o objetivo que deveriam alcançar, o que também auxiliou no engajamento. Embora os padrões fossem predeterminados, nessa tarefa, os participantes também puderam exercer poder de ação, uma vez que estava em sua responsabilidade as ações e rumos a serem tomados na resolução dos problemas. O poder de ação foi ainda mais exercido na última tarefa, na qual, os participantes eram convidados a construírem seus próprios padrões. Nessa situação, os estudantes também assumiram o papel de propositores dos problemas.

A segunda atividade ocorreu de forma similar à primeira. Nessa atividade, os estudantes puderam explorar, resolver problemas e construir padrões utilizando o mecanismo de execução de mais de um programa ao mesmo tempo, ainda utilizando a simulação 1. Essa ideia se relaciona à habilidade de paralelização e ao conceito de paralelismo. Na terceira atividade houve a exploração e utilização da simulação 2. Nela, os participantes, inicialmente, buscaram compreender o *nested loop* e, a partir disso, resolveram problemas utilizando esse conceito, assim como o de paralelismo, e construíram seus próprios padrões.

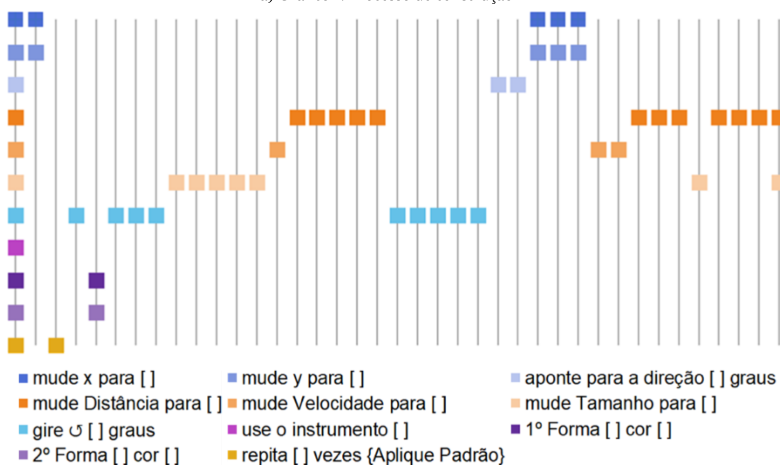
O padrão, que foi tema das atividades, pode ser considerado um conceito central e transversal da Matemática (DEVLIN, 1998), além de se relacionar com a estética da Matemática (CIFUENTES, 2005). Além do uso de padrões, o contexto de exploração foi enriquecido por aspectos artísticos como formas, cores e sons, que foram responsáveis pelo estímulo das sensibilidades estéticas dos estudantes.

Em relação aos conteúdos curriculares de Matemática, por meio das atividades, pôde-se abordar: ângulos, operações com números inteiros, representação no plano cartesiano, identificação de regularidades em sequências, entendimento da reta numérica e noções introdutórias de função (SÃO PAULO, 2019). Embora esses conceitos façam parte do currículo da Educação Básica, entendemos que as atividades estão em consonância com o aspecto relativo ao acesso (*low floor/high ceiling*), uma vez que o entendimento dessas ideias ocorre de forma intuitiva e espontânea, sem necessidade de instrução.

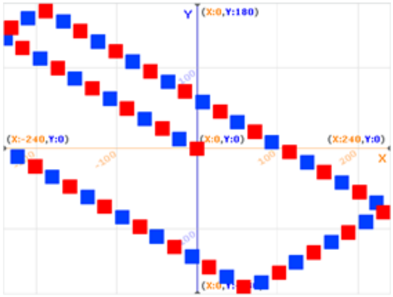
Os resultados preliminares do estudo apontam que os estudantes, no processo de resolução, intuitivamente, assumiram uma estratégia de decomposição de problemas. Assim, para construir os padrões propostos, os participantes se empenhavam em conseguir construir uma característica de cada vez. Esse processo de decomposição se relacionou também com práticas de ser incremental e iterativo e de teste e depuração. Para ilustrar, apresentamos o Gráfico 1 (Figura 3a). Nele, busca-se representar as modificações ocorridas nos blocos por uma dupla de estudantes do oitavo ano, para construir o padrão proposto apresentado na Figura 3b. Na Figura 3, a seguir, apresentamos o gráfico e o problema de construção supracitados.

Figura 3 – Resultados preliminares

a) Gráfico 1. Processo de construção



b) Problema de construção



Fonte: As autoras.

Na primeira linha vertical esquerda do Gráfico 1 estão representados os blocos disponíveis no programa (simulação 1) para a construção. Da segunda linha vertical, no sentido esquerda-direita, estão representadas todas as modificações ocorridas. Cada linha vertical representa uma execução. Assim, podemos observar que a dupla de estudantes iniciou a construção modificando os blocos “mude x para [ ]” e “mude y para [ ]”, mas, após a modificação de outros parâmetros, voltaram a modificá-lo (ser incremental e iterativo). Ao observarmos, por exemplo, as modificações realizadas no bloco “gire ↺ [ ] graus”, também observamos esse movimento, além de verificar que houve a necessidade de várias execuções para determinar o valor (teste e depuração). A seguir, apresentamos o estudo realizado a partir da exploração com fractais.

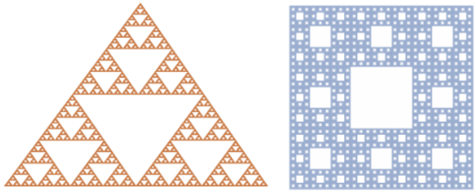
4.3 Fractais

Esse estudo faz parte de uma pesquisa de mestrado cujo objetivo foi investigar como estudantes de graduação em Matemática exploram a Geometria Fractal utilizando o GeoGebra (https://www.geogebra.org/). Especificamente, procurou-se analisar como os aspectos do pensamento computacional se manifestaram nos estudantes ao construírem os fractais Triângulo, Tetraedro e Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger no *software*. Participaram do estudo seis estudantes do primeiro ano da graduação em Matemática[1] da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Campus Rio Claro.

Assim como o estudo sobre padrões no Scratch, a produção de dados também se deu por meio da realização de Experimento de Ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000). Nesse estudo, foram realizados quatro encontros, nos quais, os estudantes trabalharam em duplas em atividades que visaram explorar e analisar propriedades dos fractais mencionados, bem como construí-los.

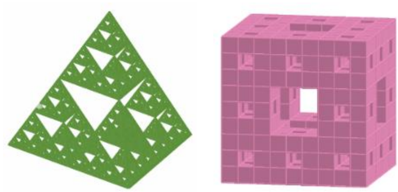
As quatro atividades foram pensadas para que os alunos se dedicassem à manipulação, exploração e investigação dos padrões fractais, buscando identificar aspectos comuns e visando alcançar a generalização das características dos fractais apresentados. As atividades tinham questões em comum, variando apenas em relação ao fractal a ser estudado e se sua exploração era na Janela de Visualização 2D do *software*, no caso do Triângulo de Sierpinski e do Tapete de Sierpinski, ou na Janela de Visualização 3D, no caso do Tetraedro de Sierpinski e da Esponja de Menger. Todas as atividades também contavam com um texto introdutório sobre o fractal a ser explorado e ao final solicitavam sua construção no *software* GeoGebra juntamente com a criação de um *GIF*[2]. A Figura 4 apresenta os fractais analisados e construídos durante os encontros.

Figura 4 – Triângulo, Tetraedro e Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger



[1] Os participantes ainda não haviam optado pela modalidade Licenciatura ou Bacharelado.

[2] *Graphics Interchange Format* (Formato de Mudança de Gráficos) é uma imagem digital animada constituída por diversas imagens que se alteram sequencialmente.



Fonte: As autoras.

A partir da construção de diagramas, baseados nos aspectos heurísticos de Schoenfeld (1992) em processos de resolução de problemas, algumas evidências em relação aos aspectos do pensamento computacional (BARBOSA, 2019) se fizeram presentes no decorrer da resolução das atividades propostas.

Durante a construção dos fractais no GeoGebra, o pensamento algorítmico emergiu nos momentos em que os estudantes buscavam encontrar uma resolução para o problema, através da identificação e elaboração de sequências, dividindo-a em etapas. Observações como "*Mas se eu colocar para ele criar um [ponto] C quando eu selecionar o [ponto] A e o [ponto] B ele vai criar um [ponto] C que vai sobrepor o [ponto] F.*" foram realizadas pelas duplas. Dessa forma, os estudantes expressaram os passos lógicos de um processo ao indicar diversas ações e decisões que deveriam ser executadas para resolver o problema de forma eficaz.

Ao pensar nos fractais a partir de suas características e identificar os elementos que o constituem, os estudantes ponderaram sobre os componentes do produto e sobre a junção deles. Assim, os participantes realizaram a decomposição e generalização do problema, uma vez que os fractais foram gerados aplicando estratégias de resoluções em termos genéricos, ou seja, seu processo de resolução pode ser compartilhado em problemas futuros.

Ao aplicar estratégias já conhecidas e avaliadas como corretas, os estudantes detectaram uma regularidade no processo de construção dos fractais através das ferramentas do GeoGebra. Falas como "*Tá, agora é o mesmo esquema, na verdade é tudo o mesmo esquema, tudo a gente já fez*" caracterizaram o aspecto padrões e abstração durante o processo de reflexão e decisão das duplas, uma vez que interpretaram o comando e o julgaram adequado para as construções dos fractais, concentrando-se em conceitos relevantes para a compreensão e solução da atividade.

Ao utilizar o GeoGebra, julgamos que a representação e automação foram favorecidas. O comando "Criar Nova Ferramenta" foi utilizado por todas as duplas e permitiu a automatização nos processos de construção durante as atividades, possibilitando que tarefas repetitivas, como as iterações de um fractal, fossem realizadas de forma mecânica. Além disso, o aspecto avaliação também integrou o processo de realização das atividades, o qual é caracterizado pelo julgamento dos processos de criação, em termos de utilização e eficiência dos recursos disponíveis e utilizados, durante a tomada de decisões com o objetivo de alcançar resultados. Esse aspecto se fez presente durante toda a atividade, se intensificando nos momentos finais para a geração do *GIF,* revelando que o processo de analisar os resultados obtidos é uma forma de avaliar. Os fractais, criados no GeoGebra pelos estudantes durante as atividades, podem ser acessados através do *QRCode* a seguir (Figura 5) ou através do *link* (https://cutt.ly/gcT7LQk).

Figura 5 – *QRCode* que dá acesso aos *GIF* criados

Fonte: Gerado a partir de https://br.qr-code-generator.com/.

Os momentos que antecederam a finalização dos *GIF*, mostraram que a experiência estética foi marcada pela antecipação emocional e ânimo para concluir a atividade, o que pode ser interpretado como o aspecto referente à sensação visceral. Em uma de suas falas, durante a construção do Triângulo de Sierpinski, uma estudante diz: "*Queria fazer umas vinte, imagina que legal, ia tender a um triângulo branco. Um triângulo azul tendendo a um triângulo branco*", o que apresenta uma ideia sobre o conceito matemático de limite, de forma simples e com liberdade para contextualizá-lo.

Considerando as atividades propostas, a apreciação final do Experimento de Ensino se deu no âmbito do nível de consciência que os estudantes tiveram sobre as ferramentas computacionais do GeoGebra e sobre as características e elementos de objetos fractais. Assim, notamos que o ambiente computacional pode potencializar o pensamento dos indivíduos, de forma especial o pensamento computacional e a experiência estética, liberando-os para atividades imersivas de planejamento e criação, em que é possível produzir situações que os instiguem e desafiem.

5 Considerações Finais

Este capítulo objetivou apresentar atividades que favoreçam o desenvolvimento de aspectos do pensamento computacional e da estética, particularmente da experiência estética matemática, e discutir como tais aspectos foram observados em iniciativas educacionais de estudos em Educação Matemática. Assim, discorremos sobre esses aspectos e apresentamos três estudos ocorridos em diferentes níveis de ensino que buscaram oferecer contextos educacionais que possibilitassem o desenvolvimento do pensamento computacional por meio de uma experiência estética de aprendizagem.

O primeiro estudo buscou abordar a ideia de simetria, utilizando um contexto de programação visual por blocos, em atividades matemáticas voltadas para o sexto e o sétimo anos do Ensino Fundamental. O segundo estudo explorou a noção de padrão, também em um contexto de programação por blocos, junto a estudantes do sétimo e oitavo anos. O terceiro estudo abordou conceitos e a construção de fractais utilizando um programa de Matemática Dinâmica, com estudantes do Ensino Superior do curso de Matemática.

Por meio desses estudos, ponderamos que, utilizando diferentes temáticas, é possível construir contextos educacionais que possibilitem abordar conteúdos matemáticos integrados a aspectos de outras áreas do conhecimento, nesse caso, computacionais e estéticos. Sendo assim, destacamos que conjuntamente ao desenvolvimento da capacidade matemática, podemos desenvolver habilidades que têm sido consideradas necessárias a todos, além de explorar uma dimensão que, embora importante para a completude da experiência humana, é pouco considerada em contextos educacionais, principalmente nos que estão ligados à Matemática.

Esperamos que as reflexões aqui apresentadas, abram possibilidades e caminhos para a inserção e integração de investigações no que se refere ao pensamento computacional e a estética na Educação Matemática.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

BARBOSA, L. M. *Aspectos do pensamento computacional na construção de fractais com o software GeoGebra*. 2019. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2019.

BASAWAPATNA, A.; KYU, H.; KOH, K. H.; REPENNING, A.; WEBB, D. Recognizing computational thinking patterns. *In*: ACM TECHNICAL SYMPOSIUM ON COMPUTER SCIENCE EDUCATION, 42., mar. 2011, Dallas. *Proceedings* [...]. New York: Association for Computing Machinery, 2011. p. 245-250.

BOAL, A. *A estética do oprimido*. Rio de Janeiro: Garamond, 2009.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. S. R; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: Internet e sala de aula em movimento. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*: information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation. New York: Springer Science, 2005.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRENNAN, K.; RESNICK, M. New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *In*: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 70., 2012, Vancouver. *Proceedings* [...]. Vancouver: AERA, 2012. p. 1-25.

CIFUENTES, J. C. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, 2005.

DENNING, P. J.; TEDRE, M. *Computational Thinking*. Cambridge: The MIT Press, 2019.

DEVLIN, K. *Introduction to Mathematical Thinking*. Palo Alto: Keith Devlin, 2012.

DEWEY, J. *Art as experience*. New York: G.P. Putnam's Sons, 1980.

GADANIDIS, G. Five affordances of computational thinking to support elementary mathematics education. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, Norfolk, v. 36, n.2, p. 143-151, 2017.

GADANIDIS, G.; BORBA, M.; HUGHES, J.; LACERDA, H. D. Designing aesthetic experiences for young mathematicians: A model for mathematics education reform. *International Journal for Research in Mathematics Education*, [*s.l.*], v. 6, n. 2, p. 225-244, 2016.

GADANIDIS, G.; YIU, C. *Bumper Symmetries with Squares*. 2017a. Disponível em: https://mathsurprise.ca/apps/sym/bumper-squares/. Acesso em: 26 jan. 2021.

GADANIDIS, G.; YIU, C. *Repeating Patterns + Code + Art* .... 2017b. Disponível em: https://mathsurprise.ca/apps/patterns/v2/. Acesso em: 20 out. 2019.

GADANIDIS, G.; CLEMENTS, E.; YIU, C. Group Theory, Computational Thinking, and Young Mathematicians. *Mathematical Thinking and Learning*, [*s. l.*], v. 20, n. 1, p. 32-53, 2018.

IDEM, R. C. Resolução de problemas em um ambiente digital. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 34., 2020, Cascavel. *Anais* [...]. Cascavel: UNIOESTE, 2020. P. 1-12.

ISTE; CSTA. *Computational thinking*: Teacher resources. 2. ed. [*S. l.*]: Computer Science Teachers Association (CSTA), International Society for Technology in Education (ISTE), 2011.

NARDELLI, E. Do We Really Need Computational Thinking? *Communications of the ACM*, New York, v. 62, n. 2, fev. 2019.

PARRISH, P. Aesthetic principles for instructional design. *Educational Technology Research and Development*, Washington, v. 57, p. 511–528, 2009.

SÃO PAULO. *Currículo Paulista*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2019.

SANCTUM, F. Pensamento Sensível e Pensamento Simbólico – Uma Concepção Boalina da Arte. *In*: CONGREÇO DA ABRACE, 7., Porto Alegre. *Anais* [...]. Porto Alegre: ABRACE, 2012. p.1-4.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *In*: GROUWS, D. (ed.). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan, 1992. p. 334-370.

SCUCUGLIA, R. On music production in mathematics teacher education as an aesthetic experience. *ZDM*, Berlim, v. 52, p. 973-987, 2020.

SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G.; RONDINI, C. A.; BORBA, M. C.; HUGHES, J. M. Sensitive-Computational Thinking of Pre-Service Mathematics Teachers on Nested Loops. *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande, v.13, n. 32, p. 1-18, 2020.

SINCLAIR, N. *Mathematics and Beauty*: Aesthetic Approaches to Teaching Children. New York: Teachers College, 2006.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *In*: LESH, R.; KELLY, A. E. (ed.). *Research design in mathematics and science education.* Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

VALENTE, J. A. Pensamento Computacional, Letramento Computacional ou Competência Digital? Novos desafios da educação. *Revista Educação e Cultura Contemporânea*, Rio de Janeiro, v. 16, n. 43, p. 147-168, 2019.

WING, J. M. Computational thinking. *Communications of the ACM*, New York, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

WING, J. M. Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, London v. 366, n. 1881, p. 3717-3725, 2008.

WING, J. M. Research notebook: Computational thinking – What and Why? *The Link*, Pittsburgh, n.p., 2011.

Capítulo 5

Estética, Documentos Curriculares e Educação Matemática: Provocações Sobre Gênero e Sexualidade nos Cadernos Aprender Sempre

Igor Micheletto Martins
Deise Aparecida Peralta
Harryson Júnio Lessa Gonçalves

Notas iniciais...

Dizem que não sou homem (xii!)
Nem tampouco mulher
Então olha só, doutor!
Saca só que genial
Sabe a minha identidade?
Nada a ver com xota e pau!
Viu?
- Linn da Quebrada[1]

Este capítulo se propõe a fazer um percorrido sobre estética, educação matemática e diversidades de gênero e de sexualidade, recorrendo a uma interlocução com Herbert Marcuse, Sigmund Freud e Judith Butler. Na obra desses autores buscamos elementos para sustentar uma crítica cultural a documentos curriculares para Educação Matemática, para além do ensino de matemática, no que se refere ao binarismo[2] empregado nos

[1] LINN DA QUEBRADA. **Pirigoza**. São Paulo: Estúdio YB Music, 2017. Disponível em: https://bit.ly/2OQ52Ta. Acesso em: 15 de abr. 2021.

[2] Ao falar em binarismo estamos a nos referir ao que não aceita a existência de um amplo espectro, na matriz de gênero, entre o feminino e o masculino. A não-binaridade concebe que esse espectro é extremamente amplo – e ainda maior quando observamos gêneros que não se enquadram na linearidade entre os polos masculinos e femininos desse espectro. (REIS; PINTO, 2016).

corpos. Para ilustrar o que estamos a defender, propomos uma conversa sobre um dos Cadernos do Aluno do Currículo Paulista[3].

O processo de escrita deste texto contou com a companhia de Linn da Quebrada, a arte dessa artista se manteve ressoando nos nossos ouvidos. As músicas da artista, que se autointitula uma *terrorista de gênero*, são de caráter provocativo e desafiam as normas que regulam o gênero e a sexualidade. Uma música, em específico, se destacou: *Pirigoza* (LINN DA QUEBRADA, 2017), de cuja letra retiramos o título deste capítulo. Nessa música, Linn da Quebrada (2017) nos convida a entender a sua identidade não em correspondência com a genitália, mas para além de normatividades, incluindo as estéticas. A artista utiliza batidas rítmicas do gênero *funk brasileiro* como resistência, desafia e nos intima a enxergar as "arapucas" da matriz de inteligibilidade cultural de gênero. Arapuca, no sentido literal mesmo, de uma armadilha para caçar, uma emboscada, uma cilada, uma armação para surpreender.

Linn da Quebrada também nos convoca a conhecer as vias de constituição do gênero em algumas de suas produções. O que é uma mulher "de verdade"? E um homem "de verdade"? Será que a genitália é o fator fundante das identidades de gênero? Quais os motivos de sexualidades, que divergem da heterossexualidade, serem consideradas perversas? As estéticas expressas podem reforçar padrões normativos excludentes?

A arte de Linn da Quebrada, envolvente e subversiva, para os autores deste texto, se mostra potente para tematizar e problematizar relações de gênero e sexualidade, bem no sentido que Takara (2017) coloca:

> [Em sua música,] [...] Linn enviadesce, chama as transviadas, sapatões, causa furor entre diferentes formas de ser. A terrorista de gênero esfrega em nossa

---

[3] Trata-se de um dos materiais de apoio ao "Currículo Paulista", apresentando-se na forma apostilada com um conjunto de "Situações de Aprendizagem".

> cara com sua "bunda na nuca" como estamos acostumados a aceitar migalhas e pequenos milímetros no processo de enfrentamento diário a homofobia, ao machismo, ao sexismo e as diferentes formas de opressão. A artista, bicha, transviada, preta e favelada, da quebrada, explode em gargalhadas. Ela nos quer sentindo a vergonha de estarmos coniventes com sistemas de opressão. Ela aponta o dedo para os nossos privilégios. A masculinidade hegemônica que pregamos, o centrismo branco que sustentamos, a lógica heteronormativa que alimentamos (TAKARA, 2017, p. 9).

Linn nos "esfrega na cara" outras estéticas para pensar gênero e sexualidade como possibilidade de "ferver" (VENCATO, 2002) na Educação Matemática.

O que estamos a dizer quando falamos "estética"

Bixa travesty de um peito só
O cabelo arrastando no chão
E na mão sangrando um coração
- Linn da Quebrada[4]

O que é uma pessoa bixa e uma pessoa travesti? O que é uma pessoa bixa travesti? E uma pessoa bixa travesti com um peito só? Isto é, existe uma estética possível e imaginável – exceto aquelas patologizantes tais como estranho, desviante e anormal – para corpos que escapam das arapucas de gênero e sexualidade? São com esses questionamentos que ousamos buscar em estética uma possível resposta.

O termo "estética", segundo Marcuse (1977), pode ser relacionado a palavra grega *aísthesis* que nos remete a sentimento, sensação ou sensação sensível, em significados que antagonizam com racional. Para esse autor a estética é um elemento fundamental para o processo

[4] LINN DA QUEBRADA. **Bixa Travesty**. São Paulo: Estúdio YB Music, 2017. Disponível: https://bit.ly/3dj97sz. Acesso: em 15 abr. 2021.

revolucionário da consciência e do comportamento das pessoas. Em uma linguagem hegeliana, usada pelo próprio Marcuse (1975), o libertar do espírito absoluto[5]. Assim o sendo, estética está intimamente ligada ao que se faz aparente, mas com poder de revelar a essência das coisas. Essência aqui é entendida não como um campo metafísico, e sim como desvelamento das questões subjacente a uma verdade em bases dialéticas, em meio às contradições internas e externas.

Para Granja (2005), a dimensão estética do mundo e das coisas se caracteriza pelas sensações e sentimentos, se materializa na integração das atividades subjetivas e objetivas e pode ser acessada pelas produções da sensibilidade nas relações sobre o conhecimento, a razão e a ética, a partir da capacidade de apreensão e de expressão.

Estética permeia todas as áreas de conhecimento, todas as dimensões do ser e ao longo dos séculos, sua história se confunde com a história da cultura, integrando esferas religiosas, políticas e sociais, em todos os domínios – da arquitetura à vestimenta, da culinária ao armamento, da caracterização de subjetividades à padronização de sociedades, preenchendo funções socialmente importantes (FREUD, 2006a).

Desde o século XVIII a estética vem sendo pensada como parte da natureza do sujeito, esfera na qual pensamento e sentimento se reconciliam. A forma, como as coisas se apresentam, enquanto efeito de sublimação[6], ou seja, de perturbar, de comover e de indicar para além da imagem, sendo a intensidade que lança o sujeito do desejo. O sentimento em relação à forma decorre do julgamento daquilo que a imaginação ou intuição apreende, antes que o entendimento possa fornecer um conceito.

---

[5] Hegel (1980) compreende como espírito absoluto a experiência da arte, da religião e da filosofia. Sendo a arte a expressão, por excelência da dimensão estética do mundo social e o primeiro momento de afirmação do espírito absoluto. O pensamento estético de Hegel é a base do pensamento sobre estética de Marcuse, para quem a dimensão estética tem a função de possibilitar a consciência de si.

[6] Sublimação é um conceito já utilizado na filosofia antes de Freud o carregar com sua perspectiva psicanalítica.

A experiência estética é um processo dialético que permite

> ao espírito tomar consciência do mundo (nas representações) e de si mesmo (na apresentação dessas representações), sendo ainda entendida como possibilidade de estudo dos esconderijos profundos do ser, da essência que se esconde por trás do sujeito adequado à sociedade a qual pertence. (CAVALCANTI; POLI, 2011, p. 219).

A partir de percepções que se transformam em sensações, evoluindo para sentimentos, as pessoas constroem conceitos de mundo e de seu próprio comportamento nesse mundo. E cada sujeito expressa uma estética distinta e também reage distintamente à interação com as diversidades de estéticas e aprende a aceitar ou rejeitar estéticas, conforme é exposto a sensações e sentimentos experienciados pela interação com elas, e constrói conceitos conforme essas experiências são materialmente oportunizadas (MARCUSE, 1975).

No discurso de Sigmund Freud, a preocupação com a estética aparece no “O estranho”[7], de 1919. Logo no início do texto afirma que “a estética se entende não simplesmente a teoria acerca da forma do belo, mas a teoria das qualidades do sentir” (FREUD, 2006d, p. 237), demonstrando que seu tema privilegiado é a análise do impacto da estética nas pessoas ou ainda a intenção daquilo que se expressa.

> Pode ser verdade que o estranho (Unheimlich) seja algo que é secretamente familiar, que foi submetido à repressão e depois voltou, e que tudo aquilo que é estranho satisfaz essa condição. [...] Nem tudo o que preenche essa condição – nem tudo o que evoca desejos reprimidos e modos superados de pensamento, que pertencem à pré-história do indivíduo e da raça – é por causa disso estranho (FREUD, 2006d, p. 262).

[7] Freud (2006d).

O estranho é aquele que procede de uma percepção no ego, vem do exterior, e atua de forma intensa no sujeito, levando-o a uma ambivalência pulsional entre prazer e repulsa. Tal ambivalência coloca as pessoas em contato com o desconhecido, o não idêntico, onde o estranho é sempre o outro. Para Freud (2006d), a ação humana sempre comporta uma dimensão desconhecida e a forma (ou dimensão estética) das coisas tendem a articular a ação do sujeito com o desejo inconsciente que o habita.

Na psicanálise freudiana, pode-se falar em estética relacionada à paixão e desejo, sustentada no imaginário como expressão de forma e de movimento daquilo com que estamos a interagir. Os processos educacionais na contemporaneidade orientam a potência das pessoas para determinados objetos[8] do desejo, criando-se afeto[9] por objetos que se tornam fontes de desejo. Sendo esse afeto caracterizado pela intensidade de pulsão com que se exprime, sendo incontrolável em muitas das vezes em que se expressa. As teorizações freudianas sobre pulsão defendem que como processos determinados podem modelar o aparelho psíquico para bloquear ou deformar a elaboração do conhecer algo (FREUD, 2006d).

Isso ocorre a partir de mecanismos de controle do mundo exterior, levando o sujeito a fugas diante de percepções distorcidas que provoquem dor ou repulsa. Essa distorção ocorre em dois níveis nos quais se dá o conhecimento: i) <u>externo</u>: o da percepção, cuja função é a interação com o mundo social, das normas e instituições; ii) <u>interno</u>: o do recalque, cuja função é coordenar as percepções externas com os conteúdos internos do sujeito, produzindo modelos cognitivos racionais de acordo com a normatividade da realidade social.

---

[8] O objeto do desejo é um objeto perdido, uma falta sempre presente que busca realizar-se por meio de uma série de substitutos, mas que mantém a permanência da falta e tornam o desejo irredutível, visto que inconsciente. (FREUD, 2006d)

[9] O afeto, na psicanálise, exprime qualquer estado afetivo, penoso ou desagradável, vago ou qualificado. (CAVALCANTI; POLI, 2011).

Para Freud (2006c), a natureza da razão seria uma garantia que os impulsos, e o que esses representam, teriam a posição que merecem no projeto de Modernidade[10].

> Pensar-se-ia ser possível um reordenamento das relações humanas que removeria as fontes de insatisfação para com a civilização pela renúncia à coerção e à repressão dos instintos, de sorte que, imperturbados pela discórdia interna, os homens pudessem dedicar-se à aquisição da riqueza e à sua fruição. [...] Parece, antes, que toda civilização tem de se erigir sobre a coerção e a renúncia à pulsão; [...] Acho que se tem que levar em conta o fato de estarem presentes em todos os homens tendências destrutivas e, portanto, anti-sociais e anti-culturais, e que, num grande número de pessoas, essas tendências são suficientemente fortes para determinar o comportamento delas na sociedade humana (FREUD, 2006c, p. 17).

No início do século XX, surgem movimentos de contestação à capacidade da razão de orientar a vida humana para processos que não sejam alinhados a finalidades de dominação (NOBRE, 2004; HORKHEIMER, 2012). E nesse contexto, a psicanálise contribuiu para destituir os tradicionais mecanismos da repressão que funcionavam sob o pretexto de racionalidade. Isso ocorre em contraste com a moral burguesa (HABERMAS, 2010), especificamente, a moral do capitalismo tardio, tornando-se crescentemente anárquica, invertendo a hierarquia tradicional entre a razão e os desejos.

A psicanálise se torna potente para subsidiar críticas à racionalidade que se torna racionalidade instrumental e aos mundos da vida social, da política e das artes que são reduzidos a questões de eficiência (FREUD, 2006b). A crítica recai na análise acerca do fato de a dimensão estética do mundo social e as questões da vida das pessoas, e da humanidade em geral,

[10] A modernidade, como produto do processo de racionalização que ocorreu no ocidente desde o final do século XVIII, implicou a diferenciação da cultura, da economia e da sociedade segundo uma visão capitalista.

terem desaparecido em um mundo dominado por critérios (de desempenho, beleza e sucesso) medidos quantitativamente em termos financeiros e orientados por ideias de manipulação e preservação de interesses de grupos específicos (CAVALCANTI; POLI, 2011, p. 230).

Na Modernidade, o poder não se expressa em função do absolutismo monárquico, como também não deveria ser determinado pelo fundamentalismo explícito de igrejas, como no passado pré-iluminista; mas o tem feito por meio de práticas que atravessam todo corpo social, sob a forma de disciplinas e normas de conduta que concretizam em instituições (prisão, escola, fábrica, etc) (NOBRE, 2004); e adentram ao corpo físico das pessoas, ditando políticas, direitos e estéticas (FREUD, 2006b). O desencanto com a razão instrumental, vivenciado por Freud e tantos outros, favorece a perspectiva de pensar os processos específicos (ou arapucas) para a produção dos corpos, segundo a normatividade dominante.

A racionalidade instrumental – com finalidades de controle e manipulação – parece vigorar nos mecanismos específicos de propalação de estéticas corporais, rejeitando e pregando uma educação que ensine a recusar a plasticidade de corpos e as diversidades de gêneros e sexualidades que expressam (FREUD, 2006c). O corpo-generificado-sexuado fala pelo vestuário, pelos acessórios, pelas cores, pelos penteados, pelos nomes, e assim o sendo, a estética se apresenta como demarcador importante entre os gêneros, entre as sexualidades, e sobre a relação que esse mantém com as intencionalidades com que aquela é utilizada em determinados contextos. No caso, deste capítulo, no contexto de um documento curricular.

Arapucas de gênero e sexualidade

De noite pelas calçadas
Andando de esquina em esquina
Não é homem nem mulher

É uma trava feminina
- Linn da Quebrada[11]

Judith Butler, em seu livro *Problemas de gênero: feminismo e subversão da identidade*, interpreta os diários de Herculine Barbin[12], apontando que as sexualidades consideradas divergentes ou "fora" do *status quo* são produzidas dentro da mesma relação discursiva em que produz as sexualidades consideradas normais (BUTLER, 2020a). Ou seja, o espaço da sexualidade – suas possíveis compreensões e interpretações – são produzidos pela própria norma. Qualquer situação de produção discursiva da sexualidade, seja ela antes ou fora da norma, está no interior de uma rede discursiva que produz sexualidades "normais" e "anormais" e, depois, oculta essa mesma produção e caracteriza as sexualidades "anormais" como corajosa, rebelde e/ou subversiva. E nesse sentido, a estética com que se apresenta os veículos e vetores do discurso são elementos importantes nessa produção de sexualidades.

Butler (2020a, p. 174) compreende que o próprio corpo de Herculine Barbin foi produzido pelo "discurso jurídico sobre o sexo unívoco". A linguagem subversiva e de usurpação que Herculine utiliza em seus diários está relacionada com as categorias unívocas de gênero, sexo e desejo, pois algo é subversivo em relação a alguma ordem, a algum padrão mantido e reificado. Essa linguagem de usurpação denuncia a falsa naturalização e fixidez das categorias em que Herculine se sente distanciado/a (BUTLER, 2020a).

A constatação de que algo é subversivo em relação a alguma ordem também é indicada por Freud (1905), em sua produção intitulada *Três*

---

[11] LINN DA QUEBRADA. **Mulher**. São Paulo: Showlivre, 2017. Disponível em: https://bit.ly/3xoPBJ2. Acesso em: 15 abr. 2021.

[12] Adélaïde Herculine Barbin (1838 – 1868) foi uma pessoa intersexo, nascida na França, registrada como do sexo feminino ao nascer. Após um médico diagnosticá-la com características intersexo, seu registro foi retificado e passou então a chamar-se Abel Barbin. O caso é muito conhecido devido ao diário que escreveu durante sua vida ter sido estudado e publicado por Michel Foucault.

Ensaios sobre a Teoria da Sexualidade. Para o estudioso, a fábula poética que diz sobre a distinção dos gêneros entre homem e mulher e que objetiva a união dessas distinções no amor é a causadora de espanto ao descobrir as descontinuidades de gênero, sexo e desejo. Nesse contexto, compreendemos que essa fábula poética institui aquilo que é normal e também aquilo que é “anormal” e a norma que rege os corpos.

Retomando o caso de Herculine Barbin. Aos olhos de Butler (2020a), ela/ele encara e enfrenta essa norma sem estabelecer a imagem de um sujeito que é autorizado. Herculine é um testemunho das possibilidades que a normatividade há de produzir. A autora defende que a norma é incorporada e produz corpos capazes de carregá-la na essência do eu, são capazes de expressar a lei no corpo e através dele, sendo que a lei também está no seu desejo, no significado das suas almas e na sua consciência. Por mais que seja uma norma que está plenamente manifesta e latente, ela nunca se apresenta como externa aos corpos que subjetiva e sujeita (BUTLER, 2020a).

Na esteira da reflexão entre o que está “fora” e “dentro” da lei, Butler (2020a) também repensa as posições, pensadas como fixas, de “interno” e “externo”. Ela aponta que os contornos corporais que delimitam o que está dentro e fora de um corpo é estabelecido por um processo que caracteriza os lugares fixos de permeabilidade e impermeabilidade corporais. Em uma matriz de inteligibilidade cultural imperada por um sistema de heterossexualidade compulsória, certas práticas sexuais que deturpam e ressignificam esses lugares fixos de permeabilidade e impermeabilidade corporais, podem ser caracterizadas como “poluentes” a ordem hegemônica.

Ainda nessa linha de repensar a fixidez dos lugares de permeabilidade e impermeabilidade, podemos nos remeter às teorias anais ou teorias do cu. Essas nos fazem repensar: qual é o espaço do cu? Essa superfície que muitas vezes é utilizada na linguagem coloquial como forma de insulto, como coloca Sáez e Carrascosa (2016), pode também ser um espaço transbordante de prazer e subversão. Afinal, como já dizia Clécio – personagem do filme nacional *Tatuagem*[13] – ao interpretar a música *Polka do Cu* "[...] a única coisa que nos salva, a única coisa que nos une, a única utopia possível é a utopia do cu."

Ademais, na perspectiva butleriana, o sujeito que deturpa as ordenações da matriz de inteligibilidade cultural de gênero se torna ininteligível e/ou abjeto[14]. A autora chega a essa conclusão ao tomar contato com o texto de Íris Young intitulado *Abjection and Opression: Unconscious Dynamics of Racism, Sexism and Homopohobia*, apresentado na *Society of Phenomology and Existencial Philosophy Meetings* (YOUNG, 1990). Para Butler, Young sugere que os preconceitos contra corpos em função da sexualidade, cor e/ou sexo – ou seja, homofobia, racismo e sexismo – acaba por ser uma "expulsão" que gera a "repulsa", etapas fundamentais para consolidar as identidades culturalmente hegemônicas sob os eixos de diferenciação de sexo, raça e/ou sexualidade. Butler (2020a) – ainda em Young e ao se apropriar também das reflexões de Julia Kristeva – nos apresenta as possibilidades do processo de consolidação das identidades baseadas na instituição de "Outro" ou de "Outros" que são expelidos, expulsos e repulsados – isto é, a partir de exclusões e dominações (BUTLER, 2020a).

Esse processo de expulsão e repulsa do "Outro(s)" acaba por constituir a divisão entre os mundos internos e externos, uma fronteira estabelecida para controles sociais e regulações. Essa fronteira pode ser

[13] Disponível em: https://youtu.be/EDyrfqlNsLU. Acesso em: 14 abr. 2021.

[14] O abjeto é aquilo que se tornou o "Outro" ao ser expelido do corpo, descartado como excremento e/ou como fluídos corporais expelidos pelo corpo. Esse "Outro" se torna estranho por meio do processo corporal de expulsão. O "não eu" acaba se estabelecendo por meio dessa relação entre abjeto e as fronteiras do corpo, podendo delimitar os primeiros contornos dos sujeitos (BUTLER, 2020a).

confundida com passagens excrementícias, elaboradas e produzidas por funções excretoras, em que o interno se transforma em externo. A transformação do interno para o externo, por meio de passagens excrementícias, pode servir de base para modelos praticados que destilam outras formas de diferenciação de identidade. E é nesse sentido que o "Outro" ou os "Outros", que fogem da matriz de inteligibilidade cultural de gênero, podem "se tornar merda". Contudo, tal fronteira, incluindo suas extremidades – ou seja, o "interno" e o externo" – só existem devido a uma luta pela coerência, pela estabilidade, que é proporcionada pelas ordens culturais capazes de sancionar o sujeito e impor a diferenciação do abjeto (BUTLER, 2020a).

Nesse contexto, como é construída a matriz da inteligibilidade cultural de gênero? Segundo Butler (2020a), o tabu contra a homossexualidade pode ser considerado momento generativo da identidade do gênero, agindo com o poder de proibição, mas também de produção. Ou seja, acaba por produzir as identidades que podem ser culturalmente inteligíveis sob um viés da heterossexualidade compulsória. Todo esse processo de produção disciplinar do gênero causa o efeito de uma suposta estabilização para fins de construção e regulação heterossexuais da sexualidade. Uma suposta estabilização, visto que a mesma é falsa e se apresenta como verdadeira, sendo capaz de ocultar as descontinuidades do gênero. Essas descontinuidades do gênero podem ser provocadas por sujeitos em que o gênero não decorre necessariamente do sexo e o desejo ou a sexualidade não decorre do gênero. O papel de ocultar essas descontinuidades do gênero é de extrema importância, pois ao romper a coerência de gênero e/ou heterossexual, o ideal é denunciado como norma e ficção e acaba por perder sua força descritiva.

> Em outras palavras, atos, gestos e desejo produzem o efeito de um núcleo ou substância interna, mas o produzem *na superfície* do corpo, por meio do jogo de ausências significantes, que sugerem, mas nunca revelam, o princípio organizador da identidade como causa. Esses atos, gestos e atuações, entendidos em termos gerais, são *performativos*, no sentido de que a essência ou identidade que por outro lado pretendem expressar são *fabricações* manufaturadas e sustentadas por signos corpóreos e outros meios discursivos (BUTLER, 2020a, p. 235).

Ao refletir sobre a imitação e o original, Judith Butler utiliza o exemplo da *drag queen* para mostrar como sua performance usa a expressão estética para ilustrar a distinção entre anatomia de quem está performando e o gênero que está sendo performado. "*Ao imitar o gênero, a* drag *revela implicitamente a estrutura imitativa do próprio gênero – assim como sua contingência*" (BUTLER, 2020a, p. 237). Nessa performance, o sexo e o gênero são desnaturalizados, a lei da coerência heterossexual é "posta em cheque" e a performance mostra o mecanismo cultural da unidade fabricada.

Em suma, a paródia da *drag queen* pode ter a função de reconvocar e reconsolidar as configurações de gênero e suas descontinuidades. Ela também tem sido usada para promover uma *política de desesperança*, afirmando a exclusão de gêneros que não conseguem habitar o território do real e encarnar o natural. No entanto, esses lugares ontológicos do "real e natural" são inabitáveis, o que produz uma falha constitutiva de todas as imposições de gênero (BUTLER, 2020a).

Podemos compreender, então, que a matriz de inteligibilidade cultural impõe uma lógica coerente entre sexo/gênero e desejo; aqueles que deturpam essa lógica podem sofrer consequências punitivas e, bem como, podem ser considerados abjetos, "virarem merda" e não serem caracterizados no *hall* da humanidade. Além disso, também podemos entender que o gênero é constituído por vários atos que criam a ideia ilusória de gênero. Com a ausência desses atos, não haveria gênero, visto que ele não é um dado da realidade e nem possui "essência" para expressar ou exteriorizar. O gênero não passa de uma construção que oculta sua origem – por assim dizer – e produz credibilidade das suas produções, seja por meio das punições/penalizações como pela obrigação em acreditar na sua necessidade e naturalidade. As punições e a obrigação de crer são produzidas pelo próprio gênero (BUTLER, 2020a).

> Imaginemos que a sedimentação das normas do gênero produza o fenômeno peculiar de um "sexo natural", uma "mulher real", ou qualquer das ficções sociais vigentes e compulsórias, e que se trate de uma sedimentação que, ao longo do tempo, produziu um conjunto de estilos corporais que, em forma reificada, aparecem como a configuração natural dos corpos em sexos que existem numa relação binária uns com os outros (BUTLER, 2020a, p. 241).

O gênero requer uma performance repetida, tendo a estética como um dos veículos de sua expressão. A repetição pode ser compreendida tanto como a sua legitimação, quanto como a sua reencenação e a constituição de novas experiências de um conjunto de significados que já são estabelecidos socialmente. Inclusive, tais ações possuem dimensões temporais e coletivas (BUTLER, 2020a). Assim o sendo, o ideário de sexo, relacionado à masculinidade e feminilidade "verdadeiras", é uma produção que constitui instrumento para ocultar a performatividade de gênero e propagá-las em contextos externos às estruturas da heterossexualidade compulsória (BUTLER, 2020a). Portanto, a oposição binária entre "eu" e o "Outro" é também um movimento estratégico no conjunto de práticas significantes, estabelecido por meio de oposições, se reificando como uma necessidade e ocultando os aparatos que o produzem.

Os sujeitos culturalmente inteligíveis também são efeitos resultantes de discursos controlados por regras e que também governam a possibilidade inteligível de identidades. Isso não quer dizer que os sujeitos são determinados pelas regras, pois a significação não tem efeito fundador; a significação é um processo regulado de repetição que se oculta e impõe regras (BUTLER, 2020a). Nesse ínterim, a linguagem e a significação é um sistema aberto em que a inteligibilidade é criada e contestada – ou seja, é somente no interior das práticas da linguagem e da significação que há a possibilidade de subversão da identidade (BUTLER, 2020a)[15].

Os apontamentos butlerianos não podem ser confundidos com a falsa ideia de o gênero não ter relação com o corpo ao afirmar que esse é construído na esteira de produções discursivas, reguladas e controladas por uma matriz de inteligibilidade cultural. Ao dar destaque para ação predominante do discurso, não – necessariamente – defende exclusividade a ele.

Ao teorizar sobre pulsão sexual, Freud (1905) convoca a pensar a materialidade do corpo, algo que emana do próprio corpo e que não pode ser domesticável pelas amarras discursivas. Essa pulsão pode ser constituída, aos olhos freudianos, por dois termos: objeto sexual e alvo sexual[16], cujas definições nos remetem em alguma medida aos sentidos de materialidade do corpo. Em seus ensaios sobre sexualidade, Freud (1905) nos leva a duvidar da coerência entre objeto e alvo sexual, bem como a suposta norma que exige uma coerência entre esses. Percorrendo os caminhos freudianos da pulsão sexual, Butler (2020b) reflete sobre a materialidade dos corpos

---

[15] Assim como o movimento da *Drag Queen,* o da Bicha Intelectual é também provocadora de contestações da matriz de inteligibilidade cultural de gênero. Ao assumir essa posição, Marconi (2017) contesta a localização das produções científicas brasileiras, questionando o lugar predominante dos homens brancos, heterossexuais e coerentes com as regras de gênero. Essas produções que tanto prezam por uma imparcialidade e neutralidade da ciência, acabam por reproduzir a mesma lógica das produções que "demonizaram" a homossexualidade e afirmaram que as mulheres são supostamente homens com anatomia mal desenvolvida. Assim como o gênero e toda sua parafernália não é neutro e imparcial, as ciências e suas produções também não o são.

[16] O objeto sexual é a pessoa que provém a atração sexual; o alvo sexual é a ação para qual a pulsão impele.

em sua obra *Corpos que importam: os limites discursivos do sexo*. Para ela, o conceito de pulsão sexual possibilita a entender as necessidades sexuais que brotam do corpo e não são domesticáveis pelo discurso. Ou seja, os atos de gênero não são meramente regulados pelas amarras discursivas e que há uma materialidade do corpo na performatividade de gênero. E nesse sentido, a estética desse corpo material importa para expressão de gênero e de sexualidade. Como trazer isso para a Educação Matemática?

Documento Curricular[17] e o anzol da estética dos corpos binários

Novas embalagens para antigos interesses;
É que o anzol da direita,
fez a esquerda virar peixe.
- Criolo[18]

Em 2018, no Estado de São Paulo, inicia-se elaboração do Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) que envolveu a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação de São Paulo (UNDIME-SP), contando também com a presença de representantes da rede privada. A primeira versão[19] resultou da leitura das proposições da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[20],

[17] Documentos curriculares materializam as intencionalidades dispostas nos currículos oficiais e são utilizados como ferramenta das políticas curriculares, que se instauram normativamente tendo aqueles como vias de expressão dessas. Por documento curricular entendemos um documento normativo que se faz central na organização dos projetos formativos a ele subordinados (TAVEIRA; PERALTA, 2021). No Currículo Paulista temos como exemplo de documentos curriculares os Cadernos do Aluno e os Cadernos do Professor.

[18] CRIOLO. Esquiva da Esgrima. São Paulo: Oloko Records: 2014. Disponível em: https://www.vagalume.com.br/criolo/esquiva-da-esgrima.html. Acesso em: 12 abr. 2021.

[19] Segundo São Paulo (2019), essa versão foi disponibilizada para consulta online. Professores, gestores, dirigentes, estudantes e representantes das universidades e da sociedade civil totalizaram 44.443 pessoas que contribuíram com 103.425 sugestões para o texto introdutório e 2.557.779 para os textos das diferentes etapas de escolaridade e respectivos componentes curriculares. (p. 20)

[20] Vale lembrar que o modelo de educação propalado pela BNCC, e seguido pelo Currículo Paulista, vem em decorrência da influência da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) que defende a educação a serviço do mercado, a política do Capital Humano, o esvaziamento da educação como processo de construção coletiva e a flexibilização do currículo para atender grupos privados, políticos e ideológicos (CAETANO, 2020).

após mais duas versões foram elaboradas sempre cotejando as propostas com documentos curriculares das diferentes Redes Municipais, da Rede Privada e da Rede Estadual (SÃO PAULO, 2019).

A Comissão do Conselho Estadual responsável pela homologação do Currículo Paulista apresentou aos redatores da SEDUC e UNDIME recomendações para revisão da terceira versão no período de fevereiro a maio de 2019. Segundo São Paulo (2019), a versão revista foi apresentada pelos redatores da SEDUC-SP e UNDIME-SP à Comissão do Conselho Estadual, e foram reiteradas, pela Comissão, recomendações para que, no Currículo Paulista, observe-se o conceito de competência instituído na BNCC e, ainda, que seja enfatizada, em todos os componentes curriculares, a íntima correlação entre as habilidades socioemocionais e as cognitivas.

No que se refere às questões de gênero e sexualidade, o Currículo Paulista[21] apresenta um retrocesso se comparado com outras diretrizes curriculares voltadas, a citar por exemplo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)[22] (BRASIL, 1996), especificamente na perspectiva do Tema Transversal Orientação Sexual, promulgados em 1996. Tal retrocesso não deve causar surpresa uma vez que, explicitamente, o documento (volumes 01 e 02) que expressa o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019; 2020) relata aderência ao conteúdo da BNCC (BRASIL, 2017). Isto posto, pois, com a promulgação da BNCC, cuja elaboração foi acompanhada e influenciada pela atuação de movimentos de segmentos conservadores da sociedade brasileira, houve um esvaziamento da temática de gênero e sexualidade dos currículos brasileiros.

---

[21] O documento que expressa o "Currículo Paulista" foi aprovado pelo conselho pleno do Conselho Estadual de Educação em 19 de junho de 2019. A partir de então o Currículo Paulista das etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental (Volume1) foi homologado em agosto de 2019; e o Currículo Paulista da etapa do Ensino Médio (Volume 2) foi homologado em agosto de 2020.

[22] Ainda que os PCN tenham recebido críticas por tratar sexualidade a partir da perspectiva biológica e por apenas tangenciar as questões de gênero; suas diretrizes corroboraram para que a temática da diversidade sexual e de gênero adentrasse a escola de forma oficial. (ABREU; SANTOS, 2015).

Sobre os grupos que caracterizam segmentos conservadores da sociedade, Sevilla e Seffner (2017) nos alertam sobre como seus discursos defendem

> [...] que a escola não deve abordar temas como política, religião, gênero e sexualidade, que professores em sua maioria são "doutrinadores" e não são educadores, pois deveriam apenas se restringir a ensinar conteúdos técnicos. Tais concepções tomam os jovens como meras tábulas rasas, sem opinião e reflexão. Baseados nisso, defendem a proibição de professores e da escola de trabalhar estas temáticas [...] ferindo a autonomia pedagógica e atingindo a promoção da cidadania e a construção de uma escola plural, onde todos e todas devem ser respeitados, independentemente de sua origem, cor, etnia/raça, gênero, classe, identidade, orientação sexual, pertencimento religioso, etc. (SEVILLA; SEFFNER, 2017, p. 4-5).

Provavelmente por influências desses discursos, assim como na BNCC, no Currículo Paulista a temática "sexualidade" se concentra nos documentos destinados às Ciências da Natureza, especificamente ao componente curricular Ciências (no Ensino Fundamental) e Biologia (no Ensino Médio), e se ausenta nos demais documentos curriculares. No Ensino Fundamental, além de situar a sexualidade somente na área de Ciências da Natureza, há a associação a conceitos vinculados à reprodução e saúde.

Sendo assim, sexualidade é apresentada somente relacionada ao corpo em sua dimensão biológica, salientando conteúdos vinculados à anatomia e à fisiologia da reprodução humana. Isso pode ser evidenciado procedendo-se uma busca[23] no documento pelo termo "sexualidade" que, pela localização do termo nas seções do documento, torna-se possível analisar onde aparece (na área de Ciências da Natureza), como aparece (como

---

[23] O famoso CTrl + F nos documentos em formato .pdf disponíveis em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/> (Acesso em 12 abr 2021).

objeto de conhecimento na Matriz de habilidades a serem desenvolvidas pelo currículo) e relacionado a quê aparece (vida e evolução, e reprodução humana).

Nos documentos curriculares relativos ao Ensino Médio, além de se verificar a mesma ocorrência evidenciada no Ensino Fundamental, também se encontra o termo "sexualidade" associado aos itinerários formativos propostos para a formação técnica profissional como um pressuposto metodológico (a saber atuação em campanhas relacionadas à saúde e à sexualidade) para o "desenvolvimento de habilidades relacionadas às competências gerais de mediação e intervenção sociocultural" (SÃO PAULO, 2020, p. 246).

Em uma leitura não aligeirada dos dois volumes que expressam o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019; 2020), dos Cadernos do Professor e do Aluno, dos Materiais de Apoio Inova Educação, da Matriz de Habilidades Essenciais – Rede Estadual, da Matriz de Habilidades Essenciais do Currículo Paulista e demais documentos orientadores para a implementação do currículo[24], notamos um silenciamento em relação às múltiplas dimensões que perpassam a sexualidade humana, enfatizando apenas aspectos biológicos. Nessa mesma leitura, se faz possível perceber que o termo "gênero" aparece nos documentos relacionados a gênero (estilo) textual, sendo mais abundantes nos conteúdos de Língua Portuguesa, em atividades de leitura, escrita e/ou produção de textos. Não se encontra nos documentos do Currículo Paulista menções à terminologia "gênero" associadas a dimensões da existência humana que não se enquadrem na condição de polaridade (masculino – feminino) inscrita pela determinação do sexo biológico.

[24] Todos esses documentos podem ser acessados em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/educacao-infantil-e-ensino-fundamental/materiais-de-apoio-2/> e <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/ensino-medio/materiais-de-apoio-2/> (Acesso em 12 abr 2021).

Mais uma vez o Currículo Paulista denota fidelidade ideológica à BNCC (BRASIL, 2017) agora expressa pelo apagamento[25] das questões de gênero. Naquele, assim com nessa, não ocorre menção, explícita e/ou implícita, da palavra gênero que não esteja relacionada à gênero textual. Sem a devida problematização no currículo, provavelmente, os processos educativos dele decorrentes abordarão as questões e relações de gênero tão somente pelo viés biológico, podendo implicar na legitimação e naturalização do binarismo de gênero – que sempre vem no viés da heteronormatividade.

Diante dessas ausências, como pensar os corpos que circulam pelas escolas? Afinal, o gênero e a sexualidade, em alguma medida, se expressam no e pelo corpo (SENKEVIKS; POLIDORO, 2012). Nesse sentido, diretrizes curriculares que tendem à negação dessa expressão corroboram com prática social e culturalmente localizada de inscrever os corpos em mecanismos de controle, pautando o espaço educacional "por um processo longo de descolamento das identidades (e diferenças)" de gêneros das conformações corporais, e de apagamento das diversidades sexuais (REIS, 2017, p. 168).

Os corpos (e os anzóis?) nos Cadernos Aprender Sempre

Tenho prá você uma caixa de lama
Um lençol de fél pra forrar a sua cama
Na força do verso a rima que espanca
A hipocrisia doce que alicia nossas crianças.
-Criolo[26]

[25] O termo apagamento faz referência ao fato de nas primeiras duas versões da BNCC havia menção à questão de gênero que, literalmente, foi apagada na terceira verão (ou versão promulgada).

[26] CRIOLO. Mariô. São Paulo: Oloko Records: 2014. Disponível em: https://www.vagalume.com.br/criolo/mario.html. Acesso em: 12 abr. 2021.

As produções visuais estéticas podem realçar diferentes características ditas essenciais e específicas dos corpos para serem classificados e reconhecidos como sendo de homem ou de mulher e, assim, construir num campo simbólico o que significa efetivamente ser homem ou ser mulher (REIS, 2017). Nesse conjunto de produções visuais estéticas localizamos os manuais didáticos, livros, apostilas ou Cadernos do Aluno (do Currículo Paulista) e supomos que dentre os conhecimentos veiculados seja possível identificar, como já apontava Sabat (2001, p. 16), uma espécie de currículo cultural (expresso por um ideário que perpassa conceitos e procedimentos determinados e determinantes de relações sociais) "faz parte de uma pedagogia específica, composta por um repertório de significados que, por sua vez, constroem e constituem identidades culturais hegemônicas".

Assim, modos de ser e vivenciar o corpo podem ser aprendidos na escola, potencializando ou rejeitando padrões estabelecidos pela ação desse currículo cultural que, na maioria das vezes, se atrela a outras instituições, a saber, principalmente, a família e as igrejas. Por conseguinte, concordamos com Reis (2017, p. 170) acerca de ser importante conhecer os investimentos impetrados para que os corpos acompanhem construções de identidades "por meio de diferentes pedagogias, que estão a todo momento se recompondo". Nesse sentido, elegemos os documentos do Currículo Paulista como passível de análise – numa tentativa de entender os investimentos da SEDUC-SP e as demais entidades e pessoas que participaram da autoria desses documentos – para impetrar determinada estética de corpo a ser consumida por milhões de crianças nas escolas.

Para ilustrar o que defendemos, dentre os documentos curriculares[27] do Currículo Paulista, selecionamos os Cadernos do Aluno 2021 do

[27] Consideramos documentos curriculares do Currículo Paulista: o Documento Base (volumes 1 e 2) que expressam o currículo (SÃO PAULO, 2019; 2020), Materiais de Apoio, Materiais de Formação, e o Aprender Sempre. Os Materiais

material Aprender Sempre (SÃO PAULO, 2021a; SÃO PAULO, 2021b; SÃO PAULO, 2021c; SÃO PAULO, 2021d). Esse material foi elaborado numa ideia de priorização curricular, onde o foco é privilegiar as habilidades consideradas essenciais do currículo – que não devem deixar de serem desenvolvidas durante o ano de 2021 – e que contemplem o ciclo 2020-2021. Há a previsão de um volume do Caderno do Aluno para cada ano de escolaridade, por bimestre, do ano de 2021. Cada Caderno tem o objetivo de apoiar a recuperação e o aprofundamento de Língua Portuguesa e Matemática do primeiro ano do Ensino Fundamental à terceira série do Ensino Médio.

Do conjunto de Cadernos do Aluno do Aprender Sempre definimos como objeto da nossa análise aqueles destinados aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e nesses Cadernos nos voltaremos para a seção destinada à Matemática. Esse delineamento se justifica pelo fato desse documento, provavelmente, se configurar como a principal fonte de conhecimento de matemática escolar de muitas crianças neste momento de pandemia. Crianças que há mais de um ano não frequentam o espaço plural da escola, não têm o apoio efetivo da presença de uma professora e estão, completamente, à mercê da pedagogia praticada por suas famílias. Isso tudo em tempos de polarização ideológica, fundamentalismo religioso

---

de Apoio do Currículo (https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/educacao-infantil-e-ensino-fundamental/materiais-de-apoio-2/) são um conjunto de documentos que expressam as diretrizes para implantação do Currículo Paulista, constituídos por orientações a professores (Cadernos do Professor), material didático para alunos (Cadernos do Aluno), Projetos de Vida (Cadernos do Aluno e do Professor), Tecnologia e Inovação (Cadernos com Situações de Aprendizagem para o Aluno e com Orientações para o Professor), Habilidades do Currículo Paulista (Matriz de Referência para o desenvolvimento de habilidades e objetos de conhecimento) e Habilidades Essenciais - rede estadual 2021 (Matriz de Referência para o desenvolvimento de habilidades e objetos de conhecimento considerados prioritários no enfrentamento/recuperação educacional à pandemia de Covid -19). Os Materiais de Formação (https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/materiais/) constituem-se por textos (pautas, documentos, roteiros de atividades), vídeos (palestras de políticos, gestores públicos, membros de Fundações, equipes de redatores) e Apresentações Gráficas. Aprender Sempre é um material destinado a apoiar a aprendizagem dos estudantes durante o período de atividades não presenciais. São fascículos (Volumes 01 e 02) produzidos para apoiar a recuperação e o aprofundamento de Língua Portuguesa e Matemática no 1º e 2º bimestres, respectivamente, de 2021 (https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/educacao-infantil-e-ensino-fundamental/aprender-sempre-ef/).

aflorado, negacionismo e obscurantismo em relação à Ciência e proliferação de discurso conservador a respeito das questões de gênero e sexualidade (quiçá homofóbico, transfóbico, racista, sexista etc.).

Desse modo, trouxemos uma análise dos Cadernos do Aluno Aprender Sempre do primeiro ano (SÃO PAULO, 2021a), segundo ano (SÃO PAULO, 2021b), terceiro ano (SÃO PAULO, 2021c) e quinto ano (SÃO PAULO, 2021d)[28] do Ensino Fundamental, referentes ao 1º bimestre de 2021, tendo como o objetivo lançar visibilidade à estética com que os corpos são apresentados nas Atividades de Matemática desses Cadernos. Ao fazermos isso a nossa intenção é chamar atenção para documentos curriculares relacionados ao ensino de matemática, mais especificamente sobre como esses documentos se relacionam a questões de gênero e sexualidade, isto posto a julgar pela estética que utiliza para se referir aos corpos.

Inspirados pelo rapper Criolo, e sua música Esquiva da Esgrima: "Novas embalagens para antigos interesses; é que o anzol [...]", ousamos dizer que estéticas que contemplam reivindicações progressistas podem estar carregadas de intencionalidades conservadoras. A música do Criolo nos vem à mente quando nos deparamos com a estética da seção Matemática dos Cadernos do Aluno do Aprender Sempre dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O documento curricular apresenta desenhos coloridos, textualidade que remete à inocência da infância, traços simples e figuras singelas que contemplam crianças de diferentes tons de pele, diferentes cores de cabelo, diferentes alturas, todas sorridentes.

Mas onde está o anzol que fisgará as possibilidades de uma Educação Matemática para além do ensino de matemática? Vejamos algumas figuras com imagens recortadas dos Cadernos do Alunos.

---

[28] No Caderno do Primeiro Bimestre do Quarto Ano do Ensino Fundamental (https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/12/4%C2%BA-ano-Aprender-Sempre-Caderno-do-Aluno.pdf) não foram encontradas figuras de corpo humano. Portanto, este volume dos Cadernos não foi considerado para análise.

Figura 01 – Aprender Sempre Primeiro Ano

Fonte: São Paulo, 2021a (imagem A – página 94; imagem B – página 112).

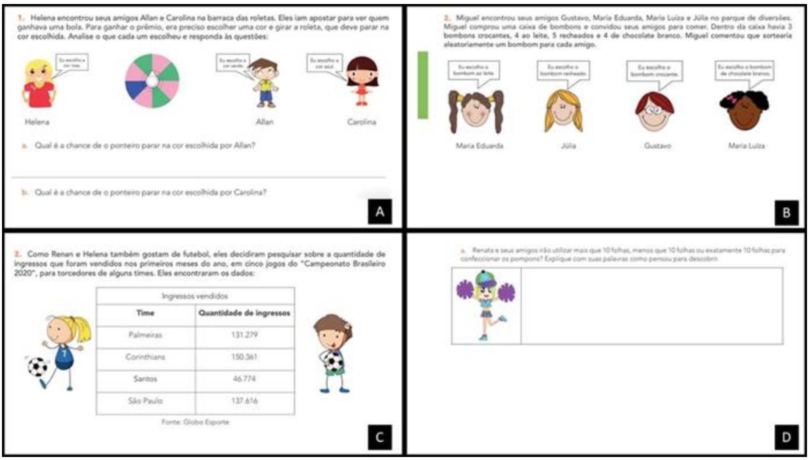
Figura 02 – Aprender Sempre Segundo Ano

Fonte: São Paulo, 2021b (imagem A – página 87; imagem B – página 100)

Figura 03 – Aprender Sempre Terceiro Ano

Fonte: São Paulo, 2021c (imagem – página 80)

Figura 04 – Aprender Sempre Quinto Ano



Fonte: São Paulo, 2021d (imagens A e B – página 104; imagem C – página 114; imagem D – página 119)

Diante dessas Figuras é possível uma primeira constatação: as crianças representadas nas imagens das figuras são apresentadas com marcadores clássicos de gênero: meninas e meninos sendo caracterizados por penteados, vestimentas, nomes e acessórios que remetem a enquadramento binário. Em todas as imagens, de todas as figuras, os marcadores de gênero, invariavelmente e intensamente, se fazem presente.

Na imagem A da Figura 01, Paulo e Roberto – nomes conhecidos e marcados como masculinos – possuem alturas e cores de pele diferentes, mas também possuem cabelos curtos. Raquel, Ana e Juliana – nomes conhecidos e marcados como femininos – também possuem alturas diferentes e cores de pele diferentes, mas são apresentadas com cabelos longos (soltos ou amarrados). Tal situação se apresenta nas demais imagens. Esses marcadores constroem uma representação do que é ser homem e mulher numa perspectiva binária de gênero a partir do tamanho dos cabelos, no qual pode ocasionar em representações que meninas que possuem cabelos curtos sejam "confundidas" – e constrangidas – com meninos, devido a um estereótipo do masculino e feminino. Esses marcadores e suas implicações, sendo veiculados em documentos curriculares de uso diário por crianças, acabam por tornar-se vetores de perpetuação do binarismo.

A situação supramencionada pode ser observada também quando observamos as vestimentas nas imagens. Em grande parte delas, as meninas/mulheres estão vestindo saias, vestidos e demais acessórios que reforçam a lógica binária do que é ser mulher. Ou seja, visualmente a estética dos corpos apresentadas nas figuras dos Cadernos do Aprender Sempre – retratadas pelos tipos de cabelos e de vestimentas – podem *generificar* a forma binária de apresentação dos corpos, corroborando uma representação social[29] de masculinidades e feminilidades, podendo contribuir com violências no cotidiano escolar acometidas a pessoas dissidentes do padrão binário imposto.

Gostaríamos de chamar a atenção para a imagem C da Figura 04, na qual uma criança (caracterizada com marcador de gênero: fita nos cabelos longos), está praticando futebol. Tal imagem pode contribuir de forma

[29] Entendemos Representação Social a partir de Moscovici (2005).

positiva para a desconstrução da representação de que tal esporte é voltado para meninos – infelizmente, comum na cultura escolar brasileira. Entretanto, o "anzol" pode se fazer presente ao veicular aos leitores, das imagens do Caderno Aprender Sempre, a lógica binarista de "permitir" aos corpos executarem atividades (esportivas, por exemplo), mas que nunca desafiem a inteligibilidade do gênero expresso nos corpos binários. Ou seja, a imagem pode compactuar com o ideário: "Meninas e meninos podem jogar futebol, desde que a estética de seus corpos não viole a expressão binária na qual devem estar inscritos". Recorrendo a Marcuse (1977), convidamos a pensar no sentimento, sensação e significados, que a exposição a tal imagem, pode provocar nas crianças ao estudarem matemática. A estética faz parte do processo educacional: então a consciência e o comportamento a ser ensinado para os que se educam matematicamente perpassa o desvelamento das questões subjacente às "verdades" veiculadas nos documentos curriculares? Esse desvelamento seria o diferencial entre Educação Matemática e ensino de matemática.

Neste momento gostaríamos de propor uma segunda constatação: a expressão de sexualidade é permitida nos Cadernos Aprender Sempre desde que ancorada na racionalidade heteronormativa e no binarismo dos corpos. Chamando Freud (2006d) para a nossa conversa, desafiamos a pensar sobre o quanto o contato constante com um documento curricular pode atuar como mecanismo modelador do aparelho psíquico, bloqueando ou deformando a elaboração do conhecer algo. A imagem B, da Figura 02, pode ser um elemento coordenador das percepções sobre "família" e os corpos que a compõe, produzindo modelos cognitivos racionais de acordo com a normatividade da realidade imposta pelo próprio documento curricular.

O padrão apresentado, na referida imagem, é um núcleo familiar heterossexual protagonizado por corpos marcados pelo binarismo. Por que não apresentar outras possibilidades de arranjos familiares compostas por dois pais e/ou duas mães, pessoas transexuais ou travestis, famílias monoparentais? Para provocar essa discussão, nos reportamos a Zambrano (2006) que evidencia que esses tipos de parentalidades se tornam impensáveis em relação a um modelo tradicional de família. A autora evidencia que o aumento desses arranjos familiares, que são dissidentes da convicção tradicional, se tornou um fato não apenas social, mas um fato socioantropológico. Sendo assim, se defendemos Educação Matemática em perspectivas ampliadas em relação ao ensino de matemática, como aceitar um documento curricular que não paute as contradições da ideia dicotômica de família normal/anormal?

Ainda temos uma terceira constatação a expor: A diversidade (de cor, de altura, de tamanho, de massa corpórea, de estrutura capilar, de idades/geração) associada aos corpos é apresentada, com exceção aos gêneros e sexualidades. Nessa lógica, aos corpos é admitida a diversidade desde que o binarismo e a heterossexualidade continuem a reger a inteligibilidade do gênero e da sexualidade desses corpos, associando à ideia de estranho e perverso ao não binário. E aqui nos remetemos à Butler (2020a) para fazermos uma defesa: existe uma intenção estratégica de conservar a estrutura binária do gênero na representação do corpo nos documentos curriculares analisados substrato, pois da forma como é apresentado se presta à fundação e consolidação de uma estética padrão normatizadora dos sujeitos. Assim o sendo, o ideário de gênero, relacionado a sexo biológico; e de sexualidade verdadeira e saudável, relacionada à expressão de heterossexualidade, se constitui um instrumento que reforça a matriz heteronormativa.

"Mana, abre o Olho, isso é uma Arapuca"[30]

Se renda, entenda o que ataca,
a cegueira amola a faca
Da má lida com a existência,
faz a luz da essência opaca.
-Criolo[31]

Depois de "ferver" com e nessas reflexões, podemos compreender que a normatividade imposta produz sexualidades que caracterizam os corpos como normais e anormais, sendo uma fábula poética que produz uma distinção entre os gêneros e uma heterossexualidade compulsória. Assim o sendo, a estética empregada em documentos curriculares pode problematizar, subverter, criticar, ou reforçar, induzir, legitimar e expressar essa norma.

A estética dos corpos apresentados nas atividades de Matemática, dos Cadernos do Aprender Sempre, se torna potente para subsidiar críticas à racionalidade de organização do documento curricular que, se tornando racionalidade instrumental, coloniza os leitores (crianças em situação de isolamento social, estudando em casa com suas famílias) para um ideário que acolhe as diversidades (de cor, de raça, de etnia, de massa, de alturas, de deficiência, de cabelos, de vestimenta, de condição social), excetuando-se aquelas referentes a gênero e sexualidade. Ao que indica, um documento curricular de matemática apresenta limites para uma Educação Matemática, na perspectiva da educação inclusiva, ao se deparar com questões de gênero e sexualidade para além da discussão binária.

Os corpos binários são impostos como modelos para os que aprendem matemática. Cabe à Educação Matemática criticar pedagogias

[30] O título desse tópico remete a trechos da música *Pirigoza* de Linn da Quebrada.

[31] CRIOLO. Plano de Voo. São Paulo: Oloko Records: 2014. Disponível em: https://www.vagalume.com.br/criolo/plano-de-voo.html. Acesso em: 12 abr. 2021.

conservadoras obscurantistas, currículos culturais construtores de identidades hegemônicas, fetiches de neutralidade da Matemática enquanto ciência, e a atuação daqueles que se propõe a serem idealizadores e redatores de documentos para desenvolvimento curricular de Matemática. Sem esse movimento de crítica estrutural, como evitar que a Matemática – como disciplina concretizada em instituições (famílias, escolas, igrejas, etc) – adentre ao corpo físico das pessoas, por meio de estéticas veiculadas por currículos, favorecendo a (re)afirmação da normatividade dominante?

Referências

ABREU, Rachel Luiza Pulcino; SANTOS, Raquel Alexandre Pinho. Gênero e sexualidade nos PCNs: uma análise dos objetivos gerais. *Caderno Espaço Feminino*, v. 28, n. 1, 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Temas Transversais. Brasília, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2017.

BUTLER, Judith. *Problemas de gênero*: feminismo e subversão da identidade. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2020a.

BUTLER, Judith. *Corpos que importam*: os limites discursivos do “sexo”. São Paulo: N-1 Edições/Crocodilo, 2020b.

CAETANO, Maria Raquel. As reformas educativas globais e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). *TEXTURA-Revista de Educação e Letras*, v. 22, n. 50, 2020.

CAVALCANTI, Cristina Aparecida Tannure; POLI, Maria Cristina Candal. Estética e psicanálise: por uma crítica da modernidade. *R. Inter. Interdisc. INTERthesis*, Florianópolis, v.8, n.2, p.215-236, 2011.

FREUD, Sigmund. *Três ensaios sobre a teoria da sexualidade*. Rio de Janeiro: Imago, 1905.

FREUD, Sigmund. *A história do movimento psicanalítico, artigos sobre a metapsicologia e outros trabalhos* (1914-1916). Tradução Jayme Salomão. Rio de Janeiro: Imago, 2006a. v.14.

FREUD, Sigmund. *Novas conferências introdutórias sobre a psicanálise e outros trabalhos* (1932-1936). Tradução Jayme Salomão. Rio de Janeiro: Imago, 2006b. v.22.

FREUD, Sigmund. *O futuro de uma ilusão, o mal-estar na civilização e outros trabalhos* (1927-1931). Tradução Jayme Salomão. Rio de Janeiro: Imago, 2006c. v.21.

FREUD, Sigmund. *Um estudo autobiográfico, inibições, sintomas e ansiedade. Análise leiga e outros trabalhos* (1925-1926). Tradução Jayme Salomão. Rio de Janeiro: Imago, 2006d. v.20

FREUD, Sigmund. *Uma neurose infantil e outros trabalhos* (1917-1918). Tradução Jayme Salomão. Rio de Janeiro: Imago, 2006e. v.17.

GRANJA, Vania. *Educação estética*. Disciplina do Curso de Pós-Graduação lato sensu, Especialização em Educação Estética. Rio de Janeiro: UNIRIO, 2005.

HABERMAS, Jürgen. *Direito e democracia*: entre facticidade e validade. 2. ed. v. 1. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2010.

HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich. *Fenomenologia do Espírito*. Tradução Henrique Cláudio de Lima Vaz, Orlando Vitorino, Antônio Pinto de Carvalho. 2. ed. São Paulo: Vozes, 1980.

HOKHEIMER, Max. *Teoria Tradicional e Teoria Crítica*. Os Pensadores. São Paulo, Abril Cultural, 1980.

LINN DA QUEBRADA. *Pajubá*. São Paulo: YB Music, 2017.

MARCONI, Dieison. Bichas intelectuais: um manifesto pelos saberes localizados. *Revista Cadernos de Comunicação*. Santa Maria, v. 21, n. 3, art. 3, p. 54-63, set/dez 2017.

MARCUSE, Herbert. *The Aeshetic Dimension* (Die Permanenz der Kunst), Carl Hauser Verlag. Tradução de Maria Elisabete Costa. Munique: Edições 70, 1977.

MOSCOVICI, Serge. *Representações sociais*: investigações em psicologia social. Petrópolis: Vozes, 2005.

NOBRE, Marcos. *A Teoria Crítica*. Rio de Janeiro, Zahar, 2004.

REIS, Neilton. Invenções dos corpos nas experiências da não-binaridade de gênero. *Letras Escreve*, v. 7, n. 1, p. 165-184, 2017.

SABAT, Ruth. Pedagogia cultural, gênero e sexualidade. *Estudos Feministas*. Santa Catarina. n. 09. 2001.

SÁEZ, Javier; CARRASCOSA, Sejo. *Pelo cu*: políticas anais. Belo Horizonte, MG: Letramento, 2016.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. *Currículo Paulista*. Volume 01: Educação Infantil e Ensino Fundamental. São Paulo, 2019.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. *Currículo Paulista*. Volume 02: Ensino Médio. São Paulo, 2020.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. *Currículo Paulista*. Cadernos do Aluno Aprender Sempre: 1º ano – ensino fundamental. São Paulo, 2021a. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/12/1%C2%BA-ano-Aprender-Sempre-Caderno-do-Aluno.pdf. Acesso em: 28 maio 2021.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. *Currículo Paulista*. Cadernos do Aluno Aprender Sempre: 2º ano – ensino fundamental. São Paulo, 2021b. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/12/2%C2%BA-ano-Aprender-Sempre-Caderno-do-Aluno.pdf. Acesso em: 28 maio 2021.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. *Currículo Paulista*. Cadernos do Aluno Aprender Sempre: 3º ano – ensino fundamental. São Paulo, 2021c. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/12/3º-ano-Aprender-Sempre-Caderno-do-Aluno.pdf. Acesso em: 28 maio 2021.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. *Currículo Paulista*. Cadernos do Aluno Aprender Sempre: 5º ano – ensino fundamental. São Paulo, 2021d. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/12/5%C2%BA-ano-Aprender-Sempre-Caderno-do-Aluno.pdf. Acesso em: 28 maio 2021.

SENKEVICS, Adriano; POLIDORO, Juliano. Corpo, gênero e ciência: na interface entre biologia e sociedade. *Revista da Biologia*. São Paulo. v. 9, n. 1, p. 16-21, 2012.

SEVILLA, G.; SEFFNER, F. A guinada conservadora na educação: reflexões sobre o novo contexto político e suas reverberações para a abordagem de gênero e sexualidade na escola. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL FAZENDO GÊNERO, 11 & WOMEN'S WORLDS CONGRESS, 13, 2017, Florianópolis. *Anais* [...]. Florianópolis: UFSC, 2017.

TAKARA, Samilo. "Que que é isso que essas bichas tão fazendo?": micropolíticas de resistência em enviadescer da Mc Linn da Quebrada. *In*: 7º Seminário Brasileiro de Estudos Culturais e Educação/4º Seminário Internacional de Estudos Culturais e Educação, 2017, Canoas. *Anais* [...]. Canoas: PPGEDU, 2017.

TAVEIRA, Flavio Augusto; PERALTA, Deise Aparecida Análise de documentos curriculares de Matemática inspirada na ética discursiva de Jürgen Habermas. *Educação Matemática Pesquisa*: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 22, n. 3, p. 512-537, 2021.

VENCATO, Anna Paula. *Fervendo com as drags*: corporalidades e performances de drag queens em territórios gays da Ilha de Santa Catarina. Curso de Programa de Pós-Graduação em Antropologia Social, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Santa Catarina, Ilha de Santa Catarina, 2002.

YOUNG, Iris. Abjection and oppression: dynamics of unconscious racism, sexism, and homophobia. *In*: DALLERY, A. B; SCOTT, C. E; HOLLEY, R. P. *Crises in continental philosophy*. Albany – New York: State University of New York Press, 1990.

ZAMBRANO, Elizabeth. Parentalidades "impensáveis": pais/mães homossexuais, travestis e transexuais. *Horizontes antropológicos*, Porto Alegre, v.12, n. 26, jul./dez. 2006.

Capítulo 6

Origami e Produção de Vídeos Digitais

Carolina Yumi Lemos Ferreira Graciolli
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

> *A arte celebra com intensidade peculiar os momentos em que o passado reforça o presente e em que o futuro é uma intensificação do que existe agora.* (DEWEY, 2010, p. 82)

A arte e a matemática nasceram juntas, se distanciaram e se aproximaram ao longo da história (ZALESKI FILHO, 2013). Buscando desconstruir essa visão fragmentada dos conhecimentos, Gusmão (2013) defende uma educação matemática pela arte. Para a autora, a estética "propõe estudar o belo e o sentimento de prazer que suscita nos homens" (GUSMÃO, 2013, p. 108). Para Cifuentes (2003), a estética é importante para

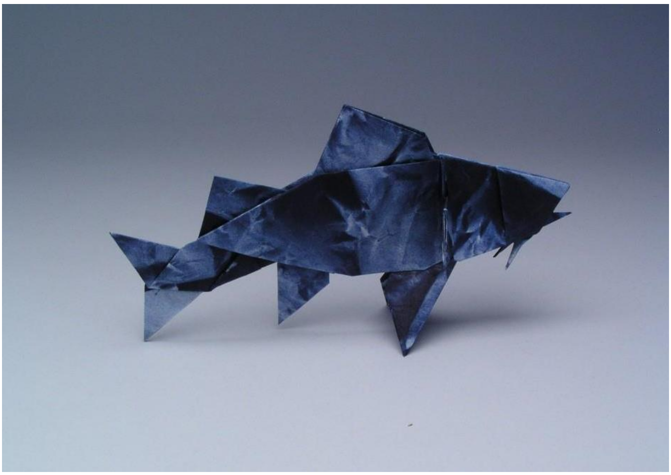
> dar embasamento teórico para a discussão sobre a diferença [...] entre **ensinar** matemática e **ensinar a apreciar** a matemática, o que poderia traduzir-se em analisar a diferença entre conteúdo **científico** e conteúdo **estético** da matemática ou, do ponto de vista epistemológico, entre conhecimento **científico** e conhecimento **estético** da matemática (CIFUENTES, 2003, p. 60, grifos do autor).

Dessa forma, "a beleza, então, vem da emoção que temos diante de uma produção, de um saber adquirido, da apreciação estética da matemática, também da sensação de conseguirmos ver o mundo de uma maneira que não víamos antes" (GUSMÃO, 2013, p. 110). Neste capítulo, o objetivo é apresentar e discutir aspectos da estética matemática envolvida ao dobrar papéis e ao produzir vídeos, características presentes em um movimento de ver o mundo de uma forma que não era visto antes.

Origami e matemática

A palavra origami[1] (折り紙) tem etimologia japonesa e é composta pelas palavras *ori* (折) e *kami* (紙) , que significam, respectivamente, "dobrar" e "papel". Os modelos feitos por meio de dobras no papel, segundo Lang (1996), inicialmente buscavam representar animais, plantas, formas humanas e objetos. Um exemplo é o origami Goatfish, figura 1, dobradura de peixe criada por Robert Lang.

Figura 1 – Origami Goatfish.



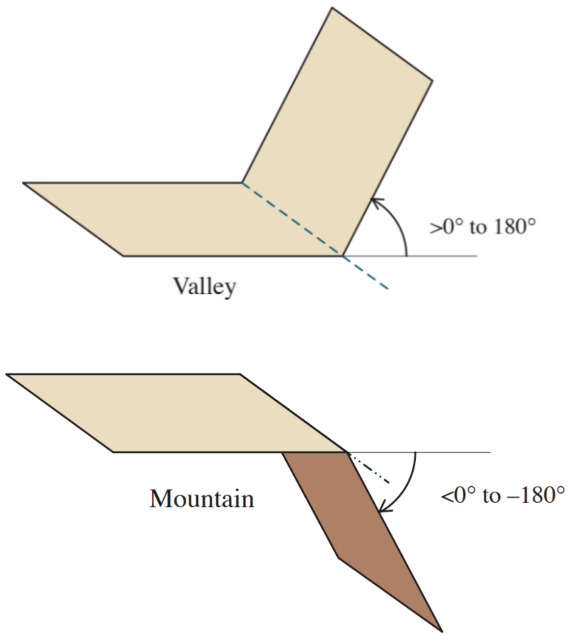
Fonte: Lang (2002).

De acordo com Monteiro (2008), a arte de dobrar papéis era tradicionalmente passada de geração para geração, em que pais e professores ensinavam seus filhos e alunos. Entretanto, Akira Yoshisawa, desenvolveu uma linguagem para que os passos para dobrar um origami pudessem ser

[1] No Brasil, origami é também conhecido como dobradura de papel.

expressos em páginas de livros por meio de diagramas. Essa linguagem se baseia em representar dobras em vale e dobras em montanha, que são as dobras com vincos para cima e para baixo respectivamente, como ilustra a figura 2.

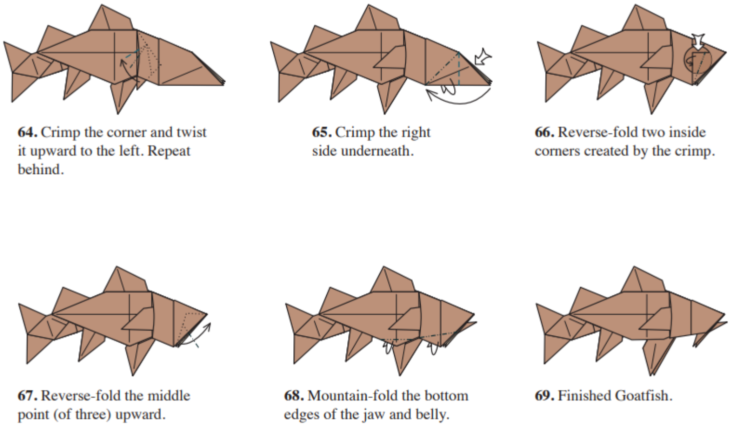
Figura 2 – Dobra em vale e dobra em montanha.



Fonte: Adaptado de Lang (2012).

A diagramação proposta por Yoshisawa permitiu que a arte pudesse ser disseminada por meio de livros, e com isso, os origamis passaram a ser conhecidos por vários países e com as tecnologias digitais novas formas de reproduzi-lo surgiram (MONTEIRO, 2008). Por exemplo, a figura 3 é um recorte do livro "Origami Design Secrets", no qual Lang apresenta o passo a passo de como dobrar o Goatfish.

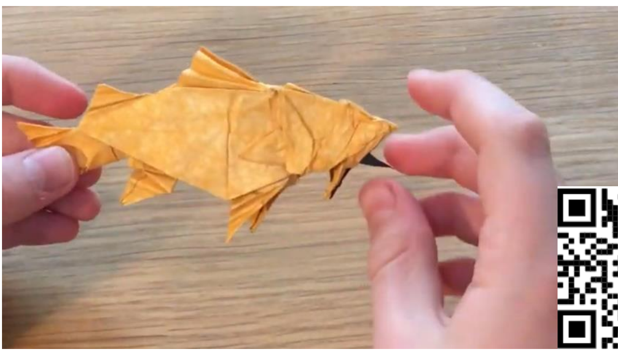
Figura 3 – Recorte do passo a passo para dobra o Goatfish.



Fonte: Lang (2012).

Para a construção do peixe são necessários 69 passos, ilustrados um a um, destacando as dobras que devem ser feitas com vinco para cima ou para baixo. Além dos diagramas, Teixeira (2017) destaca que, outra forma para compartilhar e reproduzir um origami é por meio de vídeos. Por exemplo, o vídeo que pode ser acessado pelo QrCode da figura 4, é um tutorial de como dobrar o Goatfish, nele é possível ver o movimento envolvido ao fazer cada dobra.

Figura 4 – Vídeo tutorial de como dobrar o Goatfish.[2]

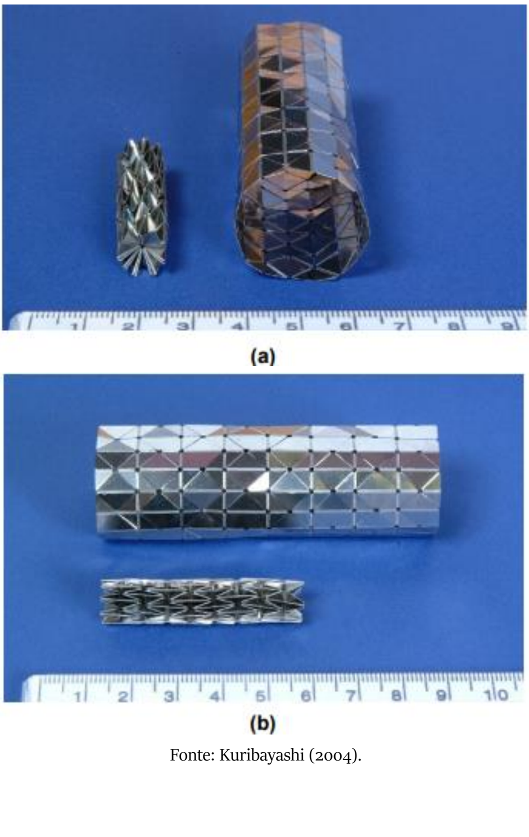


Fonte: Origami Hug (2019).

[2] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=lcGUVSEdhtk. Acesso em: 02 abr. 2021.

Além de outras maneiras de divulgar o origami, de acordo com Monteiro (2008), as dobras no papel começaram a ser vistas com outros olhos, para além de uma arte utilizada para representar objetos do cotidiano, passando a ser integradas ao meio acadêmico como tema central em diversas pesquisas. Um exemplo é a pesquisa de Kuribayashi (2004), ao desenvolver um *Stent* Cardíaco de estrutura dinâmica e flexível utilizado para a realização de processos cirúrgicos visando melhorar a eficiência e a experiência do paciente, como o ilustrado na figura 5. A estrutura foi criada recorrendo a um padrão de dobras conhecido como *water bomb,* que permite ao cilindro se compactar e se expandir, facilitando sua aplicação e obstrução de uma veia entupida de gordura, por exemplo.

Figura 5 – Protótipo do Origami *Stent*.



Fonte: Kuribayashi (2004).

Além disso, os origamis também são foco de estudos para a construção de robôs. Jamie Paik apresenta, em um TED Talk[3] em 2019, a sua pesquisa sobre como com uma folha de papel podem ser criados diferentes modelos e, caso o resultado não seja o esperado, é só desdobrar e tentar novamente. De acordo com Paik (2019), os "robogamis" são capazes de se transformar, podendo adaptar-se ao tipo de função que devem desempenhar. Assim, como uma folha de papel pode ser dobrada para criar diferentes figuras, os robôs de origami são dobrados de acordo com o que é preciso fazer, e essa principal característica é garantida matematicamente.

Segundo Monteiro (2008), as dobras passaram a ser analisadas por matemáticos que desenvolveram um sistema de axiomas próprios de uma geometria, que a autora destaca como "Geometria do Origami". A arte de dobrar papéis começou a ser estruturada e reconhecida como uma forma de matemática, podendo se realizar demonstração por meio de argumentos que envolvem as dobras no papel. De acordo com Hull (2020), as questões que motivaram o estudo de uma "matemática do/no origami" eram sobre se:

> existe alguma geometria inerente aos padrões de vincos? Existe uma maneira de prever em que forma [os origamis] podem ser dobrados? Existe um limite para a complexidade das formas que podem ser dobradas? Como faríamos a pergunta anterior em uma conjectura precisa que pudesse ser comprovada? (HULL, p. 1, 2020, tradução nossa)[4].

---

[3] Disponível em: https://www.ted.com/talks/jamie_paik_origami_robots_that_reshape_and_transform_themselves?language=pt-br#t-151699. Acesso em: 03 abr. 2021.

[4] "Is there any inherent geometry to these crease patterns? Is there a way to predict into what shape they fold? Is there a limit to the complexity of shapes that can be folded? How would we make the previous question into a precise conjecture that could be proven?" (HULL, 2020, p. 1)

Com o potencial do origami para se explorar matemática e produzir vídeos, discutiremos neste capítulo acerca da estética presente no processo de produção de um vídeo sobre matemática e origami. Para tanto, a seguir destacamos alguns aspectos da produção de vídeos.

Produção de vídeos

Os vídeos estão cada vez mais inseridos na sociedade. Estão na televisão, no celular, no computador, passamos grande parte do nosso tempo assistindo vídeos. No mesmo sentido, Fontes (2019, p. 53) enfatiza que:

> o pensar com o vídeo não está somente impregnado na cultura dos alunos, mas da sociedade de um modo geral, visto que muitas vezes as pessoas contam uma história utilizando o vídeo, bem como se expressam, formam opiniões e se identificam com outras pessoas ou culturas por meio dele.

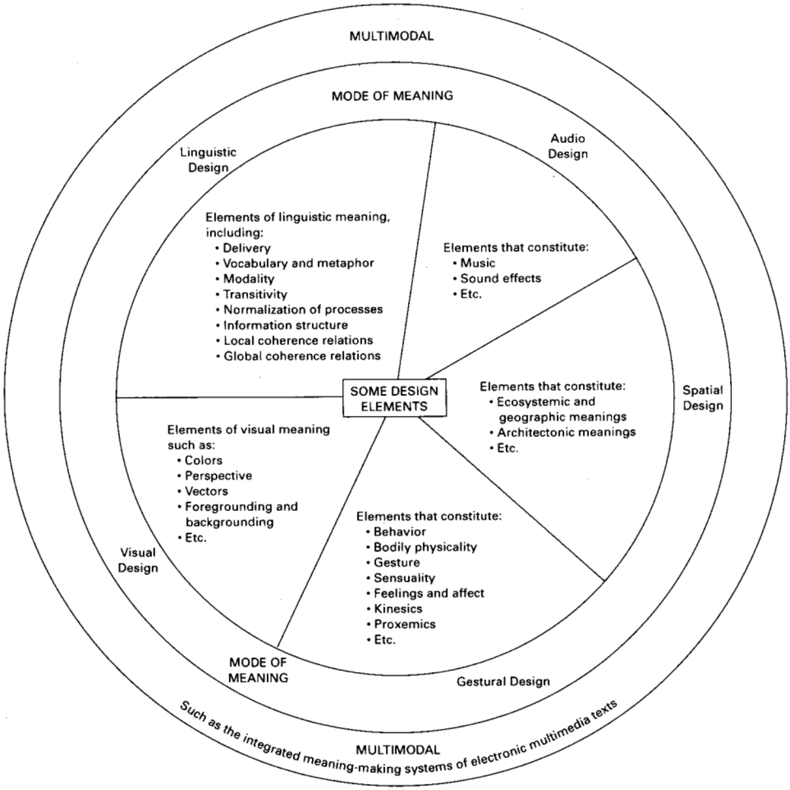
Mas afinal, o que é um vídeo? Além de várias imagens em sequência compiladas, Dubois (2004) apresenta o vídeo como "uma imagem-ato" e nessa direção, podemos pensá-lo como uma forma de expressão. Para Fontes (2019, p. 48), o vídeo é um "meio de comunicação que engloba a imagem em movimento, áudio, diversas linguagens e formas de expressão (utilizadas na sociedade) que representam ideias ou pensamentos de um indivíduo ou grupo".

A produção de vídeos por alunos é cada vez mais acessível. Como destacam Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), o uso das tecnologias digitais progressivamente está sendo inserido em sala de aula. A popularização dos computadores e celulares favorece a utilização dessas tecnologias na escola, uma vez que, muitos alunos possuem um desses aparelhos e os utilizam com frequência. A respeito dos alunos produzirem vídeos digitais, Oechsler (2018) ressalta que a partir do momento que uma atividade envolvendo criação de vídeos é proposta, a aprendizagem passa a ser iniciativa dos alunos, porque eles precisam entender o conteúdo para explicar em um vídeo.

Existem ao menos duas dimensões sobre a produção de vídeos que possuem grande significância pedagógica: a narrativa e a multimodal. Ambas as dimensões perpassam por aspectos diversos sobre as *estéticas do texto*. Em particular, a dimensão narrativa diz respeito também à estética da relação eu/outro, o que é significativo para constituição de identidades matemáticas (GADANIDIS; BORBA, 2008). Ao produzir um vídeo os autores constituem intencionalidades. Dentre elas, reflexões/ações do tipo: que imagem os outros construirão sobre eu/nós a partir desse vídeo? Estou comunicando minhas ideias matemáticas claramente? O eu/nós matemático é uma virtualidade constituída no processo de concepção e publicação de uma narrativa (fílmica). Em nosso caso, quando criamos vídeos sobre origamis, emergem inquietações diversas nos processos de pré-, pós- e produção: os procedimentos de criação do origami estão claros (linguagem verbal, movimentos de dobras, etc.)? O discurso pode ser aprimorado do ponto de vista matemático/geométrico, artístico e/ou tecnológico? Que imagens a audiência poderá construir sobre os "eus" apresentados no vídeo? O processo de construção de identidades matemáticas na construção de narrativas digitais perpassa por aprimoramentos conceituais diversos que se engendram.

A dimensão multimodal de vídeos digitais pode ser discutida com base em perspectivas do New London Group (1996), que propõe cinco *designs* como constitutivos dos modos de significação na comunicação multimodal. Os *designs* são: visual, aural, gestual, espacial e linguístico (figura 6).

Figura 6 – Elementos dos designs.



Fonte: New London Group (1996).

Em geral, a narrativa fílmica oferece meios semióticos para explorar todos esses designs simultaneamente do ponto de vista comunicacional/representacional, incluindo os trabalhos sobre performance matemática digital (SCUCUGLIA, 2012). Em particular, nos vídeos sobre origami os *designs* visual/espacial/gestual ganham muita significância do ponto de vista conceitual e pedagógico, pois a exploração matemática/geométrica relacionada ao movimento de dobra é fulcral na construção dos origamis em cenários educacionais. O pensar-origamis-com-vídeos permite que alunos e professores possam explorar de maneira muito detalhada e semioticamente clara as construções por meio das dobras. Potencialmente, portanto, a criação de narrativas fílmicas potencializa o ensino e aprendizagem sobre origamis. A seguir, veremos algumas situações dessa natureza.

Vídeo "Teorema de Pitágoras: demonstração por origami"

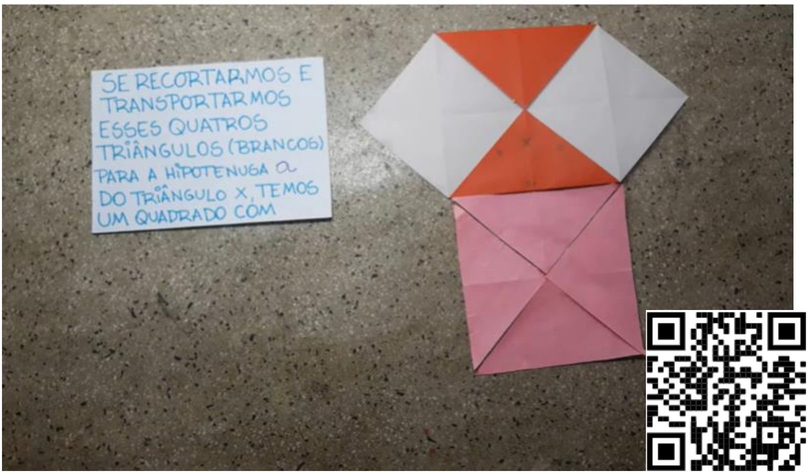
A metodologia escolhida para o desenvolvimento da reflexão foi a de pesquisa qualitativa. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), essa abordagem objetiva compreender questões relacionadas à qualidade do objeto de estudo, buscando interpretar os significados de um fenômeno. Como a intenção é investigar o que foi produzido por estudantes envolvendo origami, produção de vídeos e matemática, a análise consiste em voltar-se para as discussões estabelecidas no processo de produção do vídeo.

Para isso, foi ministrado um curso de extensão universitária, contexto para a produção de dados da pesquisa de mestrado da autora deste capítulo, em que os participantes tiveram contato com o origami e a produção de vídeos (GRACIOLLI, 2021). Participaram do curso oito estudantes, os quais exploraram a matemática envolvida ao dobrar papéis e produziram vídeos em duplas. Dos vídeos produzidos, neste capítulo, abordaremos a discussão de um dos grupos no momento de produção. A dupla em questão, Carol e Diego, era composta por alunos da graduação em matemática e o vídeo criado tinha como tema o Teorema de Pitágoras. A análise se deu a partir das gravações e dos relatos dos participantes que foram transcritos integralmente.

No vídeo "Teorema de Pitágoras: demonstração por origami", figura 7, os estudantes enunciaram o Teorema de Pitágoras e ensinam a dobrar o papel possibilitando verificar a relação $a^2 = b^2 + c^2$ em triângulos retângulos quando as medidas dos catetos 'b' e 'c' são iguais. Para provar que a soma dos quadrados dos catetos é igual a hipotenusa ao quadrado, os estudantes recorrem a sobreposição de figuras e para finalizar o vídeo, eles ensinam a dobrar um sapo que realiza um pulo de 360º utilizando a mesma folha usada para a verificação do teorema.

Essas decisões foram tomadas, pois durante a pesquisa para procurar o tema do vídeo, os estudantes, escolheram abordar o Teorema de Pitágoras, uma vez que, era o assunto que deveriam trabalhar em seus projetos de Iniciação à Docência. Além disso, ao buscar algo que chamasse atenção dos alunos, Carol e Diego, consideraram a possibilidade de construir um sapo de origami com a mesma folha que foi utilizada para a prova do teorema, isto é, as dobras que foram feitas para verificar o teorema também foram utilizadas para a dobradura do sapo.

Figura 7 – Recorte do vídeo “Teorema de Pitágoras: demonstração por origami”[5].



Fonte: Acervo da pesquisa.

Os estudantes tiveram dois encontros de três horas e os encontros fora da sala para produzir o vídeo. As tomadas de decisão dos integrantes

[5] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=eRt86Pydyjc. Acesso em: 04 abr. 2021.

do grupo foram pensadas levando em conta como tornar o vídeo compreensível para quem o assiste. A dupla enfatizou a necessidade de entender a prova do teorema antes de expressá-la no vídeo. Segundo Oechsler (2018, p. 209), "o indivíduo comunica aquilo que lhe fez sentido, podendo, desta forma, verificar nessa comunicação sinais de aprendizagem deste indivíduo sobre o conteúdo comunicado", dessa forma, os estudantes expõem no vídeo aquilo que eles compreendem. Antes de definir o conteúdo da produção, os participantes destacam que a prova deve fazer sentido:

> **Carol:** "Tá". Vamos ver se a gente aprende, para ver se isso faz sentido para fazer um vídeo. Vamos ver se a gente vai conseguir fazer a demonstração certinha. [...] Tipo, pega mais duas ali, para a gente testar o que a gente quer fazer. Aí, nós vemos como fica. [...] A gente precisa entender.

Nesse recorte, a Carol explicita que eles precisam entender a prova antes, para então decidir se vão ou não abordá-la no vídeo, essa é uma característica destacada por Oechsler (2018) ao discutir que a aprendizagem passa a ser interesse dos estudantes produtores do vídeo. Compreender o conteúdo se mostra fundamental para que os estudantes optem por produzir um vídeo com um tema que faça sentido a eles.

Além da prova do teorema, os estudantes buscaram dobrar o sapo a fim de decidir se o origami faria parte do conteúdo do vídeo. Eles tiveram bastante dificuldade para entender o diagrama da construção do sapo e não queriam que isso se repetisse aos espectadores do vídeo. No diálogo a dupla buscava entender o diagrama e construir o sapo:

> **Carol:** Só que a gente não está conseguindo sair desse passo 11 [figura 8]. Está assim, não é? No [passo] 10 está assim.
> **Pesquisadora:** Certo.
> **Carol:** Aí, no [passo]11 ele fala para a gente dobrar essa pontinha aqui.

Pesquisadora: Mas eu acho que não é isso, não.

Carol: Não? Ah!

Pesquisadora: Esse é o 10 e esse 11? Nossa. Dobra essa pontinha, eu acho que não é essa não. Depois dobra na metade, não é?

Carol: Então, só que quando a gente dobra na metade, não está igual.

Pesquisadora: A ponta está bem diferente.

Carol: Está. Na hora que eu dobrei parece que isso aqui está mais no meio.

Pesquisadora: Parece que está algo mais assim, não parece?

Carol: É. [...] Agora é para abrir? É isso? Não é isso. Está vendo que está diferente? Aqui parece que ele manda dobrar para cima, mas está diferente. Acho que é desse lado, mas aqui nem tem dobra, está vendo? [...] No *site* ela fala que o sapo dá um pulo de 360 [graus].

Pesquisadora: Mas eu acho que é alguma coisa no final.

Diego: Se fizer isso só que do outro lado. Então tem que dobrar ao contrário. [...] Eu acho que está do lado certo agora. Está parecido com a imagem deles. Ah, está pulando, mas 360 já é pedir demais.

Pesquisadora: Talvez se ele não estivesse tão amassado, talvez, não sei. Seria legal se ele desse [o pulo].

Diego: Uia [onomatopeia de surpresa ao ver que o sapo quase realizou o pulo de 360°]. Olha! Mas eu acho que está certo. [Todos tentando, insistentemente, fazer o sapo pular, Diego, Carol e Pesquisadora].

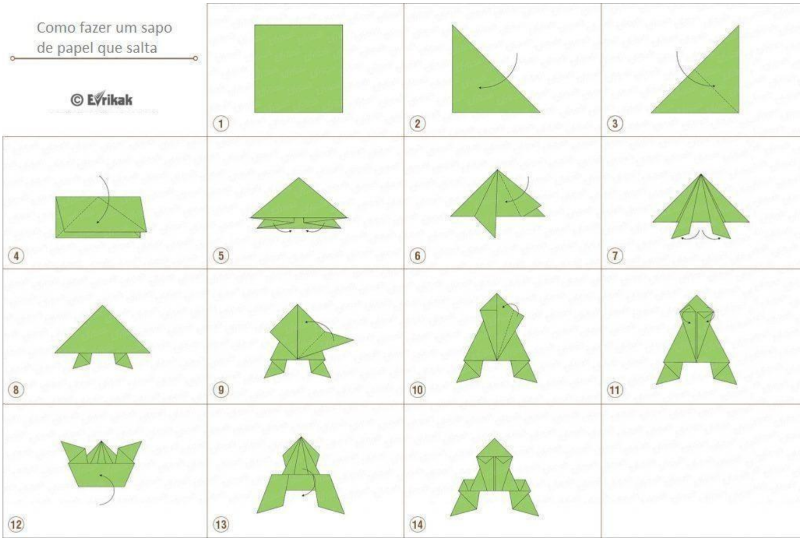
Carol: Ele foi! [Com grande empolgação ao ver que o sapo de origami realizou um pulo de 360º].

Diego: Eu também quero [tentando fazer o sapo pular novamente]. Ah!

Pesquisadora: Deu certo.

Carol: Pronto, a gente encerra com o sapo de 360.

Figura 8 – Tutorial utilizado para dobrar o sapo.[6]



Fonte: Evrikak (2018).

A empolgação presente nos gestos e falas dos estudantes ao conseguir dobrar o sapo após diversas tentativas, evidencia características de uma experiência estética, de acordo com Cifuentes (2003), a estética é entendida como a ciência do conhecimento sensível. A experiência estética pode contribuir para uma visão de matemática para além de uma ciência racional, que abarca também "características emocionais, as quais são intimamente ligadas com a intuição e a experiência estética" (CIFUENTES, 2003, p. 59).

A ideia da dupla, a princípio, era produzir um *stop motion*[7], porém durante a execução eles tiveram dificuldade para expressar as dobras por meio de várias imagens estáticas. Sendo assim, os participantes

---

[6] Disponível em: https://evrikak.net/criatividade/feito-com-as-maos/como-fazer-um-sapo-de-papel-que-salta/. Acesso em: 05 abr. 2021.

[7] *Stop Motion* de acordo com Ciriaco (2009), pode ser traduzido como "movimento parado" e trata-se de uma técnica que utiliza várias imagens em sequência, dando a impressão de movimento a um objeto inanimado. Essas imagens "são chamadas de quadros e normalmente são tiradas de um mesmo ponto, com o objeto sofrendo uma leve mudança de lugar, afinal é isso que dá a ideia de movimento" (CIRIACO, 2009, n.p.).

repensaram e decidiram gravar o movimento para mostrar como é feita a dobradura do sapo:

> **Carol:** A gente vai fazer o nosso vídeo com *stop motion* [para provar o teorema] e no final, para explicar o origami, pode ser que a gente faça um vídeo. Vai ter que gravar minha mão. Mostrar minhas mãozinhas [risos].

Entretanto, a dupla questionou se os movimentos representados pelas dobras no papel estariam claros ao fazer um *stop motion*. A dúvida era como estabilizar o papel na metade do caminho de um vinco completo, de forma que não aparecesse somente o papel aberto e depois fechado. Como solução eles decidiram produzir um vídeo inteiro gravando e desistiram da ideia do *stop motion*, pois acreditavam que seria difícil elucidar o movimento de dobra com uma sequência de imagens produzidas por eles.

> **Diego:** A gente podia fazer o papel com um movimento assim [girando com a técnica do *stop motion*], aí, aparece dobre as diagonais, puff [onomatopeia de aparecimento repentino]. Será que não é melhor a gente filmar mesmo?
> **Carol:** Não sei. Por que, você está com medo de não dar tempo?
> **Diego:** Não, não sei se vai ficar legal. Porque o sapo a gente vai ter que filmar sabe. O sapo não é possível fazer por *stop motion*. [...] É que se a gente for fazer por *stop motion*, não vai dar para fazer esse processo aqui [pegando e dobrando o papel], sem as mãos. Entendeu? Teria que fazer assim, foto dobrado e foto aberto. Aí gira no *stop motion* e sobe aqui [dobrando o papel]. Aí, gira no *stop motion* e gira de novo. Mas muitas fotos.
> **Carol:** Mas você quer fazer vídeo então?
> **Diego:** Você que sabe.
> **Carol:** É você que vai editar, entendeu? Você precisa pensar nisso, como que está seu tempo?
> **Diego:** Não sei. É que tipo, a dobra a gente não vai conseguir fazer um *stop motion* que o papel não fica parado no meio do caminho. Só se a gente pensar em uma coisa diferente.

Além da preocupação em fazer com que os movimentos de dobrar sejam compreensíveis a quem assiste o vídeo, os estudantes discutiram o enquadramento, as fontes, cores do papel e das letras, qual seria o fundo, uma música, visando produzir um vídeo interessante e convidativo aos espectadores. Por exemplo, eles discutiram acerca de como iriam escrever na tela, já que não se sentiam à vontade para falar, qual seria a melhor opção para quem assiste ao vídeo.

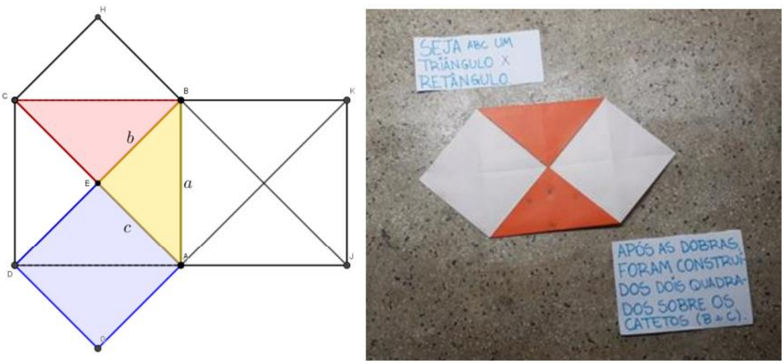
> **Carol:** Vai falar? Só com imagem? E como que faz as letras?
> **Diego:** Assim a gente escreve aqui "note que..." [em um pedaço de papel] aí, aparece do lado. A gente vai colocando os escritos.
> **Carol:** Tem que ser no papel, não pode ser digitado?
> **Diego:** Pode. Mas acho que andando assim [movimento com um papel sobre a mesa] acho que ficaria mais bonito do que colocar um texto assim "tum" [onomatopeia de aparecimento bruto e repentino]. *Times New Roman,* "tum".
> **Carol:** Mas não precisa ser *Times* [*New Roman*], tem letras bonitinhas. Pior que a minha letra é horrível.

A inquietação descrita, enfatiza a preocupação da dupla com a fonte e o impacto que ela pode representar. Levando em conta que os estudantes participavam de projetos voltados para o ensino fundamental, eles pretendiam produzir um vídeo que pudesse ser acessível a alunos de 6º, 7º, 8º e 9º ano, e o formato da letra, bem como as cores e a posição da escrita, foram discutidas para encontrar formas de tornar a produção interessante. Essa possibilidade se abre por conta da mídia vídeo que permite criar e imaginar diferentes cenários, assim como destaca Fontes (2019, p. 54) o "vídeo possui diversos aspectos: sensorial, visual, falado, musical, gestual, escrito, artístico e cinematográfico" que possibilitam trabalhar com diferentes elementos que podem favorecer exposição do que se deseja comunicar.

Outra situação que foi discutida para pensar em qual a melhor forma de expor no vídeo, foi sobre como mostrar que, efetivamente, $a^2 = b^2 + c^2$. Os estudantes destacaram que tinham a intenção de convencer os espectadores da validade do teorema e optaram por recortar o papel e reorganizar as peças para elucidar que as peças que formam os dois quadrados de lado 'b' e 'c' também podem formar o quadrado de lado 'a', figura 9.

> **Diego:** É, a gente fez. Com o quadrado a gente dobrou aqui para trás e ai aqui é 'a', 'b', 'c' e aqui vai ser a minha hipotenusa. Esse com esse lado 'b' e 'c' eu queria fazer um quadrado para mostrar que isso é igual a isso [quadrado azul, na figura 9]. Aí, falamos se a gente recortar e montarmos um quadrado, só que não é desse tamanho [quadrado do recorte é diferente do quadrado de lado 'a'] teria que ser, na verdade, quatro pedaços. Então se a gente recortasse mais esse dois.
> **Carol:** É que ele fala que aqui formam dois quadrados [AEDG e EBHC]. [...] Esse triângulo aqui é igual a esse x, aí ele fala que se eu recortar esses quatro triângulos eu formo um quadrado de [lado igual a] hipotenusa 'a'. Aí, a gente queria fazer esse processo, mostrar que forma esse quadrado.

Figura 9 – Diagrama da dobradura utilizada para verificar o teorema e frame do vídeo.



Fonte: Graciolli (2020).

O trabalho com o papel e as dobras permitiu aos estudantes realizar uma verificação ao comparar as áreas das figuras formadas pelas dobras. Eles chegaram à conclusão que, em um quadrado, ao dobrar dois vértices opostos até o centro, como na figura 9, serão formados dois triângulos retângulos isósceles na parte colorida do papel (ABE e CED) e dois quadrados na parte branca do papel (AEDG e EBHC). Eles consideraram o triângulo ABE perceberam que a hipotenusa é o lado AB e que os catetos são BE e EA, mas BE e AB também são lados dos quadrados formados na parte branca do papel (AEDG e EBHC), já que os triângulos DEC, CEB, EBA, DEA são congruentes pela dobradura, então o quadrado de lado AB é igual soma dos quadrados de lado BE e EA, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$, o que resulta justamente no Teorema de Pitágoras. A verificação pode ser feita ao recortar os quadrados de lado BE e EA em triângulos e reorganizá-los para formar o quadrado com lado AB.

Os estudantes discutem que a prova em questão é visual, pois envolve a comparação e sobreposição de áreas. Por um lado, mesmo que no título e no conteúdo do vídeo apareça a palavra “demonstração” do Teorema de Pitágoras, é importante ressaltar que o método apresentado não se caracteriza como uma demonstração matemática do Teorema de Pitágoras, pois se trata de um caso específico no qual os triângulos retângulos também são isósceles. Por outro lado, é interessante enfatizar que a intenção da dupla era apresentar uma prova rigorosa e pautada em argumentos bem fundamentados. Nesse sentido, a “prova visual” (HANNA, 2000, tradução nossa) é fundamental para o processo de convencimento. Hanna (2000) evidencia as representações visuais como potencial para o desenvolvimento de provas, para ela “é aceito um diagrama como componente legítimo de um argumento matemático” (p.15, tradução nossa), especialmente por estar interligado ao processo de convencimento de colegas, professores e espectadores. Os estudantes recorreram a argumentos para defender uma ideia e mostraram visualmente por meio da sobreposição de figuras que a relação $a^2 = b^2 + c^2$, é verdadeira em um triângulo retângulo quando 'b' e 'c' são iguais. Carol enfatiza que o caráter da prova:

> **Carol:** É visual. A gente vai precisar assistir a um vídeo para aprender a explicar. [...] É, porque a gente queria mostrar o que de fato acontece, aí, pensamos em fazer isso para ficar visual.

Nesse sentido, para a estudante a possibilidade de tornar a prova visual, com a sobreposição das figuras, apresenta-se como uma boa fonte de argumentos para, efetivamente, mostrar que o teorema é válido. Essa possibilidade se abre por conta da mídia vídeo ser multimodal, com *designs* como visual, aural, gestual, espacial e linguístico, permitindo aos produtores e espectadores experimentarem diferentes emoções e sensações que podem suscitar o prazer ao assistir o vídeo e ao explorar seu conteúdo.

Considerações finais

Os estudantes, durante o processo de produção, buscaram formas para garantir que o vídeo fosse interessante a quem o assiste, para isso, eles refletiram sobre a estética e a experiência que o espectador poderia ter ao assistir ao vídeo. Para a produção, os participantes, se preocuparam em como organizar os elementos, formas, conteúdo, cores, textos e etc., demonstrando atenção a características artísticas do vídeo, e de acordo com Gusmão (2013), a beleza está nas características emocionais frente a uma obra, promovendo ao espectador sentimentos que vibram ao contemplar as formas, cores, harmonias, ritmos.

Tais características foram identificadas quando os estudantes discutiam sobre qual o conteúdo do vídeo, a maneira como esse conteúdo deveria ser apresentado, quais deveriam ser as cores do papel e a fonte do texto, a posição dos elementos na tela, como provar o teorema de forma visual, como deveriam dobrar o papel, qual música utilizar e assim por diante. Contribuindo para um dos desafios da estética da matemática destacada por Cifuentes (2003, p. 74) que "é transformar habilidade em sensibilidade, para poder aceder ao conhecimento matemático através de sua apreciação estética".

Os vários testes e experimentos com o papel, destacam a busca por produzir algo que acenda o conhecimento matemático. O vibrar dos estudantes ao ver o sapo de origami realizar um pulo de 360º enfatiza a "emoção que temos diante de uma produção, de um saber adquirido, da apreciação estética da matemática" (GUSMÃO, 2013, p. 110), e elucida um dos momentos em que a estética esteve presente durante a produção de vídeos com origami. Bem como, foi a intenção dos estudantes produzirem um vídeo que suscitasse um sentimento parecido aos espectadores.

Referências

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994. 335 p.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: Sala de aula e internet em movimento. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. 155 p. (Coleção tendências em Educação Matemática).

CIFUENTES, J. C. Fundamentos Estéticos da Matemática: Da Habilidade à Sensibilidade. *In*: M. A. V. Bicudo (org.). *Filosofia da Educação Matemática*: Concepções e Movimento. Brasília: Ed. Plano, 2003, p. 59-79.

CIRIACO, D. O que é Stop Motion? *Tecmundo*, 2009. Disponível em: https://www.tecmundo.com.br/player-de-video/2247-o-que-e-stop-motion-.htm. Acesso em: 31 mai. 2021.

DUBOIS, P. *Cinema, vídeo, Godard*. Tradução de Mateus Araújo Silva. São Paulo: Cosac Naify, 2004. 303 p.

EVRIKAK. Como fazer um sapo que salta: instruções passo a passo. *Evrikak*, 2018. Disponível em: https://evrikak.net/criatividade/feito-com-as-maos/como-fazer-um-sapo-de-papel-que-salta/. Acesso em: 05 abr. 2021.

FONTES, B. C. *Vídeo, comunicação e Educação Matemática*: um olhar para a produção dos licenciandos em matemática da educação a distância. 2019. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2019.

GADANIDIS, G.; BORBA, M. C. Our lives as performance mathematicians. *For the Learning of Mathematics*, [*s. l.*], v. 28, n. 1, p. 44-51, 2008.

GRACIOLLI, C. Y. L. F. *Origami e Produção de Vídeos Digitais*: um estudo sobre a produção matemática em um curso de extensão universitária. 2021. 204 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2021.

GRACIOLLI, C. Y. L. F. Origami e produção de vídeos: algumas perspectivas. *In:* Congresso Brasileiro de Ensino e Processos Formativos, 5., 2020, São José do Rio Preto. *Anais* [...]. São José do Rio Preto: Unesp, 2020. [*N.p.*].

GUSMÃO, L. D. *Educação Matemática pela Arte*: em defesa da Educação da Sensibilidade no campo da Matemática. 152 f. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: an Overview. *Educational Studies in Mathematics*, New York, v.1, n. 44, p. 05 - 23, 2000.

HULL, T. *Origametry*: Mathematical Methods in Paper Folding. Cambridge University Press: New York, 2020. p. 332.

KURUBAYASHI, K. *A novel flodable stent graft*. 2004. 172 f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Departamento de Ciência da Engenharia, Universidade de Oxford, Reino Unido, 2004.

LANG, R. J. A computational algorithm for origami design. *In:* ANNUAL SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, 96., 1996, Pleasanton. *Proceedings* [...]. Pleasanton: ACM, 1996. p. 98-105.

LANG, R. J. *Origami Design Secrets*: Mathematical Methods for an Ancient Art. CRC Press: New York. 2 ed. 2012. p. 758.

LANG, R. J. Goatfish, opus 202. *Robert J. Lang Origami.* 2002. Disponível em: https://langorigami.com/artwork/goatfish-opus-202/. Acesso em: 31 mai. 2021.

MONTEIRO, L. C. N. *Orígamí*: história de um geometría axíomátíca. 2008. 111 f. Tese (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

NEW LONDON GROUP. A pedagogy of multiliteracies: Designing social futures. *Harvard Educational Review*, [*s.l.*] v. 66, n. 1, p. 60 – 92. 1996.

OECHSLER, V. *Comunicação Multimodal:* produção de vídeos em aulas de Matemática. 2018. 311 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2018.

ORIGAMI HUG. *Origami GoatFish* Tutorial (Robert J Lang). [S. l.; s. n.], 2019. Vídeo (55 min). Publicado pelo canal Origami Hug. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=lcGUVSEdhtk. Acesso em: 31 mai. 2021.

PAIK, J. *Origami Robots that reshape and transform themselves*. Palestra promovida do TED, Vancouver (Canadá), abr. 2019. Disponível em: https://www.ted.com/talks/jamie_paik_origami_robots_that_reshape_and_transform_themselves?language=pt-br#t-151699. Acesso em: 03 abr. 2021.

SCUCUGLIA, Ricardo. *On the nature of students' digital mathematical performances.* 2012. 273 f. 2012. Tese de Doutorado. Thesis (Doctor of Philosophy)–School of Graduate and Postdoctoral Studies. The University of Western Ontario. 2012.

TEIXEIRA, S. A. *Design do origami*: Um Estudo Sobre Técnicas Projetuais com Dobras. 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado em Design) - Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2017.

ZALESKI FILHO, D. *Matemática e Arte.* Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 179 p. (Coleção tendências em Educação Matemática).

Capítulo 7

Produção Audiovisual e Produção Musical no Programa Residência Pedagógica – Matemática IBILCE/Unesp

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
Mara Andréa Alves Pereira Ribeiro
Ana Carolina Bueno de Carvalho
Ana Carolina Marques Magnani Velasques
Bruno Ferracini de Oliveira
Daniel Lauri Costa Weber
Diego Henrique Faustino Carriel
Geisca Irena Moura
Hudson Martins Rodrigues
Jaqueline aparecida dos Santos Alves
Laís Cera de Souza
Mariana Bego
Matheus Pereira Secco
Paola Gioccom Adami
Stephanie Belazi
Thaynara Convento Bomfim
Vitória Mazzucca Fernandes

Introdução

Neste capítulo, apresentamos reflexões acerca de atividades realizadas no âmbito do Programa Residência Pedagógica (RP) do núcleo constituído no curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) da Universidade Estadual Paulista (Unesp), câmpus de São José do Rio Preto. Juntamente com o PIBID[1], o RP pode ser conceituado como um Programa de Iniciação à Docência fomentado pela CAPES[2] de significativa relevância para formação de licenciandos de diversas áreas. O PIBID e o RP são processos formativos de reconhecido impacto social, pedagógico e cultural que

[1] PIBID: Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

[2] CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

abrangem múltiplas dimensões a respeito da formação inicial e continuada de professores (MENDONÇA *et al.*, 2018).

O RP Matemática IBILCE/Unesp participou dos dois editais publicados pela CAPES até o presente momento (março de 2021), desenvolvendo suas atividades em escolas públicas estaduais. O núcleo constituído a partir do primeiro edital desenvolveu suas atividades de 2018 a 2020[3] (SCUCUGLIA *et al.*, 2019). O segundo núcleo – em andamento – iniciou suas atividades em outubro de 2020[4]. Dispondo da duração de 18 meses, esse grupo finalizará suas atividades em março de 2022.

Em cada um dos núcleos participaram um coordenador, uma professora preceptora e oito bolsistas residentes. Além disso, em ambos editais foram exploradas questões diversas sobre a práxis do licenciando em Matemática como a atividade supervisionada em escolas (observação pedagógica em sala de aula e de gestão, regência de aulas e oficinas, elaboração de planos de aula e materiais didáticos) e a exploração epistemológica-educacional (estudo e reflexão sobre metodologias de ensino, teorias de aprendizagem, etc.), sendo que o atual núcleo RP Matemática IBILCE/Unesp tem desenvolvido suas atividades considerando o cenário de pandemia da Covid-19 (atividades *online*, não-presenciais).

De maneira geral, assim como em outros cenários PIBID/RP – Matemática (SILVA; CRUZ, 2018; FREITAS; FREITAS; ALMEIDA, 2020), temáticas como resolução de problemas, jogos e ludicidade, tecnologias digitais e conteúdos curriculares (BRASIL, 2018) estiveram em pauta continuamente em nossas experiências formativas. Especificamente, temos buscado explorar duas vertentes na interface *usos de tecnologias*

---

[3] Desenvolvido na Escola Estadual Professora Maria Galante Nora em São José do Rio Preto, SP.

[4] Desenvolvido na Escola Estadual Professora Amira Homsi Chalella em São José do Rio Preto, SP.

digitais + artes: (a) produção audiovisual e (b) produção musical (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). Destacamos que, pelo fato do coordenador do núcleo RP ser também responsável pela pesquisa, este capítulo aborda questões sobre experiência Matemática estética em cenários de ensino e pesquisa no âmbito da formação de professores.

Produção Audiovisual no RP – Matemática IBILCE/Unesp

Não somente o uso de tecnologias informáticas ou digitais possui uma história de décadas na Educação Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014), mas o uso e produção de vídeos (digitais) em processos de ensino e aprendizagem de Matemática já possui sua história recente (DOMINGUES, 2014; OESCHELER, 2018; FONTES, 2019; NEVES, 2020; DOMINGUES, 2020). A partir da década de 1980, era possível que professores tivessem acesso a televisores e videocassetes como recursos didáticos em sala de aula ou salas de recursos audiovisuais em escolas. A partir da década de 2000, com a popularização de computadores pessoais em conciliação com o surgimento da Internet, o acesso a vídeos digitais foi se intensificando. Também, o acesso a dispositivos de registros audiovisuais portáteis (câmeras de vídeos digitais, câmeras fotográficas com recurso de filmagem, *smartphones* com câmeras, *tablets*) e programas de edição de vídeos com interfaces amigáveis (e.g., Microsoft *MovieMaker*) ofereceram meios para que *usuários* se tornassem também *produtores* audiovisuais.

A pandemia da Covid-19 impactou muitos setores da Educação. Nos anos de 2020 e 2021 as escolas de Educação Básica no Brasil passaram por diversas normativas e várias alterações. Mas, de maneira geral, pode-se afirmar que houve ênfase ao desenvolvimento de “atividades remotas”, ou seja, a inviabilização de atividades presenciais diante dos índices de contágio fez com que fossem adaptadas propostas pedagógicas baseadas no uso de cenários virtuais. Isso, consequentemente, impactou o desenvolvimento dos estágios supervisionados nos cursos de licenciatura e dos programas PIBID e RP. No caso particular do Estado de São Paulo, as práticas de estágio supervisionado foram normatizadas pela Portaria CEE[5].

Nesse sentido, o desenvolvimento do primeiro módulo do RP Matemática IBILCE (setembro de 2020 a março de 2021) teve como principal cenário de investigação o Centro de Mídias do Estado de São Paulo (https://centrodemidiasp.educacao.sp.gov.br/). A professora preceptora e os residentes analisaram e discutiram diversas videoaulas transmitidas e registradas periodicamente no canal do YouTube do Centro de Mídias (https://www.youtube.com/channel/UC4PxhhCLUs1ESKz5EwuepMw). Devido a questões técnicas, os residentes não tiveram acesso ao aplicativo do Centro de Mídias, o que inviabilizou o contato *online* direto com alunos via *chat*, por exemplo. Portanto, o acesso, análise e discussão de videoaulas foram uma das principais atividades dos residentes no módulo 1 do RP Matemática IBILCE em 2020.

Contudo, foram também realizadas atividades de produção de vídeos digitais. Com base no material intitulado "Aprender Sempre" (SEDUC, 2020) disponibilizado pelo Centro de Mídias, os residentes produziram coletivamente três videoaulas visando dar suporte aos alunos do Ensino Médio das turmas da professora preceptora, que realizariam avaliações baseadas nesses materiais. Os vídeos produzidos pelos residentes exploraram os seguintes conteúdos: análise combinatória, números racionais e números irracionais. Na Figura 1 apresentamos uma imagem do canal do YouTube do RP Matemática IBILCE/Unesp.

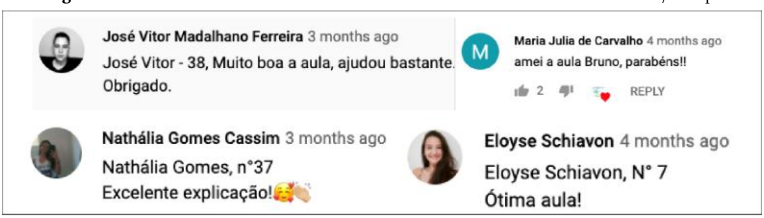
[5] CEE 195/2020 - Fixa normas para a retomada tanto das atividades presenciais quanto das por meio remoto e para a organização dos calendários escolares para o ano letivo de 2021 no Sistema de Ensino do Estado de São Paulo (CONSELHO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO, 2020).

Figura 1 – Canal YouTube do RP Matemática IBILCE/Unesp

Fonte: https://www.youtube.com/channel/UCwJkiWLs7zjPlKOgnomJumA

A produção e publicação de vídeos pelos residentes, baseada em materiais de suporte pedagógico que estavam sendo utilizados pela professora e pelos alunos do Ensino Médio, foi relevante do ponto de vista das práxis desenvolvidas pelos residentes. A interface teoria-prática é um dos pilares das ações supervisionadas de licenciandos em escolas, sendo um dos aspectos pedagógicos mais significativos da formação inicial de professores (GATTI, 2010). A criação de um canal no YouTube e a produção/publicação de vídeos sobre conteúdos do Ensino Médio foram pertinentes para os alunos das turmas desse mesmo grau de Ensino da professora preceptora e podem ser pedagogicamente úteis a outros discentes, licenciandos e professores, dado que o acesso a esse material é irrestrito. A seguir, na Figura 2, compartilhamos algumas opiniões de alunos proferidas nos comentários dos vídeos.

Figura 2 – Comentários de alunos em vídeos do canal YouTube RP Matemática IBILCE/Unesp.



Fonte: https://www.youtube.com/channel/UCwJkiWLs7zjPlKOgnomJumA.

Os residentes do edital 2018-2020 também desenvolveram práticas voltadas à produção de vídeos digitais. Na ocasião, três temáticas centrais fomentaram os objetivos pedagógicos de se trabalhar com vídeos: (1) incentivo para que alunos participassem do Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática; (2) registro audiovisual online de experiências escolares e respectivo compartilhamento online e (3) exploração de mensagens subliminares em vídeos matemáticos. Especificamente, os vídeos que exploraram tais temáticas são listados a seguir:

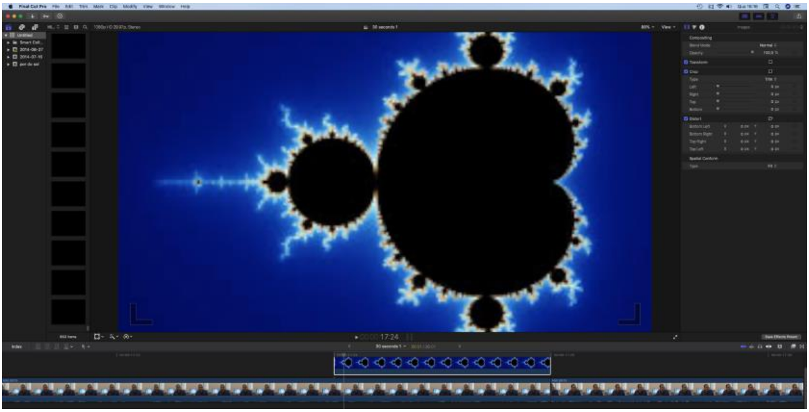
- DIVULGAÇÃO da Oficina de Vídeos de 2019, na escola E. E. "Professora Maria Galante Nora". Disponível em: https://youtu.be/pRnzDfe_igs.
- MATRIZES dos alunos do 2º ano do Ensino Médio da E. E. "Professora Maria Galante Nora". Disponível em: https://youtu.be/lZIW7a4rBKo.
- CONVITE para participação no Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática, com ênfase na produção de curtas-metragens de 30 segundos. Disponível em: https://youtu.be/dTs2j62fYKI .

A exploração de mensagens subliminares é temática recorrente em cenários de publicidade e propaganda, bem como em produções televisivas e cinematográficas. Nesse contexto, há interessante interface envolvendo semiótica e neurociência. Para McLuhan (1964), a repetição de anúncios faz com que marcas e produtos anunciados se afirmem gradativamente para o consumidor. "Os anúncios não são endereçados ao consumo consciente. São como 'pílulas subliminares' para o subconsciente, com o fito de exercer um feitiço hipnótico" (MCLUHAN, 1964, p. 257).

Consideramos que a maioria dos recursos subliminares utilizados em publicidade e propaganda perpassam pela intencionalidade de que a audiência intensifique seus desejos de consumo (SILVEIRA, 2004). Mas quais seriam nossas intencionalidades em um vídeo de Educação Matemática? No caso do vídeo "Surpreenda Matematicamente em 30s – Convite" foram inseridas imagens com duração de milésimos de segundo (o menor tempo possibilitado pelo *software Final Cut*). Essas imagens fazem referência direta e/ou indireta à conteúdos da fala do personagem. Por exemplo: ao dizer “o tema é: surpreenda matematicamente” é exibido um fractal; ao enunciar o convite ao Festival, é exibida a expressão “*challange accepted*”, que pode ser traduzido para o português como “desafio aceito”. Portanto, nessa narrativa, os recursos subliminares foram utilizados com intencionalidades que envolvem elementos (a) matemático-conceituais; (b) pedagógicos e (c) estéticos. Em particular, a dimensão estética perpassa pela intenção de fomentar na audiência aspectos como curiosidade, criatividade e surpresa (BOORSTIN, 1990). Consideramos ainda que a dimensão do “consumo” não foi descartada: como professores/produtores de narrativas multimodais, queremos que alunos, professores e outros agentes consumam nossos vídeos digitais.

Na Figura 3 exibimos uma captura de tela do projeto desse vídeo desenvolvido com o Final Cut. Essa figura destaca na *timeline* expandida – *zoom in* – a inserção da imagem de um fractal (conjunto de Maldelbrot) a ser exibida em milésimos de segundo na narrativa digital. Nesse caso, considera-se os fractais uma ideia que abre janelas para a Matemática (NOSS; HOYLES, 1996) e que se destaca enquanto objeto matemático-geométrico elementos estéticos, como simetrias e autossimilaridades. Nesse sentido, devemos celebrar o fato de que o uso de mensagens subliminares em Educação Matemática tem perpassado pelo fomento semiótico-estético-pedagógico voltado ao desejo matemático.

Figura 3 – Projeto do vídeo “Surpreenda Matematicamente em 30s – Convite” no *software Final Cut*.



Fonte: https://youtu.be/dTs2j62fYKI

De acordo com Key (1974), as principais estratégias em termos de mensagens subliminares são: inversão de figura/fundo; método de embutir imagens; duplo sentido; projeção taquicoscópica; luz de baixa intensidade; luz e som de fundo. Ao discorrer sobre a “propaganda subliminar multimídia”, Calazans (2006) destaca avanços emergentes com resultados de pesquisas nessa área, envolvendo o uso do equipamento denominado taquicoscópio. Esses estudos mostram evidências de que há uma reação do cérebro à apresentação de imagens no tempo de 1/3000 de segundo, sendo esta a definição de subliminar em termos taquicoscópicos.

> A tecnologia de projeção subliminar visual em velocidade taquicoscópica é uma forma de propaganda invisível empregada atualmente nas mídias cinema e televisão [...]. Evidencia-se, igualmente, que os conteúdos dessas mensagens podem variar desde a manipulação de empregados até a venda de refrigerantes, passando pelo uso clínico, a semelhança de sugestão pós-hipnótica (CALAZANS, 2006, p. 37).

Esse tipo de recurso subliminar também foi utilizado pelos residentes para produção de vídeos contendo conteúdos desenvolvidos por alunos sobre matrizes (ver https://youtu.be/lZIW7a4rBKo). Essa narrativa integrou uma interessante dimensão lúdica, pois as atividades desenvolvidas pelos alunos a partir das orientações da professora preceptora e dos residentes esteve baseada no uso de jogos digitais. Consideramos, portanto, que a produção audiovisual é uma atividade de destaque nas ações desenvolvidas pelos núcleos RP Matemática IBILCE/Unesp. Em particular, enfatizamos a exploração de mensagens subliminares como elemento inovador no que se refere à produção de vídeos digitais em Educação Matemática. O segundo núcleo, em especial, além de realizar atividades voltadas à produção audiovisual, tem também desenvolvido a produção musical em Educação Matemática.

Produção Musical em Educação Matemática

A produção musical é uma atividade explorada pelo atual núcleo do RP Matemática IBILCE/Unesp (2020-2022). Consideramos que essa atividade é fruto de uma pertinente convergência entre o fato da preceptora, professora Mara Pereira, e do coordenador no núcleo, professor Ricardo Scucuglia, explorarem dimensões diversas da produção musical em suas experiências pedagógicas. Os respectivos canais no YouTube desses professores oferecem indícios, por exemplo, sobre como a criação e performance musical tem estado presente nas aulas ministradas por eles.

De acordo com Abdounur (2003), a história da Matemática e a história da música se engendram. A gênese sobre como concebemos atualmente a música está associada, por exemplo, ao experimento do monocórdio desenvolvido na escola de Pitágoras no século V a.c. grande parte dos fundamentos de conceitos e teorias musicais são de natureza Matemática (tempo das notas, escalas musicais, campos harmônicos, etc.). (BROMBERG, 2019; GRANJA, 2019). Elementos estéticos como padrões e repetições são fundamentais tanto para música como para Matemática.

Nesse sentido, conceitos musicais podem ser utilizados para o ensino de conteúdos matemáticos. Como exemplos: (a) ensinar frações a partir das representações de tempos de notas (semibreve, mínima, semínima, colcheia e semicolcheia) ≅ (1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16) e (b) ensinar equações diferenciais envolvendo conceitos de acústica (movimentos vibratórios).

Além das implicações pedagógicas que a interface conceitual Matemática/música oferece ao ensino de Matemática, podemos buscar performar e/ou produzir músicas em Educação Matemática (SCUCUGLIA, 2020). E nessa perspectiva, diversos tipos de intencionalidades pedagógicas têm sido enunciados no que diz respeito ao uso de músicas em aulas de Matemática:

Engajamento. O professor que utiliza músicas Matemáticas em suas aulas pode *motivar* os alunos do ponto de vista da psicologia da educação. Além disso, buscamos fomentar o *engajamento pedagógico* dos alunos do ponto de vista do currículo. Uma aula de Matemática com música é uma aula diferenciada, inovadora, que fomenta diversos elementos estéticos e lúdicos. Consideramos importante que alunos desenvolvam atitudes e formas de pensamento sensíveis que ofereçam meios para que sejam aprimorados sentimentos de pertencimento à cenários de atividades Matemáticas.

One Track Mind. Músicas sobre Matemática podem auxiliar na memorização de conteúdos, conceitos e ideias Matemáticas. Destacamos que nossa concepção sobre ensino/aprendizagem de Matemática não se fundamenta exclusivamente na memorização via repetição. Na realidade, entendemos que a ênfase exagerada em processos de memorização/repetição limita a aprendizagem e fomenta a construção de imagem negativas da Matemática na Educação Básica. Contudo, reconhecemos que a memória ou mesmo a repetição tem um papel cognitivo importante na atividade

Matemática. O refrão que "não sai da cabeça", *One Track Mind*[6], é cognitiva e pedagogicamente útil para lembrar de uma fórmula na hora da prova, assim como para levar a Matemática dos estudantes para além dos confins das salas de aulas. As músicas Matemáticas oferecem meios para que a mesma ganhe capilaridade em contextos sociais diversos. Alunos podem começar a dialogar sobre suas ideias Matemáticas em diversificados cenários, assim como dialogam sobre suas músicas, séries e redes sociais favoritas.

Colaboração. Música é vida! Arte é vida! É coletividade, ludicidade (HUIZINGA, 2012), cooperação e, fundamentalmente, colaboração.

Criatividade. A criatividade é a busca e o oferecimento de surpresas por meio de um processo ou produto antes não conhecido (por alguém ou, genuinamente, por ninguém). É a subversão ao *status quo*. Surpreenda-me(nos)!

Em nossas ações de ensino, pesquisa e extensão universitária temos produzido músicas Matemáticas de maneiras diferenciadas. Contudo, nossa proposta conceitual de produção musical como atividade de ensino-aprendizagem Matemática pode ser estruturada em quatro principais etapas. São elas:

Etapa 1 – Investigação Matemática. Elaboramos e executamos planos de aulas visando articular conteúdos e metodologias diversas. Buscamos explorar conteúdos matemáticos curriculares e além, visando oferecer meios para que alunos explorem grandes ideias Matemáticas, ou seja, concepções que ofereçam surpresas e que conectem diferentes áreas da Matemática. Também utilizamos recursos e/ou metodologias diversas, principalmente: tecnologias digitais, resolução de problemas, jogos/lúdico, história da Matemática, Modelagem Matemática, Etnomatemática,

[6] https://youtu.be/Oq-TJV4WMwQ

dentre outros. Perspectiva como cenário de investigação, experimentação com tecnologias e heurística são elementos fundamentais nessa etapa. O tempo de duração dessa etapa varia por fatores diversos conforme a natureza/complexidade da ideia explorada, nível de rigor do conteúdo em questão, nível de ensino, número de alunos ou participantes, etc. Já desenvolvemos a etapa 1 em situações com duração de 4 a 36 horas.

Etapa 2 – Poemas Matemáticos. Tendo realizado a investigação Matemática, solicitamos aos participantes que elaborem poemas visando compartilhar o que aprenderam e o que sentiram. Os poemas têm sido produzidos individualmente ou em pequenos grupos. Eventualmente, são abordados alguns conteúdos literários sobre poesia: rimas, etc. Dicionários *online* de rimas tem nos ajudado nessa construção. Com base no que foi produzido, elaboramos um poema colaborativo, que é uma representação estética da inteligência Matemática coletiva da turma. Esse poema coletivo é considerado a base para a criação da letra da música Matemática.

Etapa 3 – Produção Musical. Temos buscado aprimorar estética e tecnologicamente nossas produções musicais. O uso de *software* e interfaces de gravação têm permitido explorar qualitativamente o processo de produção de músicas Matemáticas. Além disso, esse uso propicia a constituição de ambientes imersivos na formação de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Temos pensado-com-*software*-musical e nossas músicas têm se aprimorado do ponto de vista tecnológico (engenharia de som, acústica, etc.) e estético (disciplina rítmica, texturas, intensidade melódica/harmônica, etc.). Em Scucuglia (2020), discutimos como licenciandos em pedagogia e Matemática produziram músicas enquanto atividade regular de disciplinas sobre metodologias de ensino. Destacamos que as formas de se pensar matematicamente estão presentes nas abordagens conceituais envolvendo teoria musical (e.g., criação de instrumentos com *software*) e na elaboração das letras das músicas *per se*. A Figura 4 exibe a imagem de um projeto criado com o *software Logic Pro*.

Figura 4 – Imagem de projeto criado com o *Logic Pro* no Núcleo RP Matemática IBILCE/Unesp.

Fonte: Dados de pesquisa dos autores.

Etapa 4 - Socialização. É fundamental que nossas músicas sejam compartilhadas em redes sociais. Essa ação oferece meios para que a Matemática dos estudantes vá além dos muros das escolas. Em situações e cenários convencionais de ensino-aprendizagem de Matemática, os alunos usualmente não conversam sobre Matemática da mesma maneira que conversam sobre suas músicas ou séries favoritas em cenários sociais diversos. A publicação de músicas de estudantes em ambientes virtuais possibilita esse tipo de diálogo. Além disso, do ponto de vista narrativo, trata-se de um processo de construção de identidades como matemáticos(as) performáticos(as). A construção de narrativas fílmicas, digitais ou multimodais que são compartilhadas *online* implicam em uma demanda acerca de como os "eus" irão se apresentar aos "outros". Na realidade, perpassa sobre a intencionalidade dos autores em se colocarem como audiências e refletirem sobre que imagens pessoais serão compostas por quem visualiza. Músicas podem ser compartilhadas em plataformas como *SoundCloud* e *MySpace*. Podemos ainda criar videoclipes ou vídeo *lyrics* baseados em nossas músicas, publicá-los em canais do YouTube e compartilharmos em múltiplas redes sociais.

Produção Musical no RP – Matemática IBILCE/Unesp

No Módulo 1 do RP Matemática IBILCE/Unesp (setembro de 2020 a março de 2021), produzimos duas músicas sobre o tema volume de sólidos. Esse tema teve como fundamentação sua indicação em documentos curriculares. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), identificamos as seguintes habilidades relacionadas a esses conceitos ao longo de diversos anos da Educação Básica:

> (EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico (BRASIL, 2018, p. 279).
> (EF02MA14) Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico (BRASIL, 2018, p. 283).
> (EF03MA13) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras (BRASIL, 2018, p. 287).
> (EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações (BRASIL, 2018, p. 287).
> (EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos (BRASIL, 2018, p. 297).
> (EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas (BRASIL, 2018, p.319).

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados (BRASIL, 2018, p. 545).
> (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras (BRASIL, 2018, p. 545).

Na Etapa 1, além da exploração dos conteúdos em documentos curriculares, buscamos nos aprofundar conceitualmente. Exploramos aspectos diversos do tema sólidos de revolução: possibilidade do cálculo de volumes utilizando integrais, relação entre cilindro, cone e paraboloide de acordo com a Proposição 4 em *O Método* de Arquimedes, e possibilidade de exploração do pensamento diferencial com alunos de Ensino Médio baseado no uso do GeoGebra (DOMINGUES; SCUCUGLIA, 2019). Portanto, nossa exploração sobre volumes de sólidos articulou diferentes metodologias de ensino de Matemática (história da Matemática e uso de tecnologias). Tal abordagem ofereceu meios para que buscássemos mencionar em nossas músicas a relação entre os volumes de um cilindro, um paraboloide e um cone de mesma base e altura. Tal relação pode ser expressa da seguinte maneira: 1 ~ 1/2 ~ 1/3. Em particular, temos:

$$V = \pi \int_a^b \quad [f(x)]^2 dx$$

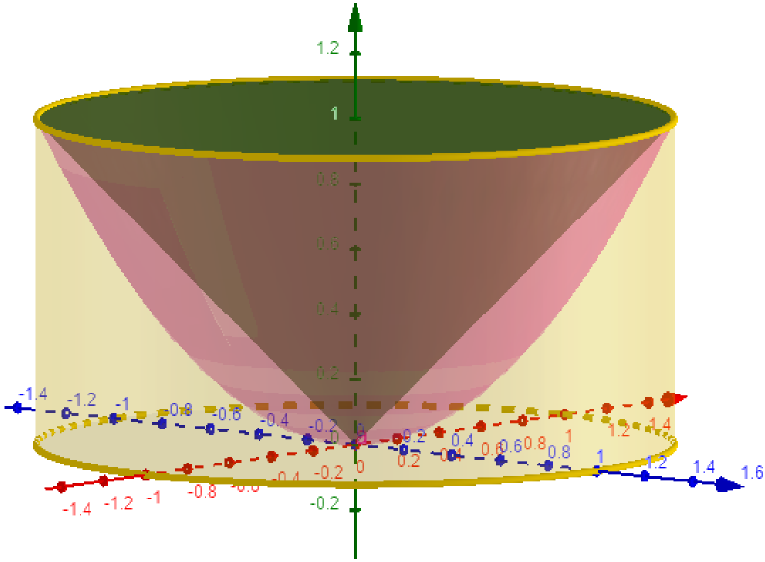
$$V_{cilindro} = \pi \int_0^1 \quad [1]^2 dx = \pi$$

$$V_{parabolóide} = \pi \int_0^1 \quad \left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi/2$$

$$V_{cone} = \pi \int_0^1 \quad [x]^2 dx = \pi/3$$

(Ver Figura 5)

Figura 5 – Relação cilindro / cone / paraboloide.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Etapa 2, os residentes produziram poemas diversos. Os poemas estão disponíveis em: https://docs.google.com/document/d/1jAnEep19DcqheNm-8BduQhoYUWcngbgwGoKOaQ2ANf8/edit?usp=sharing. Sobre a Etapa 3, optamos em destacar neste capítulo as músicas produzidas por um residente e pela professora preceptora. No Quadro 1 1, apresentamos o poema e letra da música produzida pelo residente Daniel Weber. Ele compôs a música e gravou separadamente violão e vozes. Com base nessas gravações, contando com a colaboração do baixista Daniel Scucuglia, o coordenador do núcleo editou e masterizou a música utilizando o *software Logic Pro* (rever Figura 4).

Quadro 1 – Poema e letra da música criada pelo residente.

Poema	**Música: "Volumes dos Sólidos"**
Multiplicando a área da base pela altura	*Volume dos sólidos vamos aprender*
Teremos o volume do cilindro, que loucura	*Preste atenção e você não vai, não vai mais se esquecer*
	Paraboloide, cilindro e o cone
Mas se pegar isso e dividir por dois	*Paraboloide, cilindro e o cone*
Volume do paraboloide se tem depois	
	O círculo é a base de todos
Se ao invés disso dividirmos por três	*São todos sólidos de revolução*
Teremos o volume do cone, dessa vez	*E se a altura também for igual*
	teremos uma relação tão especial
A mesma base eles têm	
Não são poliedros também	*Volume do cilindro vamos calcular*
Volumes parecidos para dessa vez	*Pi vezes raio ao quadrado, só pra começar*
A diferença e se divide por 1, 2 ou 3	*Área da base vezes a altura*
	Área da base vezes a altura
	O paraboloide é sua metade
	E o cone é sua terça parte
	Essa é a verdade
	Dos três sólidos de uma vez
	O paraboloide é sua metade
	E o cone um sobre três
	Essa é a verdade
	Dos três sólidos de uma vez
	O paraboloide é sua metade...

Fonte: Dados de pesquisa dos autores.

A música criada pela professora Mara Pereira[7] é uma paródia da música "Trânsito Parado" da dupla Bruno e Marrone. A letra teve como inspiração os diversos poemas criados pelos residentes. Em termos de produção/composição, a professora utilizou uma base de Karaokê e gravou os vocais. Com base nessas gravações, o coordenador também realizou a edição e masterização. A seguir apresentamos a letra da música composta pela professora Mara Pereira:

Música: Atenção aos volumes

[7] https://www.youtube.com/channel/UCZteRm_qc3Dw8pRXuTcR6UQ.

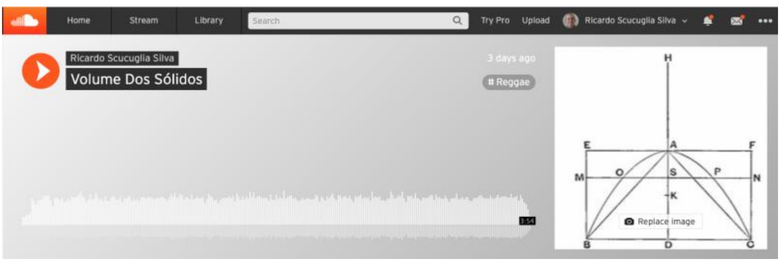
Na geometria espacial
Cilindro e cone é especial
E a paraboloide vem complementar
Todos seguem a mesma onda
De possuir base redonda
Pi raio ao quadrado a base essencial

Vamos refletindo
Atenção aos seus volumes
Área da base, vezes altura, esse é o cilindro
E a paraboloide, área da base vezes altura sobre dois
E o cone vem, na sua vez, área da base vezes altura sobre três

Refrão:
Esses são 3 sólidos
De revolução
Retângulo faz cilindro na sua rotação
Triângulo forma o cone
Parábola, paraboloide
E o círculo é a base onde tudo se formou uou uou

Por fim, em termos da Etapa 4, destacamos que a música criada por Daniel Weber e produzida pelo nosso Núcleo está disponível na Plataforma *SoundCloud*, em https://soundcloud.com/ricardo-scucuglia-r-da-silva/volume-dos-solidos (Figura 6).

Figura 6 – Socialização da música “Sólidos de Revolução” no *SoundClound*.



Fonte: https://soundcloud.com/ricardo-scucuglia-r-da-silva/volume-dos-solidos

A música criada pela professora Mara Pereira está sendo utilizada para produção de um vídeo *lyrics* (Figura 7), que será submetido ao V Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática (https://www.festivalvideomat.com/). Nesse sentido, nosso Núcleo RP está atualmente trabalhando em uma interface interessante entre produção musical e produção audiovisual em Educação Matemática.

Figura 7 – Imagens do vídeo *lyrics* da música Atenção aos Volumes.

Fonte: Dados de pesquisa.

Essas múltiplas interfaces – Tecnologias/Artes e Vídeos/Músicas – oferecem meios para reflexões pedagógicas importantes acerca da temática multimodalidade em Educação Matemática (NEVES, 2020), visto que são engendrados sons, imagens, gestos e movimentos, dentre diversos outros modos de comunicação na constituição de narrativas Matemáticas. Discutiremos essas questões em oportunidades futuras.

Conclusões

As atividades desenvolvidas no âmbito do RP assumem genuinamente um caráter ou dimensão do ensino, com ênfase em processos formativos voltados à formação inicial de professores. Além disso, dada a natureza imersiva em ambientes escolares, florescem também algumas características extensionistas (UNESP, 2017). No caso do nosso núcleo, temos refletido sobre essas ações de maneira metodologicamente rigorosa, com objetivos investigativos. Com isso, nossas atitudes no RP têm assumido certa dimensão envolvendo ensino-pesquisa-extensão.

Há também reflexões dos residentes com relação à Educação Inclusiva (MANTOAN, 2003). Atualmente, devido à pandemia, muitos alunos assistem aulas em plataformas digitais para complementar seus estudos. Identificamos que os vídeos produzidos pelo nosso núcleo RP não possuem a linguagem de sinais (intérprete de libras). Nesse sentido, consideramos que há necessidade de buscamos implementar tais recursos em futuras gravações, de modo a fomentar aspectos inclusivos. Apesar de alguns avanços no que diz respeito a democratização do ensino, ainda há um longo caminho a ser percorrido no que se refere à inclusão. Sabemos que em tempos de pandemia mudanças tem ocorrido de maneira repentina. No entanto, as desigualdades sociais e econômicas no Brasil foram ainda mais explicitadas durante a pandemia, incluindo necessidade de alunos à conteúdos em libras, braile entre outros. Os residentes levantam nesse sentido os questionamentos: Como aprimorar aspectos inclusivos no ensino *online*, em particular na produção de vídeos digitais de Matemática? Como desenvolver a linguagem Matemática na Língua Brasileira de Sinais? Buscaremos aprimorar nossas ações no RP no que diz respeito à alguns elementos da educação inclusiva. Temos como objetivo para o Residência Pedagógica a inserção dessas ferramentas em nossos vídeos do YouTube, além de futuramente produzir mais conteúdo inclusivo.

A relação com o estágio supervisionado é fundamental no contexto do RP. Temos buscado aprimorar aspectos das atividades da disciplina com base nas experiências do RP. O regulamento de estágio do curso de

Licenciatura em Matemática do IBILCE/Unesp publicado em 2021, agora prevê esse engendramento. Contudo, buscaremos formas mais intensas de aprimoramento pedagógico de tal formação tendo como fundamentação aspectos diversos da reflexão sobre a prática docente (TARDIF, 2011).

Agradecimentos

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo financiamento ao Programa Residência Pedagógica.

Referências

ABDOUNUR, O. J. *Matemática e música:* o pensamento analógico na construção de significados. 3. Ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

BOORSTIN, J. *The Hollywood Eye:* What makes movies work. New York: Cornelia & Michael Bessie Books, 1990.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática:* sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf. Acesso em: 10 set. 2018.

BROMBERG, C. A música teórica e prática [Na Lenda de Pitágoras] no ensino da Matemática: diferentes abordagens. *In*: SCUCUGLIA, R. *Artes em Educação Matemática*. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2019.

CALAZANS. F. *Propaganda subliminar multimídia*. São Paulo: Summus Editorial, 2006.

CONSELHO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO. Conselho Estadual de Educação. CEE nº 195/2020, 13 de janeiro de 2020. *Diário Oficial Poder Executivo.* São Paulo, ano 2020, n. seção I, p. 25, 14 jan. 2020.

DOMINGUES, N. S. *O papel do vídeo nas aulas multimodais de Matemática aplicada:* uma análise do ponto de vista dos acadêmicos. (2014). 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". UNESP, Rio Claro, 2014.

DOMINGUES, N. S. *Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática:* uma complexa rede de Sistemas Seres-Humanos-Com-Mídias. 2020. 279 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2020.

DOMINGUES, A. R.; SCUCUGLIA, R. R. S. Investigação do Pensamento Diferencial Emergente em Estudantes do Ensino Médio. *In: Anais do V Congresso Brasileiro de Ensino e Processos Formativos*. São José do Rio Preto: UNESP/IBILCE, 2020. v. 1. p. 1-12.

FONTES, B. C. *Vídeo, comunicação e Educação Matemática:* um olhar para a produção dos licenciandos em Matemática da educação a distância. 2019. 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019.

FREITAS, M.; FREITAS, B.; ALMEIDA, D. Residência pedagógica e sua contribuição na formação docente. *Ensino em Perspectivas,* v. 1, n. 2, p. 1-12, 1 jul. 2020.

GATTI, B. Formação de professores no Brasil: características e problemas. *Educação & Sociedade*, v. 31, n. 113, 2010

GRANJA, C. E. S. C. Música e Matemática na Sala de Aula. *In:* SCUCUGLIA, R. *Artes em Educação Matemática.* Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2019.

HUIZINGA, J. *Homo ludens:* o jogo como elemento da cultura. 7.ª ed. São Paulo: Perspectiva, 2012.

KEY, W. B. *Subliminal Seduction.* New York: New American Library, 1974.

MANTOAN, M.T. E. *Inclusão Escolar:* o que é? por quê? como fazer? São Paulo: Moderna, 2003.

MCLUHAN, M. *Understanding media:* the extensions of man. USA: Mentor book, 1964.

MENDONÇA, S. G. de L.; FERNANDES, M. J.da S.; TORRES, J. C.; MORELATTI, M. R. M. (Org.) . *PIBID/UNESP forma(a)ação de professores:* percursos e práticas pedagógicas em ciências exatas e da natureza. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2018. v. 1. 318p.

NEVES, L. X. *Intersemioses em vídeos produzidos por licenciandos em Matemática da UAB.* 2020. 304 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2020.

NOSS, R.; HOYLES, C. *Windows on Mathematical Meanings:* learning culture and computers. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

OECHSLER, V. *Comunicação multimodal:* produção de vídeos em aulas de Matemática, 2018. 311f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

SEDUC. Governo do Estado de São Paulo. *Aprender Sempre.* São Paulo, 2020.

SCUCUGLIA. R. R. S. On music production in mathematics teacher education as an aesthetic experience. *ZDM - Mathematics Education*, v. 52, n. 5, p. 973-987, 2020.

SCUCUGLIA, R. R. S.; BASSO, M. R.; RODRIGUES, H. M.; SANTOS, L. O. Sobre a produção de vídeos digitais no Programa Residência Pedagógica - Matemática IBILCE/UNESP. *In: Anais do IV CBEPF - Congresso Brasileiro de Ensino e Processos Formativos*. São José do Rio Preto: UNESP/IBILCE, 2019. p. 1-1.

SILVA, K. A. C. P. DA; CRUZ, S. P. A residência pedagógica na formação de professores: história, hegemonia e resistências. *Momento. Diálogos Em Educação*, v. 27, n. 2, p. 227-247, 2018.

SILVEIRA, R. A. da. *Práticas mercantis no direito do consumidor*. 1ª ed. 2ª tir. Curitiba: Juruá, 2004.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional.* 12. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

UNESP, Sistema eletrônico da Extensão Universitária da UNESP. *Portaria Unesp-362: Dispõe sobre criação, diretrizes e normas do Programa de Iniciação à Extensão Universitária da Unesp.* São Paulo, SP: 2017. Acesso em: https://www2.unesp.br/Home/proex/projetosdeextensao/portaria-unesp-362---iniciacao-a-extensao.pdf

Capítulo 8

O Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática: um Olhar para as Experiências Estéticas

Marcelo de Carvalho Borba
Nilton Silveira Domingues
Rosicácia Florêncio Costa

1 Vídeos em Educação Matemática e a Origem do Festival

Os vídeos digitais são utilizados na sociedade para comunicar ideias, em especial, pelos jovens (OECHSLER; FONTES; BORBA, 2017). Pesquisas (*e.g.* DOMINGUES, 2020; ENGELBRECH; LLINARES; BORBA, 2020; ZAMPIERI; DOMINGUES; BORBA, 2020) indicam que a maioria deles possui facilidade para usar e produzir tais vídeos digitais, seja para apresentar uma dança, para contar uma piada, seja para buscar por tutoriais, para assistir a um *gameplay*[1] e a um *time-lapse*[2], para aprender e ensinar conteúdos, receitas, entre outros.

Essa facilidade e o "gosto" por assistir e por produzir diversos tipos de vídeo podem estar relacionados à arte e às experiências estéticas por eles proporcionados. Isso porque, para Dewey (2010), a arte tem o poder de reorganizar a consciência, de tornar a visão autônoma e o conhecimento democrático e libertador quando qualquer pessoa aprende e ressignifica, por meio da sua própria experiência, o saber estético.

---

[1] O termo gameplay é compreendido como a experiência de um jogador que interage com o jogo, de modo a mostrar sua jogabilidade para que outros usuários possam saber como funciona aquele determinado jogo, além de aprender dicas.

[2] Fotografia Time-lapse ou Câmera-Rápida é um processo cinematográfico em que a frequência de cada fotograma ou quadro por segundo de filme é muito menor do que aquela em que o filme será reproduzido. Quando visto a uma velocidade normal, o tempo parece correr mais depressa e assim parece saltar (WIKIPEDIA, 2021). Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Time-lapse. Acesso em: 15/05/2021.

Existem muitas definições do que é estética, por exemplo, a definição[3] encontrada na editora estadunidense "Merriam-Webster", relaciona estética ao "belo", ao artístico, ao atrativo e agradável. Segundo este dicionário, estética consiste em um ramo da filosofia sobre o estudo da natureza do belo. Se olharmos para o dicionário de filosofia Abbagnano (2000, p. 367) "o termo estética é designado a ciência (filosófica) da arte e do belo". Neste mesmo dicionário, Abbagnano (2000, p. 82), o significado e origem do termo arte é discutido, de modo a compreendermos como "intermediária entre a experiência e a ciência". Sendo assim, Abbagnano (2000,82) discute a junção da estética e das artes, como aprazível ou bela, "aprazível quando sua finalidade é fazer que o prazer acompanhe as representações enquanto simples sensações; é bela quando o seu fim é conjugar o prazer às representações como formas de conhecimento".

Consideramos, neste capítulo, que as experiências estéticas são relacionadas ao belo e podem não estar necessariamente relacionadas às artes, embora estas sejam um terreno fértil para o desenvolvimento de experiências estéticas. Não queremos adotar uma concepção única, mas queremos sim neste capítulo apresentar um lócus virtual onde a estética está presente com destaque. Nesse sentido, quando se trabalha com vídeos em Educação Matemática podemos abordar a questão de produção de vídeo com adaptações do cinema, tal qual as Performances Matemáticas Digitais (PMD[4]), que mesclam estética em arte, em matemática e em vídeos curtos. Desta forma, as linguagens nos vídeos podem compreender experiências estéticas, podem ser artísticas do ponto de vista teatral, do ponto de vista da simbologia e das simetrias.

[3] Disponível em: https://www.merriam-webster.com/dictionary/aesthetic. Acesso em: 15/05/2021.

[4] O termo PMD significa Performances Matemáticas Digitais e consiste em narrativas digitais para comunicar ideias matemáticas por meio das artes.

Neste capítulo, apresenta-se uma iniciativa em Educação Matemática que consiste no “Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática”. Este Festival, de caráter anual e nacional, constitui-se em um evento científico na área, no qual professores e alunos produzem vídeos e submetem para a apreciação dos organizadores. Após uma triagem, os vídeos são colocados em um site para serem votados por toda a comunidade e alguns vídeos são selecionados como finalistas para uma segunda avaliação, composta por jurados externos. Esse júri é interdisciplinar sempre sendo composto por artistas, professores de matemática dentre outros profissionais. Para dar destaque aos finalistas e as produções, realiza-se um evento científico, em que se discute sobre a temática de vídeos e educação, além de desenvolver uma cerimônia de premiação como fechamento do evento. Os vencedores ganham medalhas e camisetas como prêmio, ressalta-se que não existe uma ordem de classificação entre os premiados, de modo que a cada edição especifica-se o número de vencedores por categoria.

O objetivo deste capítulo, consiste em apresentar o Festival supracitado, enfatizando e discutindo as experiências estéticas por ele proporcionadas, tanto no quesito evento científico, quanto nos vídeos produzidos pelos alunos e jurados. Tais experiências se fizeram presentes nas representações, linguagens e produtos gerados a partir dos Festivais. Decidiu-se aqui, apresentar essas diferentes experiências estéticas por meio de episódios, ao longo do texto.

O crescente uso e produção da mídia vídeo, bem como a destreza com que alguns jovens lidam com elas, fez com que surgisse no Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) o interesse em pesquisar vídeos digitais com conteúdo matemático, produzidos por alunos, professores e pela comunidade em geral, buscando entender, dentre outras questões, o modo como eles comunicam ideias matemáticas por meio dessa tecnologia digital.

Para esse grupo de pesquisa, do qual os autores deste capítulo fazem parte, os vídeos digitais podem ser entendidos como uma mídia multimodal, multimodalidade essa que advém da possibilidade de representar determinadas ideias matemáticas de múltiplas formas, por exemplo, por meio da oralidade, da escrita, dos gestos, das expressões corporais, de *hiperlinks*, de sons, de palestras sobre uma dada temática, de *web* conferências, dentre outros elementos presentes na comunicação de ideias matemáticas dentro e fora de sala de aula (DOMINGUES, 2020).

Assim, um vídeo pode abordar ou permitir discutir diversos aspectos da Educação Matemática, tais como conceitos, definições e ideias matemáticas, arte e movimento, música, linguagem oral, escrita e corporal, estudos da sociedade e da natureza, diversidade, expressão de sentimentos por meio de música, humor como meio para desenvolver um olhar crítico, entre outros, os quais vêm sendo apresentados em diversas pesquisas, principalmente nas desenvolvidas pelo GPIMEM.

O primeiro contato desse grupo de pesquisa com o tema aconteceu em 2006, por meio de um projeto em parceria com o Canadá, financiado pela agência de fomento canadense *Social Sciences and Humanities Research Council* (SSHRC) e intitulado “*Digital Mathematical Performance*”. Em 2008, o referido projeto tomou outras dimensões, estendendo-se para:

> [...] o projeto “Students as Performance Mathematicians”, também financiado pelo SSHRC, com a parceria internacional de cinco integrantes, a saber, George Gadanidis, da University Western Ontario (UWO); Marcelo C. Borba (UNESP); Susan Gerofsky, da University of British Columbia (UBC); Cornelia Hoogland (UWO) e Janette Hughes, da University of Ontario Institute of Technology (UOIT), além de três assistentes: Ricardo Scucuglia (UNESP), Sarah Tolley (UOIT) e Natasha Wiebe (UWO) (DOMINGUES, 2020, p. 17).

Os projetos visavam retratar a Educação Matemática por meio de lentes performáticas e artísticas, com a finalidade de modificar a imagem pública da Matemática. Seus resultados e o surgimento de novos questionamentos despertaram o interesse pela criação e desenvolvimento de um Festival de vídeos, a ser realizado no Brasil.

Nesse ínterim, Domingues e Borba (2010) foram desenvolvendo pesquisas no âmbito da Iniciação Científica, com vídeos cujas perspectivas eram distintas das PMD. Tais investigações, juntamente com as parcerias estabelecidas com o Canadá, levaram o GPIMEM a iniciar, em 2016, o projeto "Vídeos Digitais na Licenciatura em Matemática a Distância", batizado de E-licm@t-Tube[5].

Com a intenção de promover a produção de vídeos com conteúdo matemático, desenvolvidos de forma coletiva por professores, alunos, mídias e comunidade em diversas regiões do país surge o evento científico "Festivais de Vídeos Digitais e Educação Matemática", como sendo uma ramificação do projeto supracitado. Esse evento conta com o importante apoio da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Entre seus objetivos estão: compartilhar e socializar conhecimentos e experiências matemáticas com toda a comunidade, por meio da produção de vídeos por alunos e professores de todas as modalidades de ensino, de modo que tais produções saiam dos ambientes escolares e das universidades e ganhem ampla circulação.

Sua primeira edição ocorreu em 2017, tendo repercutido de maneira positiva nas escolas e nas universidades, com a participação de vários

[5] Aprovado no Edital Produtividade em Pesquisa do CNPq (Processo nº 303326/2015- 8) e no Edital Universal 2016 do CNPq (Processo: 400590/2016-6). O objetivo do projeto E-licm@t-Tube foi compreender as possibilidades da produção colaborativa de vídeos entre professores, estudantes, tutores e coordenadores, no âmbito do Ensino Superior, em cursos de Licenciatura em Matemática presenciais e EaD (UAB), bem como na Educação Básica (DOMINGUES, 2020).

estados brasileiros. A partir da terceira edição, o evento passou a ter apoio de outras instituições de ensino para sua organização, saindo da cidade de Rio Claro – SP e sendo sediado em localidades fora do estado de São Paulo.

A cada ano que passa, o Festival atinge mais municípios, com vídeos idealizados por alunos e professores da Educação Básica e do Ensino Superior, bem como por toda a comunidade, abrindo espaço para sua produção em âmbito nacional. Na Figura 01, podem ser observados tanto os estados brasileiros que já participaram das quatro primeiras edições do Festival quanto os que sediaram seu evento científico.

Figura 01 – Estados que já participaram das edições do Festival

Fonte: Elaborada pelos autores.

O primeiro Festival contava com apenas duas categorias de participação previstas em Edital: Educação Básica (Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio) e Ensino Superior (licenciandos em Matemática, nas modalidades presencial ou *on-line*). Porém, tendo em vista o recebimento de diversos vídeos que não se encaixavam nessas categorias, após reflexões sobre essa primeira experiência, bem como a partir de contribuições e sugestões dos participantes, os organizadores do Festival reorganizaram-nas e estruturaram-nas. Sendo assim, para a segunda edição, as categorias foram ampliadas para Ensino Fundamental Anos Finais; Ensino Médio; Ensino Superior e Outros. Na terceira edição, permaneceram as mesmas do II Festival.

A quarta edição, por sua vez, apresentou uma nova categoria, destinada aos professores e, em função disso, intitulada "Professores em Ação", cujo intuito foi promover o uso dos vídeos já submetidos nos Festivais anteriores. Já na quinta edição, que ocorrerá em 2021, a categoria "Outros", já existente, receberá o nome de "Comunidade em Geral" para uma melhor representação de todos aqueles que queiram participar, como, por exemplo, alunos do Ensino Fundamental Anos Iniciais, alunos de outros cursos de Graduação, alunos de Pós-Graduação (mestrandos e doutorandos), youtubers, marceneiros, serralheiros, boleiras, chefs de cozinha, dentre outros.

Com o apoio da SBEM, o Festival tem se tornado um importante evento cultural e social dentro da área da Educação Matemática, recebendo, nas últimas edições, uma média de 200 a 300 produções, as quais são amplamente divulgadas no júri popular (*on-line*), além de as finalistas serem selecionadas e exibidas tanto durante a semana do evento de encerramento quanto na cerimônia de premiação.

Isso porque o Festival ocorre primeiramente *on-line* pelo *site*[6] e, posteriormente, é encerrado com um evento presencial, o qual conta com mesas redondas, palestras, oficinas e cerimônia de premiação. A participação em todas as etapas/atividades é gratuita, e, ao final, os participantes recebem os prêmios. Os festivais têm sido apoiados pelo CNPq, Editora Autêntica e Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

[6] Disponível em: https://www.festivalvideomat.com/. Acesso em: 15/05/2021. O site é um ambiente virtual de compartilhamento de vídeos com conteúdo matemático. Este site é atualizado a cada Festival, contendo todas as informações e vídeos de cada edição, sem perder o endereço eletrônico original.

O evento presencial, que, devido à pandemia[7], ocorreu de forma virtual na edição de 2020, tem como objetivo oportunizar aos participantes que apresentem suas produções, que discutam questões a respeito dos modos como essa mídia transforma a sala de aula, bem como debater a produção de conhecimento matemático expressa nos vídeos. Nesse sentido, ele acaba por propiciar um encontro de professores que já têm a prática de se valer de vídeos em seus cenários isolados, dando destaque e credibilidade a estes profissionais em seus trabalhos (DOMINGUES, 2020).

A submissão dos vídeos pode ser realizada por grupos de alunos (tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior à distância ou presencial) ou por qualquer pessoa que tenha interesse em participar do Festival, com a possibilidade de colaboração de professores, tutores, amigos e familiares.

Embora a cerimônia de premiação ocorra somente no segundo semestre, a organização do evento tem início geralmente em fevereiro, com a escrita do regulamento, com a seleção da instituição parceira e da comissão organizadora, com a abertura das inscrições, com os convites para participação, entre outras atividades. Nesse período, em algumas edições, foram ofertados cursos de extensão para professores, com vagas limitadas, cuja intenção era possibilitar o uso/produção de vídeos digitais, em diálogo com algumas das tendências em Educação Matemática. No *site*, também são disponibilizados materiais, buscando oferecer referências básicas da linguagem audiovisual e noções técnicas da utilização de *software* de captação e de edição de imagens. O festival tem, portanto, além do lado de exposição e disputa, um lado pedagógico e colaborativo.

[7] Denominada COVID-19, a doença infectou e levou à morte milhões de pessoas no mundo todo. Trata-se de uma infecção virótica, surgida no final de 2019, que se alastrou a partir de uma cidade da China e alcançou proporções gigantescas em todos os países, ultrapassando barreiras numa velocidade recorde. Para contê-la, uma das medidas de prevenção adotada foi o distanciamento social.

A sessão final do Festival é marcada pela realização de palestras, de salas de discussões que abordam tanto temas relacionados ao uso das tecnologias digitais para a Educação Matemática quanto questões artísticas e mostras culturais, além de proporcionar momentos de diálogo sobre as políticas públicas voltadas a esse cenário. Sendo assim, ele pode possibilitar um caminho inovador e crítico para produção do conhecimento matemático, sobretudo para a construção de uma imagem mais humana desse campo do saber.

As ações desenvolvidas nele podem ser vistas em sintonia com o quarto e o décimo Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) do Milênio, que visam a promover qualidade e equidade na Educação, já que permitem aos participantes adquirirem conhecimentos e habilidades necessárias para favorecer o desenvolvimento sustentável. Ou seja, de acordo com os ODS, serão necessários atitudes, empenho e determinação para fornecer oportunidades vida para as crianças e adolescentes. Consideramos que a Matemática tem que fazer sentido para os alunos, e conjecturamos que os vídeos produzidos para o Festival dão "vozes" aos alunos, contextualizam a Matemática. Entendemos que a produção de vídeos pode mudar a forma de pensar e agir dos alunos, no sentido de desenvolver conhecimentos, habilidades, valores e atitudes que permitirão sua contribuição para o desenvolvimento social, cultural e sustentável, permitindo com que ocorra protagonismo dos jovens.

Nesse sentido, as experiências estéticas dos Festivais foram sendo aprimoradas pelos participantes e por seus organizadores a cada nova edição. A estética também pode ser interpretada, segundo Dewey (2010), como uma característica da experiência humana, compreendida como uma relação contínua e intensa entre o sujeito e o mundo. Desse modo, em cada edição, foram feitos questionamentos que provocaram inquietações, as quais, por conseguinte, levaram-nos a refletir sobre o real, entendendo, de maneira dialética, a relação do Festival com a sociedade e com a Educação Matemática.

Essas experiências estéticas podem ser observadas até mesmo nas chamadas de apresentação e nos convites para participação nas diversas edições do evento, como é o caso, por exemplo, de uma chamada para o I Festival, realizada por um de seus jurados, o renomado cartunista, artista plástico, caricaturista e pesquisador Camilo Riani, no qual se fundia humor, caricatura e arte em um vídeo matemático sobre o coordenador do Festival. Na Figura 02, apresenta-se uma cena da referida chamada.

Figura 02 – Cena do vídeo "A arte de Camilo Riani"

Fonte: Canal do GPIMEM[8] no *YouTube*.

Nesta chamada representada na figura 2 o artista desenvolveu experiências estéticas relacionadas às simetrias e proporções de uma representação do corpo humano por meio da caricatura.

Nesta introdução apresentou-se o objetivo do capítulo, a compreensão sobre estética e arte dos autores, além de discutir o surgimento e a dinâmica dos Festivais de Vídeos Digitais e Educação Matemática. A seguir,

[8] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=uCXKQEclRQg. Acesso em: 15/05/2021.

apresenta-se detalhes sobre as quatro primeiras edições desses Festivais. E após essa apresentação, desenvolve-se episódios que compreendem experiências estéticas proporcionadas pelos Festivais, discutindo ideias relacionadas ao humor, à estética, à imagem pública da Matemática e à relação estabelecida entre esses três temas. Ao final, discutiremos como essa mescla entre arte, Matemática e Educação se fundem em experiências inspiradas nas transformações vividas pela arte, e como podemos pensar em formas de expressões artísticas oriundas de Festivais de vídeos em Educação Matemática.

2 A Trajetória dos Festivais e os Vídeos Produzidos

O Festival tem ocorrido ininterruptamente desde a sua primeira edição, em 2017, recebendo, a cada ano, mais trabalhos de escolas e universidades e, com isso, atraindo alunos, professores e a comunidade de diferentes estados do país. Todo ano, a comissão organizadora, reorganiza o evento, a partir das expectativas e opiniões dos seus participantes.

Assim, as experiências estéticas de cada evento dos Festivais são ancoradas nos próprios vídeos, nas atividades culturais dos eventos, bem como na forma criativa e crítica com que cada participante compreende a integração da construção do conhecimento matemático com a prática social. De acordo com Dewey (2010), os encontros das interações implicam o movimento de todo o organismo envolvido no acontecimento da experiência estética e este percurso é o “acontecer da criação”. Optamos por detalhar cada evento, de modo a evidenciar a quantidade e diversidade de vídeos e participantes em cada versão, além de discutir suas principais mudanças.

O I Festival contou com 121 vídeos submetidos, conforme apresentado no Quadro 01[9].

Quadro 01 – Dados do I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática

Vídeos/categorias	Educação Básica	Ensino Superior	Vídeos (fora do edital)	Total
Submetidos	79	31	11	121
Aceitos	77	28	-	105
Finalistas	20	18	-	38
Desclassificados	2	3	-	5
Qtde. de professores	30	18	3	48
Qtde. de alunos	316	121	63	500
Total de participantes	346	139	66	548

Fonte: Controle de Inscrição de Vídeos do I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática.

No quadro acima, vê-se que a categoria Educação Básica teve uma participação expressiva, pois somava os alunos do Ensino Fundamental Anos Finais com os alunos do Ensino Médio.

No que se refere à avaliação dos vídeos submetidos, ela consiste em uma revisão por pares, por meio de sua observação repetitiva, precedida de anotações acerca de inconsistências matemáticas e dos recursos utilizados pelos estudantes para transmitir a mensagem mediante a produção de significados. A avaliação é pautada em três critérios: 1) Natureza da ideia matemática; 2) Criatividade e Imaginação; 3) Qualidade artístico-tecnológica.

Os vídeos que contemplam todas as normas do Edital e não apresentam inconsistências matemáticas graves, após a primeira triagem, são disponibilizados no *site* do evento. Na sequência, eles são analisados pela equipe organizadora e pelos jurados para a escolha dos finalistas de cada categoria.

A equipe de jurados é composta por cineastas, artistas, filósofos, historiadores, matemáticos e educadores matemáticos, de modo a se ter

[9] Dados revisados pela equipe E-Licm@t-Tube. Alguns professores estão associados a vídeos submetidos para mais de uma categoria. Ressalta-se que estes dados de número de participantes consistem apenas no que diz respeito aos participantes que submeteram vídeos, uma vez que não contabilizamos o total de participantes no evento presencial.

diferentes olhares sobre um mesmo vídeo, ou seja, as mídias são analisadas por matemáticos, artistas de diversos segmentos, professores universitários, professores da Educação Básica e pesquisadores em Educação Matemática e em outras áreas. A composição dos jurados pode ser acessada no site do Festival.

Após essa etapa de avaliação, os vídeos são colocados no canal do *YouTube* dos organizadores e é gerada e incorporada uma *Playlis*t ao *site*. Os envolvidos podem, então, compartilhar seus vídeos para serem "curtidos" nessa plataforma, de modo que o mais votado de cada categoria prevista no Edital é premiado no quesito Júri Popular. Esta categoria de premiação tem mobilizado muitas escolas, famílias e alunos, ademais de movimentar as redes sociais. A título de exemplo, em 2020, o vídeo vencedor na categoria Ensino Fundamental Anos Finais pelo voto popular teve aproximadamente 800 curtidas.

O I Festival contou com nove jurados, responsáveis pelas duas categorias Educação Básica e Ensino Superior, foram eles: Dr. Donizetti Fermino Louro; Hélio de La Peña; Dr. João Frederico Meyer; Dr. Maurício Lissobsky; Dra. Tânia Araújo Jorge; Dr. Camilo Riani; Dr. Henrique Lazari; João Paulo Miranda; e Dr. Leo Akio Yokoyama.

O I Festival contou com a participação de quatorze estados brasileiros e do Distrito Federal, e a cerimônia de premiação foi realizada na cidade de Rio Claro – SP, de forma presencial, na Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), sob a responsabilidade do coordenador de todas as edições, Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, e de seu organizador, Prof. Dr. Nilton Silveira Domingues. Devido ao seu sucesso, o Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática foi inserido no calendário de eventos anuais de Educação Matemática.

A segunda edição foi realizada em 2018, e o evento presencial ocorreu nos dias 21 e 22 de setembro, novamente na UNESP, em Rio Claro – SP, sob a responsabilidade do seu coordenador, e de sua organizadora, Profa. Ms. Bárbara C. Fontes. Como já foi ressaltado, novas categorias foram criadas, de modo que, a partir de então, as mídias participantes pudessem concorrer em quatro categorias: Ensino Fundamental Anos Finais, Ensino Médio, Licenciatura em Matemática e Outros, conforme explicitado em Zampieri, Domingues e Borba (2020). Dados como o número de vídeos submetidos, as quantidades de participantes, dentre outros, são apresentadas no Quadro 02.

Quadro 02 – Dados do II Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática

Vídeos/categorias	E. Fundamental Anos Finais	E. Médio	E. Superior	Outros	Total
Submetidos	38	38	41	13	130
Aceitos	36	29	37	11	113
Finalistas	6	6	7	6	25
Desclassificados	2	9	4	2	17
Qtde. de professores	21	19	15	8	63
Qtde. de alunos	146	140	144	23	453
Total de participantes	167	159	159	32	516

Fonte: Controle de Inscrição de Vídeos do II Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática.

A segunda edição do Festival recebeu 130 submissões, das quais 113 foram aceitas, oriundas de dezessete estados brasileiros. Nesta edição, os jurados foram divididos em dois grupos, ficando o Grupo I encarregado das avaliações relativas às categorias Ensino Superior e Ensino Médio, e o Grupo II das categorias Ensino Fundamental Anos Finais e Outros. Os jurados responsáveis por esse II Festival foram: Dr. Camilo Riani; Dr. Henrique Lazari; Dra. Claúdia Seneme de Canto; Dr. Carlos Alberto Francisco; Dra. Júlia Schaetzle Wrobel; Marcel Gonçalves; e Dr. Josias Pereira da Silva.

A terceira edição do Festival foi sediada, pela primeira vez, fora da UNESP Rio Claro - SP, firmando-se no rol de eventos nacionais com o apoio da SBEM e contou com a participação de 16 estados brasileiros e do Distrito Federal. Assim, as atividades presenciais foram realizadas na cidade de Vitória – ES, nos dias 05 e 06 de setembro de 2019, tendo sido organizadas pela Universidade Federal do Espírito Santo, sob a responsabilidade do coordenador, Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, e da organizadora, Profa. Dra. Julia Wrobel. Cabe ressaltar que ela foi um sucesso, pois, nesta terceira edição, algumas das categorias atingiram o limite máximo de submissões, antes mesmo de expirar o prazo limite. O Quadro 03[10] sistematiza os dados do III Festival.

Quadro 03 – Dados do III Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática

Vídeos/categorias	E. Fundamental Anos Finais	E. Médio	E. Superior	Outros	Total
Submetidos	43	47	39	29	158
Aceitos	40	44	38	26	148
Finalistas	7	6	6	6	25
Desclassificados	3	3	1	3	10
Qtde. de professores	23	22	17	15	77
Qtde. de alunos	243	230	118	170	761
Total de participantes	266	252	135	185	838

Fonte: Controle de Inscrição de Vídeos do III Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática.

Destaca-se o crescente número de participantes neste III Festival. Nele, os jurados foram divididos em dois grupos, sendo o Grupo I responsável pela avaliação das categorias Ensino Fundamental Anos Finais e Outros e o Grupo II pela avaliação das categorias Ensino Médio e Ensino Superior. Os jurados responsáveis pelo III Festival foram: Alvarito Mendes Filho; Ms. Clarissa Lopes Trojack; Melissa Fazio Antunes; Núbia Quenupe Campos; Dr. Cleber Haubrichs dos Santos; Ms. Lenise Júlia Fassini da Silva; Mouhamed Harfouch; e Dr. Nilton Silveira Domingues.

Para o IV Festival, a coordenação do evento decidiu fazer uma parceria com uma nova instituição sede, de modo a rotacionar o evento, realizando-

[10] Observações: dados tabulados pela equipe E-Licm@t-Tube. O total de participantes foi de 838 pessoas; os nomes dos professores que inscreveram mais de um vídeo foram contabilizados uma única vez; em especial, uma turma com 23 alunos que produziu 2 vídeos também foi unificada.

o, desta vez, em Pelotas – RS, no ano de 2020, por meio de uma parceria com a Universidade Federal de Pelotas (UFPel), sob a responsabilidade de seu coordenador, e de seus organizadores, Prof. Dr. André Luis Andrejew Ferreira e Profa. Ms. Geciara da Silva Carvalho. A novidade dessa edição foi a criação de uma nova categoria para submissão de vídeos, intitulada "Professores em ação". Nela, professores de todas as modalidades de ensino podem produzir vídeos, usando as publicações submetidas em Festivais anteriores, indicando como foi feito o uso do mesmo em sua prática. Nesta edição tivemos a participação de dezessete estados brasileiros.

Como já mencionado, devido à pandemia causada pelo novo coronavírus, não foi possível manter o evento no formato presencial, porém, sua programação foi realizada nos dias 27 e 28 de agosto de 2020, de forma virtual. Obteve-se mais de 3200 visualizações nos vídeos da transmissão e aproximadamente 350 pessoas acompanharam a cerimônia de premiação de forma síncrona. O Quadro 04[11] sistematiza os dados do IV Festival.

Quadro 04 – Dados do IV Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática

Vídeos/categorias	E. Fundamental Anos Finais	E. Médio	E. Superior	Outros	Professores	Total
Submetidos	35	31	33	20	8	127
Aceitos/classificados	26	15	27	12	5	85
Finalistas	6	6	6	6	5	29
Desclassificados	8	11	0	8	7	34
Qtde. de professores	29	23	21	13	9	95
Qtde. de alunos	100	125	98	31	0	354
Total de participantes	129	128	119	44	9	429

Fonte: Controle de Inscrição de Vídeos do IV Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática.

Para o IV Festival, a equipe de jurados foi novamente dividida em dois grupos, foram eles: Dra. Clarice Lage Gualberto; Dra. Maristani Polidori

[11] Observações: dados tabulados pela doutoranda Geciara da Silva Carvalho. Os professores participantes estão sendo compreendidos como: professores da disciplina, professores articuladores de área, coordenadores pedagógicos, diretores, etc. Além disso, cada professor só foi contado uma única vez, ainda que tenha enviado mais de um vídeo.

Zamperetti; Ms. Rafael dos Reis Paulo; Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva; Dr. Camilo Riani; Dra. Liliane Xavier Neves; Dra. Olenêva Sanches Sousa; e Dr. Silvio Luis Martins Britto.

A quinta edição realizada no ano de 2021, contou com a parceria do Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN), Campus Central, Natal – RN, além de ser promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Rio Grande do Norte (SBEM-RN), em conjunto com o GPIMEM. O evento que engloba a cerimônia de premiação ocorreu de forma virtual nos dias 12 e 13 de agosto de 2021. Para o V Festival, a equipe de jurados foi novamente dividida em dois grupos, foram eles: Dra. Arlete Brito; Dra. Clarice Gualberto; Dr. Fabian Posada-Balvin; Dr. Fredy Enrique González; Jeyzon Leonardo; Joriana Pontes; Dra. Liliane Neves; Ms. Luciana Andrade; Ms. Nonato Santos; e Ms. Robson Santos.

Vale destacar que os Festivais têm sido palco de diversas investigações, as quais podem ser encontradas no site do nosso grupo de pesquisa[12]. Com cinco Festivais organizados é possível notar que o evento se transformou em um campo propício para a interdisciplinaridade, tema muito visado em propostas pedagógicas na área de Educação, mas que, por vezes, é pouco praticado.

A diversidade de visões, experiências e formações dos organizadores, participantes e jurados tem levado a uma troca de experiências entre grupos que normalmente não conversariam sobre Matemática nem na escola nem na universidade, muito menos fora delas. Se considerarmos que, em todas as edições, houve a participação de pais (no sentido amplo da palavra), coordenadores e estudantes universitários, há uma gama de atores que debatem matemática, estética e humor. Ainda não há estudos sobre isso, mas certamente a busca por uma linguagem comum para falar sobre

[12] Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/#!/gpimem. Acesso em: 15/05/2021.

um objeto pouco usual para todos – o vídeo digital matemático – poderia ser objeto para várias pesquisas, sob múltiplas perspectivas teóricas.

Na primeira edição que ocorreu de forma virtual, em 2020, já se notou que tal diversidade aumentou e tivemos pais e alunos da zona rural do Rio Grande do Sul conversando com aluna e mãe da periferia de São Paulo, bem como com estudantes do Ensino Médio do Rio Grande do Norte. Por sua vez, nas versões presenciais, tivemos experiências estéticas, relacionando arte e Matemática, que extrapolaram o Festival de vídeos em si.

Portanto, após o entendimento da proposta, dinâmica e especificidades de cada edição do Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática, apresentamos discussões de experiências estéticas proporcionadas pelos Festivais enquanto evento e pelos vídeos produzidos por alunos e professores, as quais estão organizadas em forma de episódios.

3 Discussôes de Alguns Episódios com Experiências Estéticas dos Festivais

3.1 Episódio 1: Caricatura e Cartoongrafia

Camilo Floriano Riani Costa é um artista rioclarense, docente dos cursos de comunicação e coordenador do Salão Universitário de Humor da Universidade Metodista de Piracicaba – UNIMEP. Sua participação no Festival vai além de sua função como jurado, haja vista que ele proporcionou experiências estéticas durante os dois primeiros Festivais, possibilitando vivências artísticas, por meio de mostras culturais, da chamada anteriormente apresentada (vide Figura 02) para participação no Festival e da arte das camisetas, ademais de trazer discussões sobre aspectos relacionados ao humor como recurso de linguagem ou como estratégia narrativa nos vídeos com conteúdo matemático.

Durante o evento presencial do I Festival, Camilo desenvolveu uma atividade cultural, em que produziu uma caricatura do ator Hélio de la

Peña a qual foi doada para a UNESP de Rio Claro e se encontra no Departamento de Educação Matemática.

Figura 03 – Caricatura do ator Hélio de La Peña

Fonte: Domingues (2020).

Para Riani (2002), o humor pode ser visto como uma forma de quebrar barreiras para iniciar um envolvimento entre pessoa(s) e/ou entre pessoas e uma obra. No caso dessa caricatura, Camilo apresenta uma arte, relacionando o ator Hélio tanto à sua trajetória com números, haja vista sua formação como engenheiro quanto à sua conexão com o Festival, na condição de jurado.

No II Festival, a atividade cultural desenvolvida por Camilo durante a programação do evento presencial foi a produção coletiva de uma cartoongrafia[13]. O processo de criação passou pelas mãos de vários participantes, já que o cartunista-pesquisador delimitava áreas para que alunos, professores, jurados e organizadores desenhassem, escrevessem, rabiscassem e se manifestassem de forma livre. O resultado foi um incrível mosaico, como pode ser observado na Figura 04.

[13] A cartoongrafia coletiva foi idealizada por Camilo Riani e traz a biografia imagética de uma personalidade, constituída por meio de 'micro-cartoons'. Essa técnica une pessoas das mais variadas idades, culturas e classes na construção coletiva, com pequenos desenhos que formam uma imagem maior vista de longe. O resultado é um impactante mosaico, repleto de expressões, traços, desenhos e mensagens que, somados, transformam-se no rosto do próprio biografado.

Figura 04 – Cartoongrafia desenvolvida de forma coletiva

Fonte: Elaborada pelos autores.

Alunos de todos os níveis, professores e o organizador do Festival tiveram a chance de participar de uma obra de arte de Riani. Estas experiências estéticas mostram que os Festivais possibilitam uma composição da arte, da poesia e da música não só nos vídeos produzidos, mas também nos eventos “presenciais de encerramento”. Segundo Bakhtin (2000, p. 324), a composição estética leva em consideração “todas as relações envolvidas em um enunciado, existente ou presumido”, ou seja, para o autor, a composição estética coaduna todas as vozes dos participantes, que podem servir de inspiração para dar forma a algo construído ou produzido.

Na Figura 04, observa-se a perspectiva segundo a qual a arte pode ser coletiva, pode ser freireana ao ter “não-artistas” participando da obra de Camilo Riani que, a partir desse contato, também se tornam, de certo modo, artistas. Embora não planejada para esse fim, a atividade tem sinergia com a ideia do vídeo digital matemático, como sugerem Borba e Oechsler (2018) quando afirmam que a produção dessa mídia pode ser vista como freireana.

Isso porque Freire (2020) sugere a dialogicidade como base para sua proposta de educação, visto que, nela, alunos e professores, de forma "horizontal", aprendem mutuamente. Em pleno século XXI, no ano do centenário do nascimento do pedagogo, essa ideia pode ser atualizada e revivida pela aceitação, na sala de aula de Matemática, do vídeo digital como uma forma de comunicação da geração que está na escola. Parafraseando McLuhan (1999), o vídeo já é a mensagem, ele é a Matemática com música, com humor, com imagens do cotidiano, contextualizadas em seis minutos, tempo das produções do Festival, havendo, a partir dele, comunicação matemática e do conteúdo escolhido.

É o aluno que produz o vídeo, que faz o roteiro, que é ator, que edita o vídeo e, desse modo, sente-se protagonista no processo de fazer Matemática. Essa pode ser uma das características dessa sala de aula em movimento (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018; ENGELBRECH; LLINARES; BORBA, 2020). Camilo Riani intitulou essa modalidade de pintura de ArteExperiência Coletiva. Para nós, ela tem sido uma inspiração para pensar a Educação Matemática.

3.2 Episódio 2: Experiências Estéticas: Linguagem e Multimodalidade

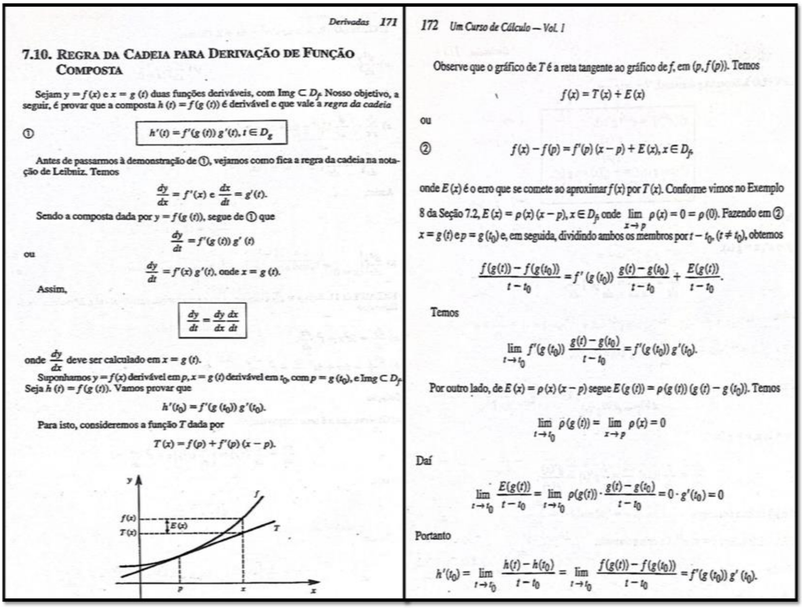
Outra experiência estética que pode ser observado nos Festivais diz respeito ao que é apresentado nos vídeos produzidos pelos participantes, posto que eles expressam sentimentos, emoções e conteúdos matemáticos com certa plasticidade da linguagem. Domingues (2020, p. 151) relata que a linguagem expressa nessa mídia possui certa "liberdade", "[...] no sentido de poder ser menos formal para transmitir uma informação matemática, uma vez que, enquanto há um rigor próprio da escrita, a multimodalidade do vídeo é mais flexível, envolvendo as noções de plasticidade".

O autor supracitado também discute que a linguagem dos vídeos permite adaptações artísticas, dado que rimas e conteúdo matemático, por exemplo, são ajustados em forma de melodia em determinadas paródias musicais. Ele destaca ainda que pequenas inconsistências podem ocorrer nessa produção de significado, sem, contudo, abalar a compreensão do que é veiculado.

Tais discussões vão ao encontro do que consideramos aqui como experiências estéticas, haja vista que estes elementos artísticos presentes nos vídeos propiciam características e cenários próprios. Com isso, torna-se viável expressar ideias matemáticas complexas e carregadas de simbologia de uma forma criativa, dado que a multimodalidade dessa mídia permite exprimi-las por meio de músicas, de poemas ou de analogias que visam a facilitar as explicações, como no caso do vídeo a seguir. Observemos, nesse episódio, como a comunicação de ideias matemáticas de cálculo diferencial apresenta experiências estéticas distintas quando retratado em livros didáticos e em um vídeo do II Festival.

A regra da cadeia é um tema recorrente nos livros de Cálculo Diferencial e Integral I, sua explicação e ideia intuitiva possuem rigor na escrita, permeada de experiências estéticas carregada de símbolos matemáticos, conforme a Figura 05:

Figura 05 – Regra da cadeia



Derivadas 171

7.10. Regra da Cadeia para Derivação de Função Composta

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, com $\operatorname{Im} g \subset D_f$. Nosso objetivo, a seguir, é provar que a composta $h(t) = f(g(t))$ é derivável e que vale a *regra da cadeia*

① $$\boxed{h'(t) = f'(g(t))\, g'(t), t \in D_g}$$

Antes de passarmos à demonstração de ①, vejamos como fica a regra da cadeia na notação de Leibniz. Temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ e } \frac{dx}{dt} = g'(t).$$

Sendo a composta dada por $y = f(g(t))$, segue de ① que

$$\frac{dy}{dt} = f'(g(t))\, g'(t)$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\, g'(t), \text{ onde } x = g(t).$$

Assim,

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

onde $\frac{dy}{dx}$ deve ser calculado em $x = g(t)$.

Suponhamos $y = f(x)$ derivável em p, $x = g(t)$ derivável em t_0, com $p = g(t_0)$, e $\operatorname{Im} g \subset D_f$. Seja $h(t) = f(g(t))$. Vamos provar que

$$h'(t_0) = f'(g(t_0))\, g'(t_0).$$

Para isto, consideremos a função T dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

172 Um Curso de Cálculo — Vol. I

Observe que o gráfico de T é a reta tangente ao gráfico de f, em $(p, f(p))$. Temos

$$f(x) = T(x) + E(x)$$

ou

② $$f(x) - f(p) = f'(p)(x - p) + E(x), x \in D_f,$$

onde $E(x)$ é o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $T(x)$. Conforme vimos no Exemplo 8 da Seção 7.2, $E(x) = \rho(x)(x - p)$, $x \in D_f$, onde $\lim_{x \to p} \rho(x) = 0 = \rho(0)$. Fazendo em ② $x = g(t)$ e $p = g(t_0)$ e, em seguida, dividindo ambos os membros por $t - t_0$, $(t \neq t_0)$, obtemos

$$\frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = f'(g(t_0))\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} + \frac{E(g(t))}{t - t_0}.$$

Temos

$$\lim_{t \to t_0} f'(g(t_0))\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = f'(g(t_0))\, g'(t_0).$$

Por outro lado, de $E(x) = \rho(x)(x - p)$ segue $E(g(t)) = \rho(g(t))(g(t) - g(t_0))$. Temos

$$\lim_{t \to t_0} \rho(g(t)) = \lim_{x \to p} \rho(x) = 0$$

Daí

$$\lim_{t \to t_0} \frac{E(g(t))}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \rho(g(t)) \cdot \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = 0 \cdot g'(t_0) = 0$$

Portanto

$$h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = f'(g(t_0))\, g'(t_0).$$

Fonte: Guidorizzi (2001, p. 171-172).

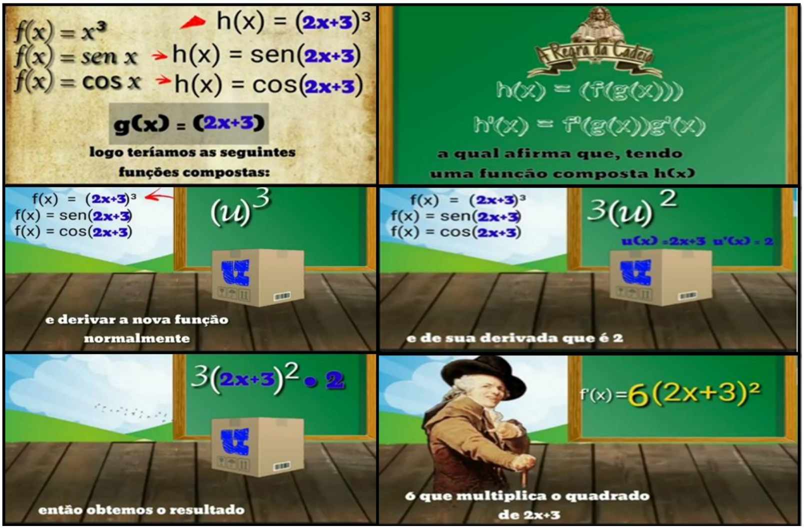
Essa linguagem representada pela Figura 05 é comumente utilizada em disciplinas de Cálculo tanto para cursos de exatas (Matemática, Física, Engenharias, dentre outros) quanto para outros cursos que também possuem disciplinas como Cálculo, Pré-cálculo ou Matemática Aplicada (Administração, Biologia, dentre outros). Nessa figura, retirada do livro de Guidorizzi (2001), verifica-se a representação da regra da cadeia de duas formas escritas equivalentes: a primeira, como sendo a notação proposta por Lagrange, ilustrando a derivada de $y = f(x)$ por $f'(x)$ ou y' e a derivada de $x = g(t)$ por $g'(t)$ ou g'; a segunda, como sendo a notação utilizada por Leibniz, retratando a derivada de $y = f(x)$ por $\frac{dy}{dx}$ e $x = g(t)$ por $\frac{dx}{dt}$. Estas são as notações mais usuais nos livros de Cálculo para derivadas, embora possamos encontrar outras simbologias na história do cálculo.

A Figura 05, do livro de Guidorizzi (2001), com dois tipos de notações apresentadas, pode gerar uma fusão delas pelos alunos no ato de resolver exercícios de aplicação. Nota-se que, neste livro, tem-se apenas um argumento matemático da regra via limites e não uma demonstração formal. A demonstração da regra da cadeia em si pode ser verificada em livros como o de Stewart (2013). Para demonstrar de fato a regra da cadeia, Stewart (2013) apresenta toda a teoria, seguida de exemplos, com vistas a preparar o leitor para a demonstração, que só ocorre no final da seção sobre o tema, em que se vale de todas as ideias já explicadas.

Essa regra da cadeia é apresentada com notações equivalentes, mostra intuitiva e exemplos em vários livros de Cálculo e em alguns livros de Análise. Nestes materiais, pode-se encontrar sua demonstração carregada por suas respectivas simbologias e beleza (estética) matemática.

No II Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática, foi inscrito um vídeo, que apresentou experiências estéticas a partir das analogias, compreensões, simbologias e mostras visuais para com a regra da cadeia. Neste vídeo, os autores deram certa dinamicidade à regra da cadeia, associando "colocar" uma das funções em uma caixa (a função "interna"), de modo a mudar a variável, visando a facilitar a aplicação da derivada nestes casos. A Figura 06 contém imagens dele, nas quais é resolvido um exercício pela regra da cadeia.

Figura 06 – Vídeo do II Festival, inscrito na categoria Ensino Superior e intitulado Regra da Cadeia



Fonte: Imagens retiradas do vídeo Regra da Cadeia[14].

O vídeo apresenta a regra da cadeia, relatando que tinha como objetivo "dar uma noção de derivada da função composta" e, para isso, seus idealizadores resolveram utilizar o auxílio de uma caixa chamada de "u". Com vistas a derivar determinada função composta $f(x) = (2x + 3)^3$ por esse método, eles indicam que basta colocar a função interna dentro da caixinha, de modo que, no exemplo dado, $u(x) = 2x + 3$ consiste na função denominada por eles "interna", a qual logo entra na referida caixa, sendo substituída por "u". Após esse processo, deriva-se a função "u" normalmente, neste caso u^3, que tem como resultado $3u^2$.

Após esse processo, os autores retiram a função armazenada na caixa e a derivam em relação à variável x, de modo que $u'(x) = 2$. Feito isso, eles aplicam a regra da cadeia, substituindo o valor de u na derivada $3u^2$, que fica igual a $3 \cdot (2x + 3)^2$, e multiplicam esta expressão por $u'(x)$, ou seja, 2.

[14] Disponível em: https://youtu.be/pspBpQnGoQY. Acesso em: 15/05/2021.

Logo, a expressão fica $3(2x+3)^2 \cdot 2$, que, ao simplificar, resulta em $f'(x) = 6 \cdot (2x+3)^2$.

Explicações como essa, que mesclam mais de uma notação do cálculo, são comuns em diversas salas de aula, assim como há fragmentos das mesmas em livros. Mas a questão é que, no vídeo, em cinco minutos, a explicação é transformada em algo visual. Notam-se várias experiências estéticas, tais como separar as funções em externa e interna, guardar a função interna na caixa, realizar um conjunto de operações separadas para depois juntá-las, informações estas que se sobrepunham no vídeo a cada nova reorganização dos cálculos.

Essa maleabilidade da linguagem oral também é vista em sala de aula, em que professores comumente se valem de termos como “função interna” e “função externa” ou “função de dentro” e “função de fora”. Porém, nesse vídeo, essa linguagem multimodal, ao mesmo tempo que permite a explicação oral, ganha determinado destaque visual pela representação de tais funções como caixas, contando também com uma animação com o passo a passo da resolução, a qual vai sendo exposta no decorrer dessa produção audiovisual, intercalando os cálculos com a ideia de guardar informações (expressões algébricas) na caixa.

Em determinados vídeos, assim como nesse, surgem algumas pequenas inconsistências de representação ou de dicção. No entanto, de modo geral, tais inconsistências são notadas e não interferem na compreensão do que está sendo desenvolvido, tal como ocorre com os livros, constantemente revisados. No caso dos vídeos, há sempre a possibilidade de editá-los e corrigi-los, cabendo ao autor verificar a necessidade ou o trabalho que isso demandará.

Outro aspecto observado com relação à multimodalidade do vídeo e com experiências estéticas, diz respeito à linguagem do humor que permeia boa parte dessas produções, mesmo que esse não seja um critério estabelecido em nenhuma das normas dos Festivais.

Este vídeo da regra da cadeia apresenta ainda outras experiências estéticas, como a "paródia" de um antigo programa humorístico da televisão aberta, intitulado "Casseta e Planeta", do qual um dos jurados do I Festival, o ator Helio de La Peña, fazia parte. Na atração, um dos quadros exibidos era o das "Organizações Tabajara" e, no momento em que os autores apresentam as "Organizações Crajubar", há uma remissão a ele. Ele também faz uma releitura de propagandas de TV relativas a medicamentos que, após publicizarem os produtos, reproduzem o aviso: "ao persistirem os sintomas, o médico deve ser consultado". Essa intertextualidade é recuperada ao final do vídeo quando, depois de apresentarem a regra da cadeia, os autores enunciam a seguinte frase: "ao persistirem as dúvidas, o professor deverá ser consultado". Esta experiência estética associada à linguagem do humor será mais detalhada no episódio 3.

3.3 Episódio 3: Humor como Experiências Estéticas nos Vídeos

A linguagem do humor presente nos vídeos dos Festivais é um assunto que apareceu de maneira sutil em Domingues (2020), por meio da seguinte inquietação: Por que, mesmo não sendo regra dos organizadores do I Festival, a linguagem do humor se fez presente em várias dessas produções?

O entendimento do autor no tocante a essa questão foi o de compreender essa linguagem como algo capaz de colaborar para o rompimento da imagem pública da Matemática, muitas vezes caracterizada como fria e séria, à medida que as artes dão espaço à expressão dos sentimentos e emoções, por meio de vídeos performáticos (GREGORUTTI, 2016).

Isso porque, ao analisar alguns vídeos e entrevistas dos participantes do I Festival, Domingues (2020) pôde verificar comentários referentes à diversão ocorrida durante as gravações dos vídeos, além de cenas cômicas e relatos de sentimentos positivos causados neles ao assistirem a vídeos de outros grupos inscritos no evento. Este envolvimento dos participantes evidencia a difusão de ideias matemáticas de forma mais livre, não se prendendo apenas ao rigor matemático.

Na busca por melhor compreender esses novos elementos presentes nos vídeos, realizou-se a leitura de Riani (2002), já que o autor aborda elementos da linguagem do humor em seu livro "Linguagem & Cartum... Tá Rindo do Quê? um Mergulho nos Salões de Humor". Ao discutir a linguagem como sendo um elemento da comunicação visual, verbal e sonora, o professor destaca a importância dos conceitos de transmissão e de codificação da linguagem na compreensão de uma mensagem, ressaltando a necessidade de conhecimentos prévios para que ela tenha sentido. A linguagem do humor, destacando aspectos por meio do exagero e da ridicularização, gera riso e crítica concomitantemente à quebra de barreiras, favorecendo o envolvimento de pessoas.

Riani (2002) discute e apresenta a linguagem como forma de comunicação, de externalização de sentimentos e emoções, de modo a representar uma dimensão social, por ser provida de intenção. Para ele, a linguagem do humor pode ser compreendida como um modo de criticar, de interpretar e de evidenciar os discursos da sociedade de outra maneira. Tais proposições vão ao encontro daquelas acerca das experiências estéticas, no sentido de serem críticas criativas sobre a realidade, cujo intuito é o de problematizar, questionar ou reproduzir determinados padrões da sociedade.

O referido autor expõe e discorre sobre dez aspectos utilizados na comunicação da linguagem do humor. São eles: Dialogismo, Polifonia, Exagero, Ruptura discursiva, Paródia, Crítica, Síntese, Ambiguidade/duplo sentido, Aspectos ridículos e Revelação de aspectos escondidos.

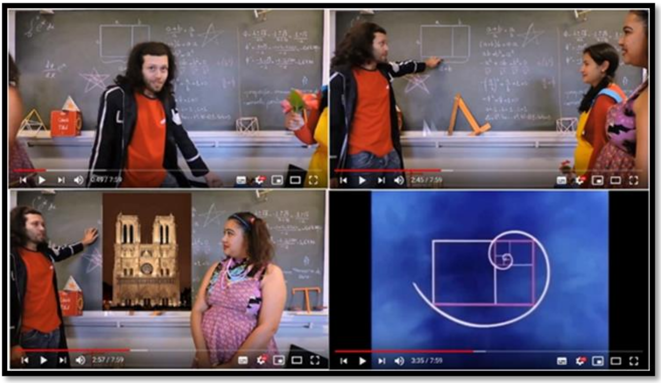
Alguns desses elementos são facilmente notados nos vídeos do Festival, tais como:

a) Exagero – estratégia que favorece a risada ao possibilitar exagero, defeitos, distorções, dentre outros elementos que propiciam cenas cômicas. Ressalta-se que o riso nem sempre está necessariamente ligado ao humor.
b) Ruptura discursiva – quebra de uma ideia apresentada no vídeo, ocasionando um final inesperado.
c) Paródia – umas das técnicas que mais surgem nos vídeos, que consiste no fato de imitar ou reinterpretar as características de um personagem, de uma obra, de um programa de TV, de uma música, dentre outros.
d) Crítica – ao se trabalhar alguns temas nos vídeos, expõem-se situações, teoremas ou matemáticos consolidados de modo extrovertido, de algo que era tido como intocável.
e) Ambiguidade/duplo sentido – quando vídeos focam em paradoxos ou discursos contraditórios de termos ou representações.

Riani (2002) enfatiza que sempre cabem distintas análises e interpretações em trabalhos de natureza artística, devido à subjetividade e conhecimentos prévios de quem os produz ou os avalia. Ressalta-se ainda que em um mesmo trabalho, podem emergir mais de um desses elementos supracitados.

Domingues (2020) analisa um dos vídeos do I Festival sobre o número de ouro, ressaltando seus aspectos de humor, os quais, por ora, podem ser vistos como resultante de experiências estéticas, tais como o exagero e a crítica nas roupas utilizadas, bem como a paródia ao se imitar a postura de um determinado programa de TV, no caso, “O mundo de Beakman”, conforme se verifica na Figura 07, figura formada por trechos do vídeo Número de Ouro.

Figura 07 – Vídeo do I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática, inscrito na categoria Ensino Superior e intitulado Número de Ouro



Fonte: Domingues (2020) [15].

Em termos de linguagem de humor, também é possível verificar muitas experiências estéticas interessantíssimas em outro vídeo do I Festival, conhecido como o dia do Curinga representado na figura 8, que trata a respeito da releitura de um livro, adaptado ao teatro e à literatura de cordel, no qual se desenvolve a ideia de como medimos o tempo em termos de horas, meses e dias dos anos.

Figura 8 – Vídeo do I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática, inscrito na categoria Ensino Superior e intitulado Dia do curinga

Fonte: Imagens retiradas do vídeo Dia do curinga[16].

[15] Disponível em: https://youtu.be/v2vuHguxdBI. Acesso em: 15/05/2021.

[16] Disponível em: https://youtu.be/C45fKznkeGw. Acesso em: 15/05/2021.

Essa releitura do livro e do modo como a sociedade organiza o tempo possui um enredo muito interessante, o qual busca relacionar o calendário (incluindo o ano bissexto) com as cartas do baralho, conforme o trecho:

> Tempo... tempo... tempo... como posso compreendê-lo se contigo me atrapalho?
> Façamos um calendário com as cartas do baralho.
> 7 são as maravilhas e as virtudes cardeais, 7 cores do arco-íris, 7 notas musicais, 7 dias da semana e os pecados capitais.
> Cada carta do baralho representa uma semana, são 52 cartas, 52 semanas que o ano instituiu a Santa Igreja Romana.
> Se divide em 4 partes o plano cartesiano, 4 naipes do baralho, as 4 estações do ano, são 4 as fases da lua e o ciclo do ser humano.
> Cada mês, 4 semanas, 28 dias contamos, nem 30, nem 31 no nosso mês encontramos... não 12, mas 13 meses, que o nosso ano compomos.
> A terra gira o tempo todo e pelo universo seguia.
> Em torno de si, rotação, o que define um dia.
> Em torno do sol, translação, um ano completaria, mas e nesse calendário, um ano ainda não finda, 13 vezes 28, se me permite a respinga, 364 falta o dia do curinga.
> 365 dias mais 6 horas completou um ciclo da translação, em quatro anos juntou, 24 horas a mais que o ano bissexto formou.

A experiência estética permeada pelo teatro e pela literatura se sobressai nesse vídeo, juntamente com as cores das vestimentas, as fantasias de baralhos, de monarca e de curinga, com suas peles pintadas.

Outro vídeo que chama a atenção nos aspectos dublagem musical e arte teatral, em função de suas vestimentas e da criação de um enredo segundo o qual a aluna está sonhando, é o Cleópatra da Matemática, integrante do I Festival, conforme a Figura 9:

Figura 9 – Vídeo do I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática, inscrito na categoria Educação Básica e intitulado Cleópatra da Matemática

Fonte: Imagens retiradas do vídeo Cleópatra da Matemática[17].

Este vídeo, sem dúvidas, apresenta uma vertente artística e experiência estética diferenciada, uma vez que a Cleópatra realiza diferentes performances e representações no supermercado, na lousa, ao mesmo tempo em que consegue encaixar teoria matemática no ritmo da música escolhida. O exagero, a paródia e a crítica são elementos da linguagem do humor que pulsam nessa produção.

Neste episódio, analisamos três narrativas digitais multimodais que mesclam Matemática com diferentes formas de arte, por meio da mídia vídeo. Não é possível ler-viver esse episódio sem fazer uma parada para olhar os vídeos. Melhor dizendo: alternativamente, é possível, mas, ao ver os vídeos e reler o episódio, os episódios e a releitura desse texto se transformam.

Nos três episódios, tematizamos a interdisciplinaridade, a educação dialógica, a estética e o humor como aspectos que normalmente não estão associados à imagem que temos da Matemática como ciência. Entendemos

[17] Disponível em: https://youtu.be/USfgqIuDdMU. Acesso em: 15/05/2021.

que o Festival pode ser visto como uma faceta da sala de aula em movimento, que não cabe mais no modelo de um paralelepípedo.

4 Episódio 4 ou Grand Finale: Festival como Ato Artístico e Social para a Libertação

> Palavra, imagem e som, que hoje são canais de opressão, devem ser usados pelos oprimidos como formas de rebeldia e ação, não passiva contemplação absorta. Não basta consumir cultura: é necessário produzi-la. Não basta gozar arte: necessário é ser artista! Não basta produzir ideias: necessário é transformá-la em atos sociais, concretos e continuados. Em algum momento escrevi que ser humano é ser teatro. Devo ampliar o conceito: ser humano é ser artista! Arte e estética são instrumentos de libertação (BOAL, 2009, p. 19).

A ideia de que a imagem, o som e a arte, de um modo geral, transformam a realidade não é nova. Boal (2009), um dos líderes do teatro do oprimido, pensava em como transformar a sociedade ao fazer arte, separando-se de uma sua visão como "retrato", como algo que deva ser contemplado, mas jamais pensado como um meio de transformar.

A Educação Matemática surge, dentre outros motivos, como uma resposta a uma contradição: várias forças sociais veem como importantes sua difusão, sua popularização e sua compreensão como um elemento da cidadania, mas, ao mesmo tempo, o ensino formal da disciplina é cercado de problemas.

O seu código específico, aliado à necessária combinação com a linguagem usual e diagramas, põe a Matemática como algo distante, inatingível para muitos. Soma-se a isto o fato de a imagem da Matemática ter sido construída como algo para poucos, para os que têm dom. Surge daí a Educação Matemática como campo prático de atuação e como área de investigação, como a construção de um campo científico que lida com essas tensões.

O tema relativo às tecnologias digitais na Educação Matemática é uma das tendências (D'AMBROSIO; BORBA, 2010) desse campo. No entanto, ele causava uma inquietação advinda de questionamentos sobre como incorporar tais tecnologias nesse domínio. Com o advento da pandemia, a transformação da sala de aula, que já acontecia de forma acelerada, ganhou novo impulso (ENGELBRECHT *et. al.*, 2020). Assim, hoje em dia, já é possível dizer que a inquietação desta tendência consiste em: como incorporar a Educação Matemática nas tecnologias digitais? E mais, esta noção poderia valer para qualquer tendência ou Grupo de Trabalho (GT) dos diversos congressos da área.

O descompasso cada vez maior entre o tempo da sala de aula convencional e o tempo da *internet* aumentou consideravelmente nesse século. O "telefone" celular se transformou em símbolo de mobilidade, *internet* das coisas, em escritório, em local de diversão e em escola. Se isso já era verdade até o início de 2020, com a "perene" pandemia da COVID-19-20-21, a sala de aula de Matemática nunca mais será a mesma. O que era dúvida no título do artigo de Engelbrecht *et al.* (2020), parece certo agora, meses após sua publicação: 2020 será lembrado como o ano que marcará mudanças na Educação.

Ainda não está claro o contorno, mas parece que a hibridez da Educação, combinando atividades *on-line* e presenciais será sem volta, será mais *on-line* se houver um "2022" acoplado ao título da pandemia atual. Se a vacina vencer a batalha contra "essa coisa vírus", teremos a volta de várias atividades presenciais, mas mudanças acontecerão no nível de participação de atores não humanos nas aulas e de atores humanos nas tecnologias digitais incorporadas à Educação (BORBA, 2021).

A desigualdade social ficou tão mais à mostra com o advento da participação ativa dos lares no ensino emergencial *on-line*, que será difícil pensar em educação democrática sem uma forte redistribuição de renda que reagrupe nações, como o Brasil, em um só país, e não em um país que alguns têm acesso à *internet* e boas condições em casa para o ensino remoto e outros não (BORBA, 2021).

Parece que a predominância da oralidade usual e da escrita na sala de aula estão abaladas, e que atividades como o vídeo digital (matemático) trazem novas oralidades, mescladas com contextos retratados nessas mídias, entrelaçadas com a Matemática e povoadas por música e arte. Assim, da mesma forma que Boal (2009) criou a noção de “espectactor”, um trocadilho em inglês que mescla espectador com ator, vídeos digitais em Educação Matemática estão a entrelaçar matemáticas compreendidas de forma diferente, com visão de mundo, com disparidade de condições socioeconômicas.

Inspirados em Canda (2012), que apresenta as ideias discutidas por Freire e Boal sobre o posicionamento ético-político de transformação social pelo viés da Educação e da Cultura, podemos pensar que os vídeos produzidos são materiais didáticos e, portanto, abrem caminho para uma nova horizontalidade freireana, com os alunos, mediados por professores, produzindo-os e postando-os nas redes. Desse modo, alunos e professores estão colaborando, muitas vezes com equidade, para a construção do conhecimento, que gera aprendizagem.

Da mesma forma que Camilo Riani pratica e amplia a sua ideia de ArteExperiência coletiva, que teve início no Festival e já toma muros de escolas e ambientes virtuais, esperamos que o Festival seja uma fusão de experiências estéticas e arte-matemática, inspirada na arte e na perspectiva democrática de Camilo Riani. Arte e Matemática para todos, ensino e aprendizagem para todos, sempre!

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Processo 309992/2020-6) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), no escopo do Programa CAPES-PrInt - Código de Financiamento: 001 (Processo: 88887.194785/2018-00).

Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. Tradução de Alfredo Bosi e Ivone Castilho Benedetti. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BAKHTIN, M. M**.** *Estética de Criação Verbal*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BOAL, A. *A estética do oprimido*. Rio de Janeiro: Garamond, 2009. 256 p.

BORBA, M. de C. The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things. *Educational Studies in Mathematics*, [*s.l.*], p. 1-16, 2021.

BORBA, M. de C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática*: sala de aula e internet em movimento. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018. Reimpressão. (Coleção Tendências em Educação Matemática). 159p.

BORBA, M. de C.; OECHSLER, V. Tecnologias na educação: o uso dos vídeos em sala de aula. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 11, n. 2, p. 391- 423, 2018.

CANDA, C. N. Paulo Freire e Augusto Boal: Diálogos Entre Educação e Teatro. *Revista Holos*, [*s. l.*], v. 4, n. 28, p. 195-205, 2012.

D'AMBROSIO, U.; BORBA, M. de C. Dynamics of change of mathematics education in Brazil and a scenario of current research. *Revista ZDM - The International Journal on Mathe-matics Education*, Springer, [*s. l.*], v. 42, n. 34, p. 271-279, 2010. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/71691. Acesso em: 27 abr. 2021.

DEWEY, J. *Arte como experiência*. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

DOMINGUES, N. S. *Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática*: uma complexa rede de Sistemas Seres-Humanos-Com-Mídias. 2020. 279 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2020.

DOMINGUES, N. S.; BORBA, M. C. Modelagem matemática e vídeos digitais por meio de atividades. *In*: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 22., 2010, Rio Claro. *Anais* [...]. Rio Claro: UNESP, 2010. p. 01-04.

ENGELBRECHT, J.; LLINARES, S.; BORBA, M. C. Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, Springer, [*s. l.*], v. 52, n. 5, p. 825- 841, 2020.

ENGELBRECHT, J.; BORBA, M. C.; LLINARES, S.; KAISER, G. Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, Springer, [*s. l.*], v. 52, n. 2, p. 821-824, 2020.

FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. 75. ed. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra, 2020. 253p.

GREGORUTTI, G.S. *Performance matemática digital e imagem pública da matemática: viagem poética na formação inicial de professores*. 2016. 63 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2016.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Local: Editora - Livros Técnicos e Científ. Ed., 2001. v. 1.

McLUHAN, M. *Os meios de comunicação como extensões do homem*. São Paulo: Cultrix, 1999.

OECHSLER, V.; FONTES, B. C.; BORBA, M. C. Etapas da produção de vídeos por alunos da educação básica: uma experiência na aula de matemática. *Revista Brasileira de Educação Básica*, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 71-80, 2017.

RIANI, C. *Linguagem & cartum... tá rindo do quê?* Um mergulho nos salões de humor de Piracicaba. Piracicaba: Unimep, 2002.

STEWART, J. *Cálculo*. Volume 1, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013, 634 p.

ZAMPIERI, M. T.; DOMINGUES, N. S.; BORBA, M. de C. Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática: problematizando suas funções sociais. *Revista Roquette-Pinto*, São Leopoldo, n. 3, p. 56-74, 2020.

Capítulo 9

Aspectos Estéticos Envolvendo a Imagem Pública da Matemática

Beatriz Barros Zamonel
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
Alexandra Carmo Caceres Ianelli
Paulo Eduardo Aquino da Silva

1 Introdução

As temáticas Imagem Pública da Matemática (IPM) e Imagem Pública dos Matemáticos têm sido investigadas em Educação Matemática (LIM, 1999). Especificamente, autores como Gadanidis e Scucuglia (2010) e Scucuglia e Gregorutti (2017) têm explorado essas temáticas em pesquisas envolvendo artes, produção de vídeos digitais e/ou produção musical. Nesse sentido, IPM tem sido discutida em cenários envolvendo o desenvolvimento de experiências matemáticas estéticas. Neste capítulo apresentamos resultados de uma pesquisa sobre IPM.

Zamonel (2021) investigou a IPM envolvendo uma turma de 4º ano de Ensino Fundamental de uma escola municipal localizada no interior do estado de São Paulo. O estudo consistiu em quatro sessões de ensino nas quais buscou-se identificar a IPM dos estudantes a partir de desenhos elaborados por eles. Desenhos foram elaborados pelos estudantes antes e após explorarem uma série geométrica convergente utilizando linguagens artísticas. Os dados foram produzidos e analisados à luz da abordagem qualitativa, sendo possível identificar alterações nas visões sobre matemática de estudantes, ou seja, a construção de imagens alternativas sobre matemática.

2 IPM na Literatura

O termo Imagem Pública da Matemática (IPM) foi definido por Lim (1999) como uma representação mental da matemática, compreendendo dimensões cognitivas e afetivas, advinda de experiências passadas vividas pelo sujeito. Para Lim (1999), a imagem negativa da matemática pode ser um fator que leva a diminuição das matrículas nos cursos de graduação em matemática, além de causar impactos em vários outros aspectos: utilitário, econômico, democrático, cultural e moral. Já com relação à arte, a imagem pode ser outra, ela é vista como criativa, divertida, colorida, prazerosa e passível de influência humana. Considerados os aspectos sobre o termo IPM, Lim (1999, p. 13, tradução nossa) afirma que ele pode ser

> [...] definido como algum tipo de representação mental (não necessariamente visual), originada de experiências passadas, bem como crenças, atitudes e concepções associadas. Como uma imagem se origina de experiências passadas, compreende tanto dimensões cognitivas quanto afetivas. Cognitivamente, refere-se ao conhecimento, crenças e outras representações cognitivas de uma pessoa. Afetivamente, está associada a atitudes, sentimentos e emoções.

Rensaa (2006) realizou na Noruega uma pesquisa para tentar identificar que imagem dos matemáticos está difundida entre pessoas adultas, para isso ela entrevistou trinta e um adultos escolhidos aleatoriamente em um aeroporto. A autora pediu aos entrevistados para descreverem um matemático, em seguida era solicitado que eles observassem uma lista de adjetivos e dissessem se achavam que tal adjetivo descrevia ou não um matemático. Após coletadas as informações acerca da imagem, Rensaa (2006) constatou que a maioria das pessoas descreveu os matemáticos como sendo homens de meia idade, com pouco cabelo, que usam óculos, vestem roupas antiquadas, não-sociáveis e tediosos. Com relação à aparência dos matemáticos, a autora destaca que imagens estereotipadas, além de contribuírem para a percepção masculina da matemática, têm grande influência para os jovens. A visão de um matemático fora de moda, não sociável e tedioso pode ser uma das razões pelas quais poucos escolhem ter a profissão de matemático (RENSAA, 2006).

Picker e Berry (2000) também realizaram estudos investigando a IPM. Em uma de suas pesquisas, os autores pediram para crianças desenharem matemáticos no trabalho e perguntaram em que circunstâncias alguém precisaria contratar um matemático. Analisando os desenhos, os autores constataram que a maioria deles representava uma pessoa do sexo masculino e muitos representavam ainda professores. Isso acontece, segundo os autores, pois há uma falta de compreensão sobre o que um matemático pode fazer, daí a confiança dos alunos em representá-lo como um professor.

Foram propostas por Picker e Berry (2000) sete categorias para analisar os desenhos produzidos pelas crianças: a primeira categoria é a *matemática como coerção*, nela foram retratados professores de matemática violentos, que usam a intimidação para fazer os alunos aprenderem; a segunda é *o matemático tolo*, representados como sendo desprovidos de bom senso e de senso de moda; a categoria seguinte é *o matemático exagerado*, que parece sobrecarregado e tem aparência selvagem; a quarta categoria apresenta *o matemático que não sabe ensinar*, nesse caso o matemático não tem conhecimento do conteúdo e não consegue controlar a sala de aula. A *depreciação dos matemáticos* é a quinta categoria e descreve matemáticos inteligentes demais ou desprezíveis; a sexta categoria é chamada de *efeito Einstein*, nesses desenhos há a representação de Albert Einstein; por fim, a sétima categoria é *o matemático com poderes especiais*, que incluem magia e poções especiais. Os autores acima destacam ainda que os desenhos analisados evidenciam a importância em obter a resposta correta em matemática, não levando em conta todo o processo realizado (PICKER; BERRY, 2000).

Outros autores que utilizaram desenhos para investigar a IPM foram Soares e Scucuglia (2019). Eles observaram nas produções das crianças algumas imagens positivas, retratadas a partir de corações, sorrisos, muitas cores e frases positivas, apareceram ainda menções à sala de aula, com exercícios e materiais (como lápis, borracha, caderno). Entretanto, imagens negativas também apareceram e foram marcadas por semblantes tristes, raivosos, indiferença, descrições repulsivas, violência, representação de frustração e dificuldade matemática. Além dos mitos matemáticos, há outras possíveis causas para as imagens negativas da matemática, como experiências escolares desagradáveis, familiares, professores e colegas, isso porque muitas pessoas aprenderam matemática de modo rígido, mecânico e não criativo e a pouca expectativa da família, colegas e professores podem fazer com que o aluno também tenha baixa afinidade com relação à matemática (LIM, 1999).

Segundo Lim (1999), a influência dos professores tem um grande peso para os entrevistados de sua pesquisa, eles podem influenciar os estudantes de maneira positiva ou negativa, a depender do incentivo e atenção empregados durante as aulas. Quanto aos familiares, as mães foram citadas como menos influentes, e isso ocorre por meio de apoio moral, encorajamento e auxílio nas tarefas escolares. Já os colegas podem exercer uma influência positiva, incentivando uns aos outros, ou negativa, promovendo sentimentos de inferioridade. Os meios de comunicação também têm papel influenciador na imagem e no gosto pela matemática, podendo auxiliar na promoção de uma compreensão da matemática, ou então difundir os mitos já mencionados. Outros fatores podem ainda ser mencionados como influenciadores, como os estereótipos, as avaliações, o interesse pessoal, utilizar ou não a matemática no trabalho, frequentar ou não o ensino superior e frequentes falhas escolares e em avaliações.

Da amostra de entrevistados, os que afirmaram gostar de matemática citaram algumas razões para isso: se considerar bom no assunto, usar a matemática no trabalho, possibilidade de encontrar soluções para problemas, poder aprender a lógica da matemática, ter o "poder da certeza", ser um desafio e aproveitar a elegância da matemática. Já os que alegaram não gostar de matemática elencaram os seguintes motivos: não se considerar bom no assunto, acreditar que a matemática é apenas para inteligentes, dificuldade para compreender os conteúdos matemáticos, culpa de professores e ter sentimentos negativos, como fúria, ódio, sentimento de luta (LIM, 1999).

O desgosto pela matemática e sua imagem pública negativa podem causar impactos em alguns aspectos sociais, como o aspecto utilitário, econômico, democrático, cultural e moral. Todas as pessoas utilizam matemática em certas atividades diárias e ter uma percepção negativa dela pode fazer com que se evite utilizá-la, tornando assim o indivíduo apreensivo e menos confiante em relação à matemática, deixando, muitas vezes, de exercer seu papel de cidadão crítico na sociedade.

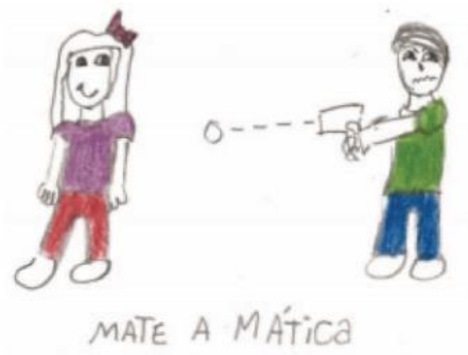
> O raciocínio matemático é necessário para a cidadania crítica, para a compreensão e para a tomada de decisões sensatas e informadas, como em votações e em questões ambientais. A má imagem pública da matemática poderia ajudar a manter a maioria da sociedade matematicamente analfabeta. Isso resulta em uma sociedade com alguns grupos oprimidos, como mulheres, minorias étnicas e classe trabalhadora, carecendo de ferramentas e habilidades conceituais para participar plenamente de nossa cultura cada vez mais matematizada (LIM, 1999, p. 23, tradução nossa).

3 IPM nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Soares e Scucuglia (2019) exploraram imagens construídas por alunos do quinto ano do Ensino Fundamental por meio de desenhos visando responder à pergunta "como você vê a matemática?". As imagens foram inicialmente categorizadas como "negativas" ou "positivas". As imagens foram consideradas positivas quando os seguintes elementos eram identificados: expressões faciais alegres/sorridentes, aplicações da matemática no cotidiano, uso de diversas cores e expressões como "matemática é legal". Nessa categoria, em contraste, identificou também estereótipos como a matemática restrita à sala de aula, uso restrito de livros didáticos e resolução de muitas expressões numéricas.

As imagens foram consideradas negativas por Soares e Scucuglia (2019) quando foram identificadas expressões faciais referentes a tristeza e raiva, uso de expressões como "odeia matemática, mas finge que gosta", não uso de cores, matemática como atividade restrita ao gênero masculino, dentre outros. A imagem negativa que mais nos chamou atenção foi a que representava um menino com expressão facial de ódio, atirando com uma arma de fogo em uma menina sobre a expressão "Mate a Mática" (Figura 1).

Figura 1 – Mate a Mática



Fonte: Soares e Scucuglia (2019)

Essa imagem muito nos inquieta! Como uma criança de aproximadamente 10 anos de idade representa uma imagem envolvendo tanto ódio? Inferimos que fatores sociais como a escalada do fascismo no Brasil possam ter influenciado diretamente nesse tipo de representação/ manifestação de ódio. Mas fatores endógenos sobre a natureza da matemática em sala de aula podem ser também grandes condicionantes. "Esta é a definição e este é um exemplo. Façam todos exercícios do livro. Eles têm uma única resposta. Elas estão no final do livro, mas é proibido verificá-las". O ódio pela matemática perpassa por dinâmicas de anestesia ou mesmo violência estética em sala de aula. Acreditamos que o uso das artes oferece meios para o desenvolvimento de experiências estéticas em salas de aula de matemática.

Nesse sentido, Zamonel (2021) investigou a (des)construção da IPM através de elementos estéticos, associando assim arte e educação matemática de alunos do quarto ano do Ensino Fundamental. O estudo consistiu em quatro sessões de ensino nas quais buscou-se identificar a IPM dos estudantes a partir de desenhos elaborados por eles ao explorar uma série geométrica convergente utilizando linguagens artísticas e, após a exploração do conteúdo matemático, novamente identificar qual a IPM mantida pelos alunos, com a intenção de verificar se algum aspecto foi (des)construído. Os dados coletados foram analisados à luz da abordagem qualitativa e sugeriram que, ao associar elementos artísticos e estéticos a conteúdos matemáticos, a IPM pode ser modificada.

Na primeira sessão buscou-se meios para que os alunos elaborassem um desenho sobre como viam a matemática. Ao serem informadas de que o assunto abordado era matemático, muitas crianças logo perguntaram se deviam pegar o livro ou o caderno de atividades e quais "tipos de conta" iriam fazer. Mostraram-se muito surpresos com a informação de que não precisariam fazer contas, mas sim um desenho, desde que desejassem, pois a participação não era obrigatória. Quando todos terminaram suas produções, foi proposto que realizássemos um experimento relacionado com os paradoxos de Zenão: sair de um canto da sala e chegar ao outro, na porta, andando sempre a metade do caminho restante. Os alunos disseram ser possível chegar até a porta realizando tal procedimento, mas para isso era necessário saber qual a distância do caminho completo para poder identificar a metade dele. Muitos se voluntariaram para participar do experimento, assim ajudaram a encontrar maneiras de medir o comprimento do caminho entre uma parede e outra da classe, por não termos naquele momento uma trena ou fita métrica a solução foi utilizar as réguas usadas nos desenhos. Como não eram muitas réguas e cada uma delas era de apenas 30 centímetros, as crianças perceberam que seria um processo demorado e sugeriram utilizarmos a régua de madeira da professora que possuía 1 (um) metro, concluindo assim que a distância a ser percorrida era de 6,6m.

Ao iniciarem a caminhada até a porta, os alunos perceberam que ficavam cada vez mais próximos do destino final, porém seus passos percorriam sempre metade da distância anterior, sendo cada vez menores. Esse impasse deixou a turma dividida, alguns afirmavam ser possível chegar à porta, pois estavam muito próximos e continuariam andando a metade do caminho anterior, assim, em algum momento, concluíram a caminhada. Outros concordavam que estavam próximos, mas alegavam que andando apenas metade do caminho não seria possível concluí-lo, em razão de sempre existir uma distância, mesmo que pequena, a ser percorrida.

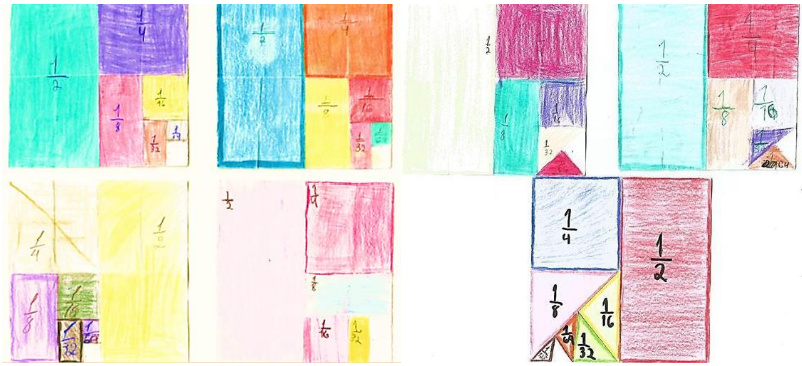
Foi então introduzida a ideia de infinito. Foi sugerido aos alunos imaginarem ser possível seguir caminhando infinitamente e se, dessa maneira, seria possível concluir o caminho. A intenção aqui não era a de chegar a uma resolução, mas sim iniciar a exploração da noção de infinito. Pelos relatos, os alunos tinham a ideia de que o infinito era apenas infinitamente grande, mas com a experiência puderam perceber que ele também é infinitamente pequeno. Terminadas as discussões acerca de infinitos grandes e pequenos, a primeira sessão foi encerrada.

Para a segunda sessão foi planejado iniciar a exploração de uma série geométrica convergente, $1/2+ 1/4+ 1/8+\dots 1/2^n +\dots = 1$, por se tratar de uma grande ideia matemática que permite explorar noções de frações e o conceito de infinito, além de oferecer a surpresa matemática (GADANIDIS; SCUCUGLIA, 2010). Um grande retângulo foi desenhado na lousa e nele as crianças hachuraram as frações apresentadas na série, percebendo rapidamente a relação dela com o desafio realizado na sessão anterior e a ideia de infinito.

Na terceira sessão, os alunos se dedicaram à produção da prova visual da série já vista, para tal proposta foram utilizadas folhas de sulfite recortadas em pequenos quadrados e lápis coloridos. Para chegar à prova visual os estudantes deveriam encontrar a metade, ou seja, 1/2 do quadrado e colori-la, em seguida localizar a metade restante, 1/4, pintá-la, e assim por diante. Com a intenção de realizar uma exploração investigativa, a turma foi dividida em pequenos grupos de três ou quatro crianças cada. Cada grupo recebeu um quadrado em branco e iniciou a prova visual, no qual o primeiro desafio encontrado pelos estudantes foi o de como identificar as frações dentro do inteiro (quadrado). Uma ideia inicial proposta por um dos grupos foi utilizar a régua para medir o comprimento total, dividi-lo por dois e assim obter a metade, outra possibilidade foi utilizar dobraduras, a primeira dobra resultaria em 1/2, a segunda em 1/4, a terceira em 1/8, assim sucessivamente.

Colorindo os primeiros termos da série os alunos perceberam que as formas geométricas retângulo e quadrado se intercalavam a cada nova divisão, algo que os auxiliou na produção da atividade, pois se a forma pintada anteriormente havia sido um retângulo, a seguinte seria necessariamente um quadrado. A seguir estão imagens das provas visuais feitas pelos grupos que usaram a ideia de retângulo-quadrado-retângulo. Entretanto, existem outras possibilidades de formas geométricas para a divisão, como o triângulo. Tal fato também foi observado e utilizado por alguns grupos na representação de frações menores, como mostrado a seguir (Figura 2).

Figura 2 – Frações coloridas



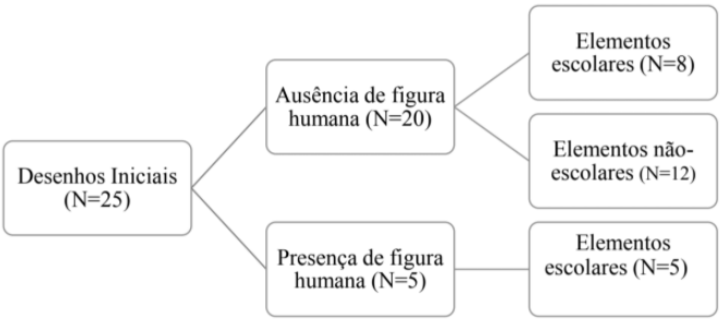
Fonte: Zamonel (2021)

Os alunos concluíram que a última fração colorida nunca era maior que a anterior e, somando essas partes cada vez menores, o inteiro, representado pelo quadrado, se preenchia, deste modo, a cada novo termo somado, chegava-se mais perto de completá-lo. A quarta e última sessão foi reservada para os alunos produzirem um novo desenho acerca da matemática e escreverem uma frase sobre o que sentiram e o que aprenderam durante as sessões passadas. O segundo desenho se valeu da mesma proposta do primeiro, os estudantes deveriam desenhar como viam a matemática. No entanto, diferentemente da proposta inicial, os alunos não manifestaram dificuldades em elaborar o desenho, mas algumas dúvidas surgiram com relação se o que estavam desenhando era ou não um desenho que retratava a matemática, como corações, árvores, sol e arco-íris. Quanto à frase, foi sugerido que a mesma fosse escrita no verso do desenho.

3.1 Desenhos Iniciais

Do total de desenhos iniciais (N=25), apenas cinco exibiram figuras humanas, enquanto os outros vinte desenhos não tiveram esta característica. Destas vinte produções, oito relacionaram-se à sala de aula, os demais (N=12) não se remeteram diretamente a elementos escolares. Com relação às produções dotadas de presença humana (N=5), todas apresentaram aspectos escolares em suas representações. Tais informações estão expressas no organograma a seguir.

Figura 3 – Organograma I



Fonte: Zamonel (2021)

A reduzida representação de figuras humanas nas produções, limitando-se ao ambiente escolar, permite inferir que, para o grupo de alunos analisados na amostra, há pouca percepção da influência humana na matemática, além de certa falta de compreensão acerca dos campos de trabalho dos matemáticos, reconhecendo apenas a profissão docente para esta área (PICKER; BERRY, 2000). Nos desenhos iniciais, nota-se ainda o elevado número de desenhos referenciando elementos do cotidiano escolar, com ou sem presenças humanas, correspondendo à metade das produções (N=13), exibindo a influência das vivências escolares na IPM. Alguns desenhos exemplificando as situações mencionadas podem ser visualizados abaixo (Figura 4).

Figura 4 – Alunos à lousa

Fonte: Zamonel (2021)

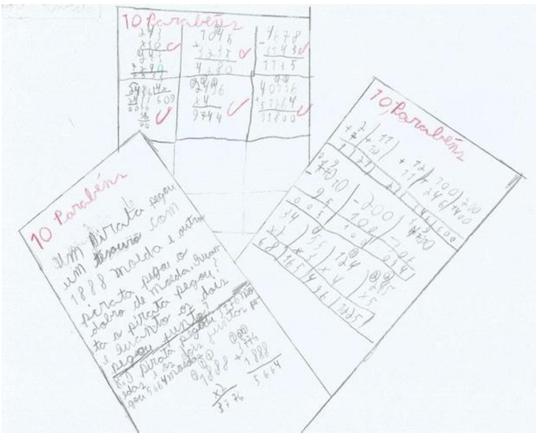
Nas Figuras 5a, à esquerda, e 5b, à direita, nota-se a relação da IPM com elementos do cotidiano escolar. Novamente houve a representação de uma lousa, desta vez com operações de subtração, adição, divisão e multiplicação, escrita de números por extenso e uma situação-problema. No caderno representado na Figura 5b há um coração junto a palavra matemática, evidenciando uma IPM possivelmente não negativa, já os números e sinais de operações em seu entorno explicitam a visão simbólica acerca da disciplina.

Figuras 5a e 5b – Elementos escolares representando a matemática

Fonte: Zamonel (2021)

Outro aspecto a ser considerado sobre a IPM são as avaliações. De acordo com os dados de Lim (1999), os exames avaliativos podem influenciar a visão sobre a matemática. Tal aspecto esteve presente em duas produções da pesquisa (N=2), como exemplificado na Figura 6. Na imagem observa-se a cor vermelha para a correção das respostas, a nota dez junto à palavra “parabéns”, além de marcadores de certo, que podem corroborar para a visão absolutista da matemática, na qual, segundo Lim (1999), a matemática é percebida como detentora de verdades absolutas e inquestionáveis, admitindo apenas certo ou errado.

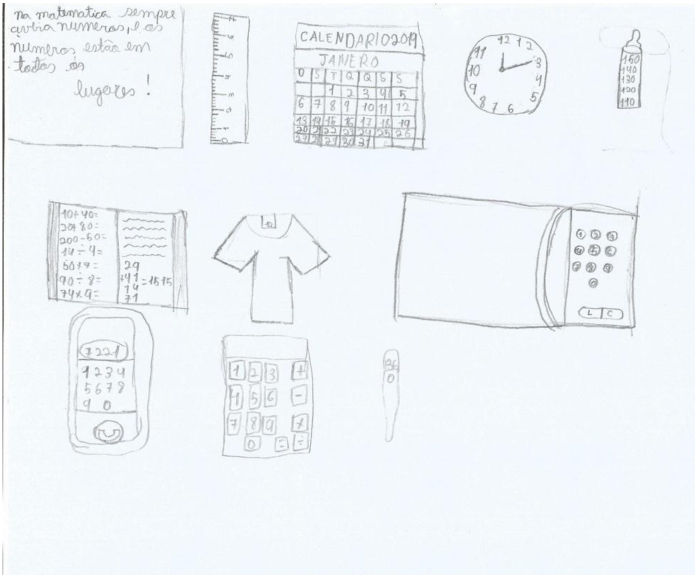
Figura 6 – Matemática representada por exames avaliativos



Fonte: Zamonel (2021)

A matemática nas vivências diárias também foi representada em dois desenhos (N=2). Embora sem cores, o desenho exibido na Figura 7 retrata a matemática presente em diferentes situações cotidianas, como no tamanho de uma roupa, nos números de uma calculadora, de um celular, de um micro-ondas, na capacidade de líquido de uma mamadeira, na temperatura de um termômetro, na quantificação do tempo a partir do relógio e do calendário, além de os centímetros de uma régua e em operações numéricas. No canto superior esquerdo do desenho lê-se a frase “na matemática sempre haverá números, e os números estão em todos os lugares!".

Figura 7 – A matemática e os elementos do cotidiano



Fonte: Zamonel (2021)

De acordo com os documentos norteadores referidos neste estudo, o ensino de matemática no Ensino Fundamental deve contemplar diferentes eixos temáticos, sendo eles números e operações, espaço e formas, grandezas e medidas e tratamento de informações (BRASIL, 1998), números, álgebra, grandezas e medidas, geometria e probabilidade e estatística (BRASIL, 2017). Apesar de diferentes blocos temáticos, foi muito recorrente nos desenhos dos estudantes a presença de conteúdos relacionados a números e operações e pouco ou nenhum conteúdo relacionado aos demais eixos.

Tal informação pode evidenciar o que é frequentemente abordado no cotidiano escolar, ou seja, muitas práticas direcionadas a números e operações e práticas menos recorrentes a respeito dos outros blocos de conteúdos. Esse fator contribui para a percepção simbólica da matemática, limitando-a a números e símbolos.

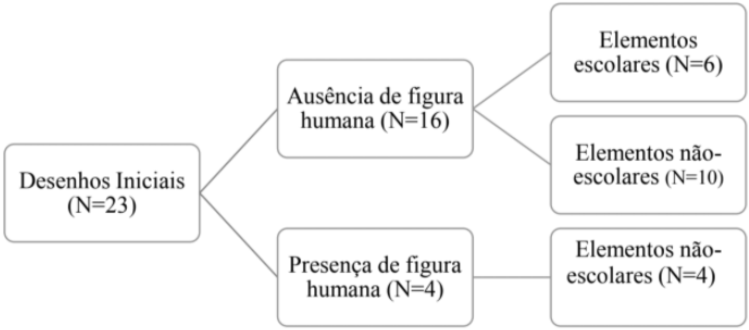
De maneira geral, com relação aos desenhos feitos inicialmente pelos estudantes, pode-se concluir que certo tecnicismo esteve presente nas produções, muitos desenhos remeteram a processos de repetição e memorização. Houve ênfase em aspectos relacionados a aritmética, embora os documentos indiquem que os alunos explorem outros campos matemáticos, como a geometria, o pensamento lógico, grandezas e medidas e noções espaciais.

Quanto aos aspectos artísticos, certos desenhos apresentaram uso moderado de cores, outros foram repletos de algarismos e operações, contemplando muito pouco, ou não contemplando, elementos estéticos e artísticos.

3.2 Desenhos finais

Após a realização das sessões de ensino envolvendo elementos estéticos, novos desenhos foram elaborados acerca da mesma temática anterior. Em comparação às primeiras produções, a dificuldade por parte dos estudantes em expressarem o que é a matemática foi notoriamente menor. Os segundos desenhos (N=23) também foram categorizados em presença ou ausência de figuras humanas e apresentaram certas mudanças com relação à percepção da matemática. Na maioria das produções, assim como na versão anterior, a representação de figuras humanas não foi muito frequente, apenas quatro desenhos apresentaram esta característica (N=4). Contudo, três desenhos exibiram indícios de humanização da matemática (N=3).

Figura 8 – Organograma II



Fonte: Zamonel (2021)

Uma mudança a ser destacada é que, mesmo a representação humana tendo sido pequena, todos os desenhos com essa característica remeteram a elementos não-escolares, se opondo à primeira versão, na qual todas as produções com figuras humanas apresentavam elementos escolares. Outro ponto a ser observado é o aumento de dois desenhos retratando situações cotidianas envolvendo a matemática, totalizando seis produções com este aspecto (N=6), enquanto que na primeira sessão o número foi de quatro desenhos (N=4).

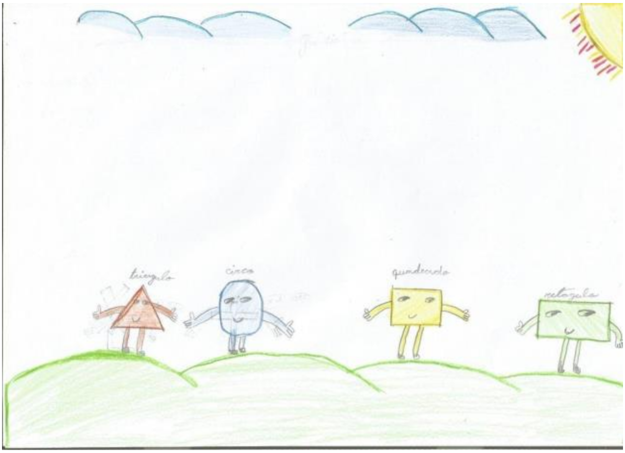
Quanto às sessões de ensino, já se esperava que as mesmas estivessem presentes nas produções da última sessão. Seis desenhos (N=6) fizeram menções diretas aos conteúdos explorados, como a série geométrica, as frações apresentadas e figuras fracionadas. Na Figura 9 observa-se duas pessoas formando um coração com os braços em volta da palavra matemática, além de um grande coração representando a fração 12, que possivelmente ocorreu pela exploração da série geométrica convergente durante as sessões de ensino, trazendo a ideia de sentimentos não-negativos acerca da matemática. Nesse desenho, apesar do contexto escolar não ser diretamente representado, vê-se uma régua e cálculos da tabuada do número dez distribuídos pela folha. Quanto à relação entre matemática e arte nesta produção nota-se o uso de um elemento básico do desenho, a linha, que divide a figura do coração em duas partes.

Figura 9 – Quando a matemática encontra a arte

Fonte: Zamonel (2021)

Já na Figura 10 não há a representação de figuras humanas, mas de algumas formas geométricas tais como, o triângulo, o círculo, o quadrado e o retângulo, que recebem características que as humanizam, como braços, pernas e rostos um tanto quanto sorridentes. O fato de figuras geométricas apresentarem traços humanos e estarem em um ambiente não escolar pode significar uma humanização da matemática e uma IPM não negativa, reiterada pelo leve sorriso presente em todas as formas. Elementos artísticos e matemáticos se entrelaçam ao observarmos as formas geométricas desenhadas com a mesma proporção de tamanho. Nas formas quadrado e retângulo há ainda outro indício de humanização da matemática, visto que as formas são representadas com membros e expressões faciais.

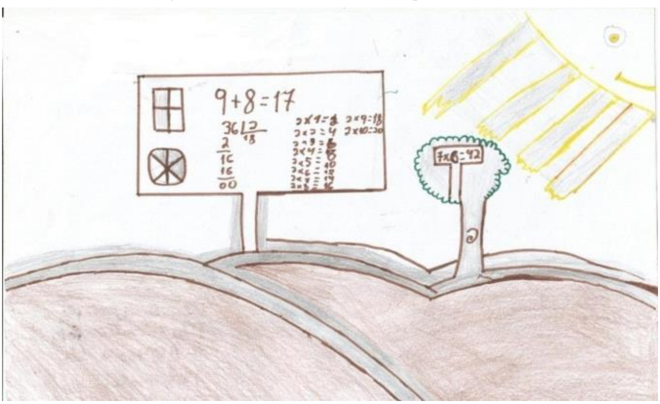
Figura 10 – O antropomorfismo das figuras geométricas



Fonte: Zamonel (2021)

No desenho exibido na Figura 11 a matemática é representada junto a elementos da natureza, como o sol, a árvore e as montanhas. O sol possui um rosto que expressa um sorriso, indicando uma IPM não negativa, na árvore se observa uma placa com uma multiplicação, outra placa também é vista ocupando boa parte do desenho, contendo figuras fracionadas e operações numéricas de soma, divisão e multiplicação. Percebe-se também certo uso de perspectiva ao desenhar uma montanha se sobrepondo à outra.

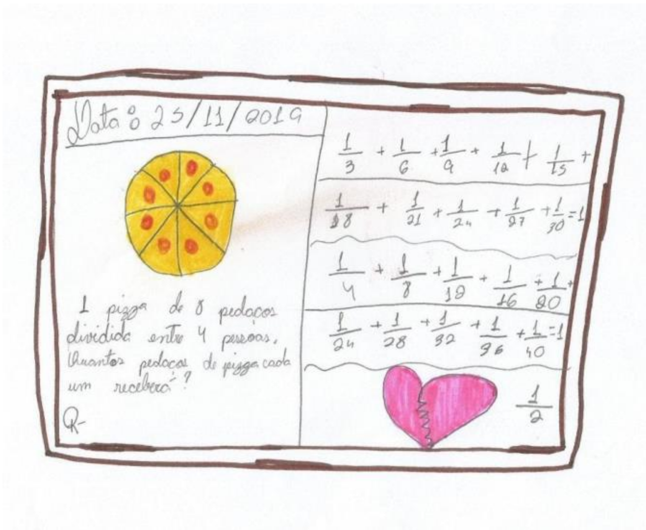
Figura 11 – A matemática envolvida pela natureza



Fonte: Zamonel (2021)

Outro aspecto presente em algumas produções foram os conteúdos abordados durante as sessões de ensino. Na Figura 12 vemos uma situação problema com uma pizza, alimento usado em certo momento das sessões como exemplo para frações, também se observa um coração representando a fração 1/2 e duas somas de frações, ambas tendo como resultado o inteiro, referenciando a série geométrica convergente explorada. As linhas são muito representativas nesta produção, pois uma delas divide o desenho ao meio e as demais dividem a metade do desenho em mais partes.

Figura 12 – A matemática como situação problema



Fonte: Zamonel (2021)

Com relação à Figura 13, as diferentes formas geométricas nela expressas (retângulo, triângulo, quadrado, octógono, cone, círculo e paralelogramo) possuem números em seus entornos, que podem representar os valores das medidas dos lados ou processos de medidas dos lados. Este desenho referencia a geometria que pertence a um dos blocos de conteúdos presentes nos documentos aqui já apresentados. No canto inferior do desenho podemos observar, a palavra matemática acompanhada do número dez, podendo indicar certa influência de avaliações realizadas na disciplina. Diferentes cores são utilizadas nesta produção e tanto as figuras quanto a palavra matemática possuem contornos.

Figura 13 – Enfeitando a geometria e avaliando a matemática

Fonte: Zamonel (2021)

Por fim, a Figura 14 retrata a matemática presente em um jogo de futebol, com as medidas do campo, os números nas camisetas dos jogadores e o placar do jogo, contemplando elementos de inteligência espacial, da geometria e de grandezas e medidas. Neste desenho os jogadores de um time são identificados pela cor amarela em suas camisetas enquanto os do outro time possuem vestimenta da cor bege, o campo de futebol é pintado de cor verde e a trave e a rede foram feitas de lápis grafite. Ainda nesta produção é possível observar linhas retas e curvas delineando as marcações de um campo de futebol.

Figura 14 – A Matemática Futebolista

Fonte: Zamonel (2021)

Como visto nos dados apresentados, não houve grande aumento na representação de figuras humanas nos desenhos finais em relação aos iniciais, porém é importante destacar que as produções finais foram mais coloridas e relacionaram com maior frequência a matemática com aspectos cotidianos, além de explorarem conteúdos como geometria e números racionais. Tais pontos indicam uma possível (des)construção da IPM, visto que a matemática foi retratada pelos estudantes de maneira mais estética, criativa e para além do ambiente escolar.

Conclusões

Foi possível observar na primeira versão dos desenhos que, para o grupo específico desta pesquisa, há pouca percepção de presença humana na matemática. Na primeira versão dos desenhos, cuja amostra total foi de vinte e cinco, apenas cinco deles representaram presença humana, a grande maioria dos alunos esboçou aspectos da matemática relacionados à sala de aula, como a lousa, o caderno, lápis, avaliações, operações e situações-problema, evidenciando a influência das experiências escolares na

IPM. Tal indício vai ao encontro do exposto por Lim (1999), no qual a escola e as situações de aprendizagem exercem forte influência na IPM, além disso, a imagem da matemática, geralmente, não se dissocia da imagem de aprender matemática.

Além dessa influência, um fator que pode ter levado os alunos a representarem salas de aula é a pouca compreensão acerca das diferentes esferas da matemática e do que os matemáticos fazem, assim, devido a essa incompreensão, há uma segurança por parte dos educandos em retratar elementos escolares (PICKER; BERRY, 2000). Outro indicativo da falta de clareza sobre o que é a matemática pode ser observado na dificuldade apresentada pelas crianças em produzir o desenho proposto.

Mais um aspecto presente nos desenhos é a visão simbólica da matemática, na qual muitos estudantes utilizaram números e símbolos diversos para representar a matemática. A visão utilitarista, da matemática é percebida nos desenhos como uma ferramenta humana necessária para as atividades diárias. Nota-se também a falta de cores em algumas produções, que pode representar a frieza associada a esta disciplina.

Já na segunda versão houve um maior número de desenhos coloridos e apresentando situações não-escolares, podendo indicar uma humanização da matemática para alguns alunos. A exploração da progressão geométrica também pode ter exercido influência no segundo desenho, pois muitos deles apresentaram algumas ideias abordadas durante as sessões anteriores, como frações equivalentes, soma de frações, figuras geométricas fracionadas e hachuradas, menções ao infinito e ao desafio “metade da metade”. É importante dizer que embora alguns desenhos tenham mostrado uma significativa mudança acerca da visão da matemática, a partir da representação de figuras humanas, desenhos mais coloridos, elementos da natureza (árvore, sol, nuvens, arco-íris) e maior percepção da matemática no cotidiano, entretanto, outros mantiveram a visão simbólica.

A mudança em aspectos dos desenhos pode revelar uma nova percepção no que se refere a matemática. Essa nova percepção, por sua vez, pode ter advindo das explorações realizadas durante as sessões de ensino, exibindo a importância do uso das artes na educação matemática para (des)construir a IPM. Segundo Lim (1999), vivenciar novas experiências promove a transformação da IPM, tais experiências, se artísticas, oferecem uma superação de práticas tradicionais e permitem o uso da criatividade e da criticidade (GONÇALVES; SANTOS, 2019). Assim, no âmbito deste estudo, o uso de linguagens artísticas, que fomentam experiências estéticas, possibilitou a construção de imagens alternativas acerca da matemática.

Referências

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 27 de maio de 2020.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em: 20 de maio de 2020.

GADANIDIS, G.; SCUCUGLIA, R. R. S. Windows into Elementary Mathematics: Alternate public images of mathematics and mathematicians. *Acta Scientiae* (ULBRA), [*s. l.*], v.12, p.8–23, 2010. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2. Acesso em: 10 de abril de

GONÇALVES, H. J. L.; SANTOS, E. F. Discussões Curriculares sobre a Interface Arte e Matemática a partir de uma Perspectiva Crítica e Criativa. *In:* SCUCUGLIA, R. R.S. (org.). *Artes em Educação Matemática*. Porto Alegre: Editora Fi, 2019, p. 81 – 105.

LIM, C. S. *Public Images of Mathematics*. 1999. 366f. Tese (Doutorado em Educação) – University of Exeter, Exeter, 1999. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.9.4740&rep=rep1&type=pdf. Acesso em: 12 de maio de 2020.

PICKER, S. H.; BERRY, J. S. Investigating pupils' images of mathematicians. *Educational Studies In Mathematics*, [*s. l.*], v.43, n.1, p.65–94, 2000.

RENSAA, R. J. *The Image of a mathematician*. Philosophy of Mathematics Education, [*s. l.*], v.19, 2006.

SCUCUGLIA, R. R. S; GREGORUTTI, G. S. Images of mathematics and mathematicians among undergraduate students of education. *Acta Scientiae* (ULBRA), [*s. l.*], v.19, p.940–957, 2017. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3562.

SCUCUGLIA, R. R. S. Images of Mathematics and mathematicians among undergraduate students of Education. *Acta Scientiae*, [*s. l.*], v. 19, n. 6, p. 940 – 957, 2017. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3562/2716. Acesso em: 11 de abril de 2020.

SOARES, L. F; SCUCUGLIA, R. R. S. Imagens sobre a matemática construídas por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. *Ensino da Matemática em Debate*, São Paulo, v.6, n.6, p. 1-28, 2019.

ZAMONEL, B. B. *(Des)construção da imagem pública da matemática*: artes e frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental a partir da exploração de uma série geométrica convergente. 69p. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) – Curso de Pedagogia, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2021.

Sobre os autores

Alexandra Carmo Caceres Ianelli: Mestranda da Universidade Estadual Paulista- UNESP no Programa de Ensino e Processos Formativos Interunidades - Câmpus de São José do Rio Preto; e-mail: alexandra.carmo@unesp.br.

Ana Carolina Bueno de Carvalho: É graduanda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus São José do Rio Preto. Integrante do Programa Residência Pedagógica - CAPES. E-mail: ac.carvalho@unesp.br. Currículo Lattes http://lattes.cnpq.br/9516085109012283.

Ana Carolina Marques Magnani Velasques: É graduanda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus São José do Rio Preto. Integrante do Programa Residência Pedagógica como voluntária em 2021. E-mail: a.velasques@unesp.br.

Beatriz Barros Zamonel: Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - IBILCE/UNESP, campus de São José do Rio Preto. Graduação em Pedagogia pelo Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - IBILCE/UNESP, campus de São José do Rio Preto. E-mail: beatriz.zamonel@unesp.br.

Bruno Ferracini de Oliveira: É graduando em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus São José do Rio Preto. Bolsista da CAPES - Programa Residência Pedagógica em 2020/2021. E-mail: bruno.ferracini@unesp.br.

Carla Marilla Caldeirani Lino: Mestre em Ensino e Processos Formativos, Universidade Estadual Paulista (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa Formação de Professores e Ensino de Matemática da UNESP de Ilha Solteira. Docente da rede estadual e da rede privada do estado do Mato Grosso do Sul, na cidade de Três Lagoas. Correio eletrônico: carlamarillaa@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5098-0957.

Carolina Yumi Lemos Ferreira Graciolli: Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), campus Rio Claro. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita

Filho" (UNESP), campus Rio Claro, e Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), campus Guaratinguetá.

Daniel Lauri Costa Weber: É licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto. Foi bolsista CAPES - Programa Residência Pedagógica em 2020. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/5161804942220879. E-mail: daniel.weber@unesp.br.

Daniela Zanardo Rossetto: Mestre em Ensino e Processos Formativos, Universidade Estadual Paulista (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa Formação de Professores e Ensino de Matemática da UNESP de Ilha Solteira. Correio eletrônico: dzanardorossetto@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6635-6964.

Deise Aparecida Peralta: Doutora pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da FC/UNESP. Mestra pelo Programa de Pós-Graduação em Psicologia do Desenvolvimento e Aprendizagem da FC/UNESP. Licenciada em Matemática pelo IBILCE/UNESP. Professora do Departamento de Matemática da FEIS/UNESP; credenciada no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da FC/UNESP. É coordenadora do Grupo de Pesquisa em Currículo: Estudos, Práticas e Avaliação (GEPAC). Ilha Solteira, São Paulo, Brasil. E-mail: deise.peralta@unesp.br.

Diego Henrique Faustino Carriel: É licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto. Foi bolsista CAPES - PIBID de 2018 a 2020. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/0541979798689457. E-mail: diego.hf.carriel @unesp.br.

Geisca Irena Moura: Possui graduação em Bacharelado em Farmácia e Bioquímica pelo Centro Universitário de Votuporanga - UNIFEV (2009). Atualmente é aluna do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - IBILCE, São José do Rio Preto. Integrante e bolsista CAPES do Residência Pedagógica de Matemática da mesma instituição. Foi bolsista de Iniciação Científica do CNPq. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/887140972 6861012. E-mail: geisca.moura@unesp.br.

Giovana Aparecida Bertolucci: Mestre em Ensino e Processos Formativos, Universidade Estadual Paulista (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa Formação de Professores e Ensino de Matemática da UNESP de Ilha Solteira. Docente da Secretaria Municipal de

Educação do Município de Novo Horizonte, SP. Correio Eletrônico: giovana.aparecida@unesp.br; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6942-4993.

Harryson Júnio Lessa Gonçalves: Livre-docente em Didática e Currículo pela FEIS/UNESP. Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Mestre em educação e pedagogo pela Universidade de Brasília (UnB). Professor Associado da FEIS/UNESP; credenciado no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da FC/UNESP e no Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da FEIS/UNESP. É coordenador do Grupo de Pesquisa em Currículo: Estudos, Práticas e Avaliação (GEPAC). Ilha Solteira, São Paulo, Brasil. E-mail: harryson.lessa@unesp.br.

Hudson Martins Rodrigues: É licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto. Foi bolsista CAPES - PIBID de 2018 a 2020. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/2167267758096596. E-mail: hudson_jst@hotmail.com.

Igor Micheletto Martins: Licenciado em Ciências Biológicas pela Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) – Câmpus Ilha Solteira (FEIS/UNESP). Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto (IBILCE/UNESP). Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da UNESP – Câmpus de Bauru (FC/UNESP). É membro do Grupo de Pesquisa em Currículo: Estudos, Práticas e Avaliação (GEPAC). Bauru, São Paulo, Brasil. E-mail: igor.micheletto@unesp.br.

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho: Doutor em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professor do Departamento de Matemática da UNESP. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da UNESP. Membro do Grupo de Pesquisa Formação de Professores e Ensino de Matemática da UNESP. Correio eletrônico: inocencio.balieiro@unesp.br; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4012-959X.

Jaqueline Aparecida dos Santos Alves: É licencianda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto. Integrante do Programa Residência Pedagógica - CAPES. E-mail: jaqueline.aparecida@unesp.br. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/7748816985068575.

Laís Cera de Souza: É licenciada em Matemática e bacharel em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto. Foi bolsista CAPES - Programa Residência Pedagógica de 2018 a 2020. Atualmente atua como educadora na Escola Maria Peregrina em São José do Rio Preto. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/4166371841953996. E-mail: lais.cera@unesp.br

Lara Martins Barbosa: Doutoranda em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (IGCE - UNESP - Campus Rio Claro) e mestre pelo mesmo programa. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). É membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e desenvolve estudos relacionados ao uso de tecnologias na Educação Matemática, Geometria Fractal, Pensamento Computacional e Pensamento Diferencial.

Mara Andréa Alves Pereira Ribeiro: É licenciada em Ciências Físicas e Biológicas com Habilitação Plena em Matemática pela Faculdades Integradas de Votuporanga (1993). Docente na Escola de Ensino Integral Profª Amira Homsi Chalella desde 2015. Supervisora do programa PIBID Interdisciplinar – UNESP/IBILCE de março a dezembro de 2014. Preceptora do programa Residência Pedagógica – Matemática UNESP/IBILCE – 2020-2022. E-mail: m.a.a.pereira@hotmail.com. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/2156442883171750.

Marcelo de Carvalho Borba: Natural do Rio de Janeiro, Licenciado em Matemática pela UFRJ, mestre em Educação Matemática pela UNESP, Rio Claro, SP, e doutor nessa mesma área pela Cornell University, Estados Unidos. Em 2005 se tornou livre docente em Educação Matemática. É professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, SP. Coordenada o Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), desenvolve pesquisas nas áreas de EaD online, Modelagem, Tecnologias Digitais, Vídeos e Metodologia de Pesquisa Qualitativa. É colaborador do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciência e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências (REAMEC). É coordenador de Rede de pesquisa no projeto Capes-Print. Desde 2011 é Editor Associado (Co-Editor) do ZDM, Berlim, Alemanha. É coordenador da coleção de livros Tendências em Educação Matemática. Durante a Pandemia ministrou palestras (Lives) voltadas para público nacional e internacional, com destaque para conferência de abertura do PME-44, Tailândia-Virtual. É coordenador da Área de Pós-Graduação em Ensino na CAPES (2018-2022). É bolsista produtividade do CNPq, nível 1A.

Maria Aparecida Viggiani Bicudo: Professora Titular (aposentada) de Filosofia da Educação, UNESP, IGCE, Campus de Rio Claro. Pesquisadora 1-A do CNPq. Presidente da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos (www.sepq.org.br).

Mariana Bego: é graduanda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus São José do Rio Preto. Integrante do Programa Residência Pedagógica - CAPES. E-mail: m.bego@unesp.br. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/9273695359844954.

Matheus Pereira Secco: É graduando em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto. Bolsista CAPES - Programa Residência Pedagógica em 2020/2021. Currículo lattes: http://lattes.cnpq.br/9500519786542041. E-mail: matheus.secco@unesp.br.

Maurício Rosa: Possui graduação em Matemática Licenciatura Plena pela Universidade Luterana do Brasil – ULBRA – Canoas (RS) (2001/2), mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho- Unesp – Rio Claro (SP) (2004) e doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Unesp - Rio Claro (SP) (2008). Foi bolsista do programa de Doutorado com Estágio no Exterior - PDEE pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, sob o processo BEX – 3899/06-3, na London South Bank University – Londres (UK). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nas seguintes frentes: Tecnologias Digitais, Educação a Distância, Jogos Eletrônicos, Role Playing Game (RPG), Formação de Professores, Ensino de Cálculo. Coordenou o Grupo de Pesquisa @+ (AMAIIS- Ambientes-Matemáticos de Aprendizagem com a Inclusão da Informática na Sociedade) de março de 2008 a julho de 2014. Participa do grupo de pesquisa FEM (Fenomenologia e Educação Matemática – http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/6283479768168094), desde 2008. E atualmente participa de um projeto internacional com o Prof. Danyal Farsani sobre cognição corporifica com Tecnologias Digitais (Agência Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento do Chile ANID / PAI 77200008). Foi coordenador do Grupo de Trabalho (GT06) Educação Matemática: Novas Tecnologias e Educação a Distância da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), de 2009 a 2012 e voltou a coordenar esse grupo no período de 2018 a 2019. Foi 2º secretário da SBEM – Regional do Rio Grande do Sul de 2009 a 2012 e diretor dessa regional de 2012 a 2015. Atualmente, é terceiro secretário da Sociedade

Brasileira de Educação Matemática – SBEM (2019-2022) e editor da Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM). Atua como professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Ensino e Currículo, e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática dessa Universidade. E-mail: mauriciomatematica@gmail.com.

Nilton Silveira Domingues: Natural de Catanduva, SP. Fez Licenciatura em Matemática, Mestrado e Doutorado em Educação Matemática na UNESP de Rio Claro. É pesquisador associado do GPIMEM, UNESP. Investiga questões relacionadas ao uso de tecnologias no ensino de Matemática, focando no uso e produção de vídeos. Atuante em aulas no Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos, Ensino Superior e Educação a Distância.

Paola Gioccom Adami: É graduanda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus São José do Rio Preto. Integrante do Programa Residência Pedagógica - CAPES. E-mail: paola.adami@unesp.br. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/9994913936768995.

Paulo Eduardo Aquino da Silva: Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - IBILCE (2021). Atualmente é mestrando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - IBILCE. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/1037540456607145. E-mail: paulo.aquino@unesp.br.

Ricardo Mendes Grande: é bacharel em matemática, mestre em física-matemática, doutor em filosofia com pós-doutorado em filosofia da física quântica. E-mail: rekdinhopoetico@gmail.com.

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva: Professor assistente doutor da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto. Possui licenciatura plena em Matemática e mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). É doutor em Educação pela Western University, Canadá. É integrante do GPIMEM - Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da UNESP. Coordenador do Núcleo do programa Residência Pedagógica - Matemática no UNESP/IBILCE. Desenvolve pesquisas em Educação Matemática com foco em uso de tecnologias digitais, artes e formação de professores. E-mail: ricardo.scucuglia@unesp.br. ORCID: 0000-0002-5810-2259.

Rita de Cássia Idem: Licenciada em Ciências Exatas com Habilitação em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP/São Carlos, SP), mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP/Rio Claro, SP) e doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM – UNESP/Rio Claro, SP). Desenvolve estudos sobre uso de tecnologia digitais na formação docente, no ensino e na aprendizagem de Matemática, com ênfase em Geometria, Estudo de Padrões e Resolução de Problemas.

Rosicácia Florêncio Costa: Natural de Tangará da Serra, MT. Fez Licenciatura em Matemática e Especialização Lato Sensu no Ensino da Matemática pela Universidade Federal do Amazonas. Fez Especialização em Docência no Ensino Superior e Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática pela Universidade Estado de Mato Grosso (UNEMAT). É doutoranda Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, SP, onde é membro do GPIMEM. Pesquisa o uso das tecnologias digitais no Ensino e Aprendizagem da Matemática, com foco no uso e produção de vídeos digitais. Atualmente é professora efetiva do Estado de Mato Grosso – SEDUC, na "Escola Estadual Oscar Soares".

Stephanie Belazi: É graduanda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus São José do Rio Preto. Integrante do Programa Residência Pedagógica - CAPES. E-mail: stephanie.belazi@unesp.br. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/73639526 30834706.

Tatiane Sanchez Nespoli: Graduada em Licenciatura em Matemática pelo O Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (IBILCE - UNESP - Campus São José do Rio Preto). Realizou pesquisas sobre o uso de tecnologia digital no ensino de Cálculo Diferencial e Integral (quadratura, método da exaustão, conceito de limite e derivada) e Pensamento Computacional no ensino de Simetrias.

Thaynara Convento Bomfim: é graduanda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus São José do Rio Preto. Aluna de Iniciação Científica. E-mail: t.bomfim@unesp.br Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/8428460960427794.

Tiago Emanuel Klüber: Professor Associado do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, CCET, Unioeste, *campus* Cascavel. Doutor em Educação Científica e Tecnológica, pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC.

Vitória Mazzucca Fernandes: é graduanda em Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus São José do Rio Preto. Integrante do Programa Residência Pedagógica - CAPES. E-mail: vitoria.mazzucca-fernandes@unesp.br Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/1615875531942302.

A Editora Fi é especializada na editoração, publicação e divulgação de pesquisa acadêmica/científica das humanidades, sob acesso aberto, produzida em parceria das mais diversas instituições de ensino superior no Brasil. Conheça nosso catálogo e siga as páginas oficiais nas principais redes sociais para acompanhar novos lançamentos e eventos.

www.editorafi.org
contato@editorafi.org