Artes em Educação Matemática

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva (Org.)

Dentre as várias frases célebres de Vinicius de Moraes, uma chama atenção de modo especial: "A vida é a arte do encontro, embora haja tanto desencontro pela vida". O leitor poderá se espantar diante deste início de Prefácio e questionar algo como: mas não se trata de escritos dedicados à educação matemática? Vinicius? Poesia? À questões desta natureza é que cumpre frisar: a obra não trata de educação matemática, mas sim de propostas de vivência da educação matemática em forte diálogo com as artes. Dito isso, há de se reconhecer que essa coletânea é expressão do encontro entre matemáticas e artes, em sentido amplo. A partir deste eixo central, entretanto, notam-se ainda outros encontros: pesquisadores de diferentes Instituições de Ensino Superior; pesquisadores de diferentes gerações e nacionalidades; além de pesquisadores com temas e bases teóricas variadas. Conhecimento científico dos mais antigos, puderam os pesquisadores dedicados à matemática construir um campo específico de pesquisa e de formação docente. Os autores reunidos nesta obra confirmam esse fato e o traduzem ao seu modo, quando indicam que assuntos próprios desse campo podem (e devem) ser construídos a partir da música, pintura, jogo, literatura, cinema, arquitetura, vídeo, fotografia e teatro. Resta, então, convidar o leitor a atravessar os capítulos e promover, ele próprio, o encontro com os autores e suas reflexões.

Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos
Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

Educação Matemática

unesp

9 788556 966421

editora fi.org

Artes em Educação Matemática

Artes em Educação Matemática

Organizador:
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Diagramação: Marcelo A. S. Alves
Capa: Lucas Margoni
Arte de Capa: The 405 @the405 - www.thefourohfive.com

Série Processos Formativos – 6

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da (Org.)

Artes em Educação Matemática [recurso eletrônico] / Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva (Org.) -- Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2019.

285 p.

ISBN - 978-85-5696-642-1

Disponível em: http://www.editorafi.org

1. Filosofia; 2. Educação; 3. Pedagogia; 4. Matemáticca; 5. Artes; I. Título II. Série

CDD: 371

Índices para catálogo sistemático:
1. Professores, métodos e disciplinas 371

Sumário

Prefácio

Arte(s) do Encontro

Humberto Perinelli Neto [1]

Dentre as várias frases célebres de Vinicius de Moraes, uma chama atenção de modo especial: “A vida é a arte do encontro, embora haja tanto desencontro pela vida”.

O leitor poderá se espantar diante deste início de Prefácio e questionar algo como: mas não se trata de escritos dedicados à educação matemática? Vinicius? Poesia?

À questões desta natureza é que cumpre frisar: a obra não trata de educação matemática, mas sim de propostas de vivência da educação matemática em forte diálogo com as artes.

Dito isso, há de se reconhecer que essa coletânea é expressão do encontro entre matemáticas e artes, em sentido amplo. A partir deste eixo central, entretanto, notam-se ainda outros encontros: pesquisadores de diferentes Instituições de Ensino Superior; pesquisadores de diferentes gerações e nacionalidades; além de pesquisadores com temas e bases teóricas variadas.

Conhecimento científico dos mais antigos, puderam os pesquisadores dedicados à matemática construir um campo específico de pesquisa e de formação docente. Os autores reunidos nesta obra confirmam esse fato e o traduzem ao seu modo, quando indicam que assuntos próprios desse campo podem (e devem) ser construídos a partir da música, pintura, jogo, literatura, cinema, arquitetura, vídeo, fotografia e teatro.

---

[1] Unesp/Ibilce/São José do Rio Preto

O resultado desse encontro evidencia questão fundamental (não apenas para a educação matemática): o reconhecimento do valor da estética na construção de processos formativos.

De origem grega (*aisthetiké)*, estética aqui evoca sentido que lhe foi modernamente atribuído, pois não se trata de dizer idealmente do belo e do verdadeiro, mas da força e impacto construtivos advindos da catarse (e da possibilidade de deslocamento que inaugura), do efêmero (tratado em sua densidade temporal) e do assombro (enquanto força que surpreende). Assim, os textos agrupados envolvem grande modificação epistemológica, pois o conhecimento que expressam se baseia em termos como: experiência, sentidos, sensações, gosto, especulação e interpretação.

Na mesa das tradições, a opção é por Baudelaire e não por Platão, visto que o cotidiano é encarado como repleto de possibilidades, como sendo complexo e cujo entendimento requer razão e sensibilidade. Daí, os autores abrirem mão de pré-conceitos, ao lidarem com assuntos que partem da cultura popular (cordel, indígenas e quilombolas, por exemplo), passam pela indústria cultural (Thirty Seconds to Mars, de modo especial) e alcançam a alta cultura (Mondrian e Bach, entre outros). Desse movimento, resulta o aceite em desenhar o campo da educação matemática, esgarçando-o, por meio da acolhida da modernidade e da pluralidade que a constitui.

O enfrentamento desta trilha é possível, mediante a investigação de temas significativos e já instituídos. Isto porque, nos deparamos com a presença de estudos sobre currículo, composição de razões, performance matemática, frações, geometria plana e espacial, logaritmos, simetria, proporcionalidade, perspectiva e funções trigonométricas. Eles derivam de projetos de extensão, minicursos, dissertações, teses e atividades/propostas de ensino-aprendizagem.

Sempre fui à favor de coletâneas, reconhecendo sua importância e lugar específico que ocupa na produção acadêmica-científica, pelo valor do trabalho em grupo, a capacidade de diálogo e a possibilidade de construção de painéis compostos por miradas diversas... propósitos diferentes daquele que se pretende no livro autoral. Em tempos de modernidade liquida, portanto, de certa fluidez e desamparo sociais, dedicar-se à projeto coletivo, como fazem os autores aqui reunidos, significa conceber com ato político que merece ser destacado, pelo que comporta no sentido da *pólis*, ao deixar ecoar as muitas vozes que habitam a cidade.

Resta, então, convidar o leitor a atravessar os capítulos e promover, ele próprio, o encontro com os autores e suas reflexões.

Outono de 2019

Capítulo 1

Solving Artistic Puzzles in Mathematics Teaching

George Gadanidis [1]
Janette M. Hughes [2]
Maryam Koozehkanani [3]

Mathematics teaching appears to be easy: the teacher works through some examples, students apply the approaches in the examples to practice problems, and the teacher reviews some of the solutions to practice problems to ensure students understand. This is how many of us have learned mathematics in school. However, when we interview students who today still learn using this approach, their comments present an unflattering image of mathematics education. For example, here are some comments of grade 10 students from Canada (Gadanidis & Cummings, 2018):

> I used to like math. I understood it. But it got boring, doing the same thing over and over. At one point you're thinking, "I don't want to do this anymore." (...) You would get an equation and you would use it, but you didn't really know what it meant: you just used it because that's what you were told to do. (...) Everyone is just in their own desk, looking at their own work. (...) Like in a jail cell. (p. 2)

We have written previously about the need to offer students at least some opportunities where they do more than just the

[1] Western University

[2] University of Ontario Institute of Technology

[3] Western University

mechanics of mathematics, where they may experience aesthetic aspects of learning and doing mathematics and sense the pleasure of mathematical surprise and insight (Gadanidis, Borba, Hughes & Lacerda, 2016; Gadanidis, Clements & Yiu, 2018). For example, Papert (1978) has noted that mathematics teaching approaches tend to "exaggerate its logical face and devalue all connection with everything else in human experience," thus missing "mathematical pleasure and beauty" (p. 104). Likewise, Dienes comments that school mathematics is "not real," which Whitehead (1967) refers to as "inert" and Hewitt (1999) as "arbitrary." Brown, Collins and Duguid (1989) note that "Many of the activities students undertake are simply not the activities of practitioners and would not make sense or be endorsed by the cultures to which they are attributed" (p. 34). Sinclair and Watson (2001) observe that although many mathematics educators make references to the aesthetic appeal of mathematics, "Very few of them mention the possibility of students' aesthetic experience in mathematics learning" (p. 39). Root-Bernstein (1996) states, "Students rarely, if ever, are given any notion whatever of the aesthetic dimension or multiplicity of imagining possibilities of the sciences" (p. 62).

In our work, we have made the analogy between designing mathematics experiences that offer aesthetic components and designing "good stories". Boyd (2001) notes that good storytelling involves *solving artistic puzzles* of how to create situations where the audience experiences the pleasure of surprise and insight.

> Solving such artistic puzzles in mathematics pedagogy in ways that afford young children opportunities to engage with, to be surprised, and to gain insights into complex ideas of mathematics is not yet common in mathematics education, and it is not easy to do. (Gadanidis, Borba, Hughes & Lacerda, 2016, p. 237).

In this chapter we describe and then discuss two cases from our work, where we engaged in solving such artistic puzzles in mathematics teaching.

Case 1: Modelling civilization

At a recent symposium, a participant asked whether someone had a good approach for introducing the concept of exponential growth to high school students. This question triggered a memory of the first two authors working with the children's story, *Anno's Magic Seeds* (Anno, 1999). In this story, a Wizard offers Jack two magic seeds. The Wizard tells Jack that if he eats one of the seeds, he will not be hungry for a whole year, and, if he plants the other seed a plant would grow at the end of the year with two new seeds. Jack follows the Wizard's advice, and for a number of years he eats a seed, plans a seed, harvests two new seeds, eats a seed, plants a seed, and so on and on. Eventually, Jack has the idea of planting both seeds and finding something else to eat that year. The new seed pattern that emerges is surprising. Figure 1 shows how a group of K-6 teachers modelled the seeds pattern using a table and different graphical representations (where the red dots represent the seeds eaten by Jack).

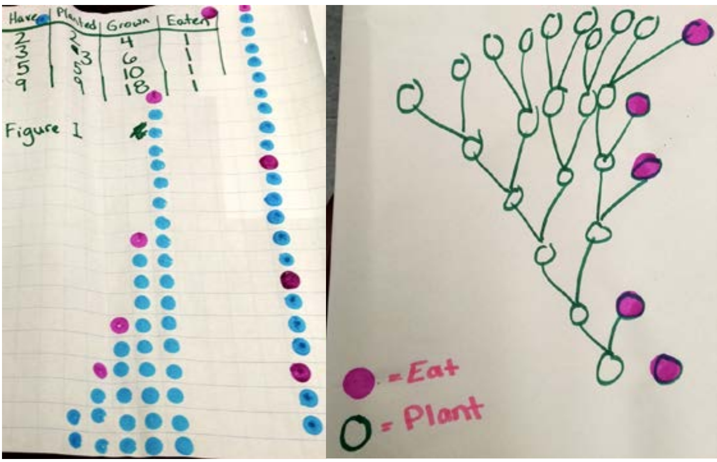


Figure 1. The seeds growth pattern.

Figure 2 shows the exponential growth pattern of 2, 4, 8, 16 and so forth, when looking at the differences between consecutive terms of the seeds produced.

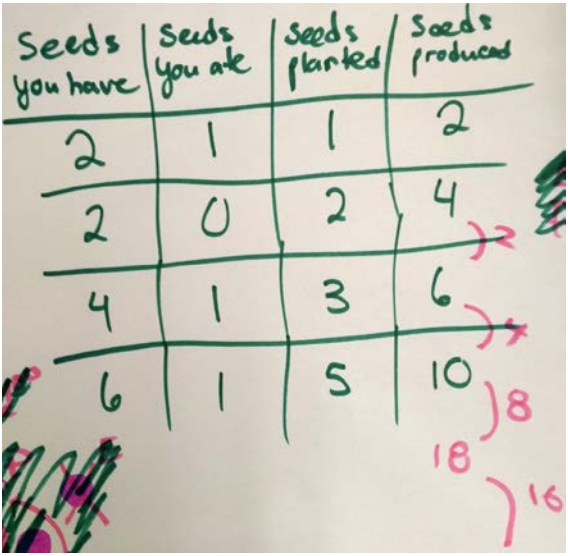


Figure 2. Noticing the exponential growth pattern.

Artistic Puzzle #1: How do we model exponential growth?

Anno, the author of *Anno's Magic Seeds*, offers a wonderful solution to the artistic puzzle of how to engage students with exponential growth, not only at the high school but, based on our work in elementary school classrooms, also for students as young as grades 2-3. For example, see videos from a grade 3 classroom at http://eduapps.ca/civilization/, where grade 3 students engage with these growth patterns.

With the initial repeating pattern of eat a seed and plant a seed, students typically interrupt the story and suggest that Jack should plant both seeds, to see what happens. What is quite surprising to students is that by just by not eating one seed, in one of the years, the pattern changes dramatically.

For elementary school teachers, who teach their students not only mathematics, the story offers opportunities to make meaningful cross-curricular connections between mathematical patterns and topics in other subjects. For example, in the postscript to his book, Anno offers the exponential growth patterns that lead to excess seeds as the impetus for civilization. He writes that "when their harvest produced more food than they needed, commerce and trade began, and calculating, and bargaining and other things we might think as typical of civilization. " The topic of civilization may be connected to social studies (Who pays to educate children, to build roads and other infrastructure, or to deal with natural disasters?) and to science and technology (What new structures and mechanisms are necessary and how are they best designed to manage the excess seeds?).

Artistic Puzzle #2: How can we model with code?

In our work we use computational modelling to represent mathematical patterns and relationships. For example, with students and young as grades 4, we have used Python to represent the patterns in Anno's story. Figure 3 shows the Python code that produces the first seeds growth pattern in the story.

```
# SEEDS GROWTH PATTERN #1
seeds = 2
eat = 1
for year in range(1,11):
    seeds = seeds - eat
    seeds = seeds * 2
    print (year, seeds)
```

```
1 2
2 2
3 2
4 2
5 2
6 2
7 2
8 2
9 2
10 2
```

Figure 3. Python code for first seed pattern.

In classroom settings, we typically develop the code in Figure 3 in a whole class setting. We then challenge students to edit the code (with as few edits as possible) so that it models the second (exponential) seeds growth pattern. Some students notice that moving the line of code "seeds = seeds – eat" from the start of the loop to the end of the loop (as shown in Figure 4) solves the puzzle.

```
# SEEDS GROWTH PATTERN #2
seeds = 2
eat = 1
for year in range(1,11):
    seeds = seeds * 2
    print (year, seeds)
    seeds = seeds - eat
```

```
1 4
2 6
3 10
4 18
5 34
6 66
7 130
8 258
9 514
10 1026
```

Figure 4. Python code for exponential growth seed pattern.

In older classrooms (such as grades 8-10) we also use Python environments with graphical output, such as Jupyter Notebook (see Figure 5).

```
# anno's magic seeds - v2

# initialize
y=2 # initial number of seeds
xArray = [] # first year
yArray = [] # seeds planted each year

# define growth pattern
for x in range (1,11):
    if x == 1:
        eaten = 0 # don't eat a seed in first year
    else:
        eaten = 1
    planted = y - eaten
    xArray.append(x) # append time-values to xArray
    yArray.append(planted) # append seeds-values to yArray
    y = 2*planted # seeds grown - eaten

# print seeds array
print("Number of seeds planted in each year:")
print(yArray)

# scatterpl
plt.scatter(xArray,yArray, color = 'g')

# plot labels
plt.xlabel('year')
plt.ylabel('seeds planted')
plt.title('Seeds Planted in Each Year')
plt.grid(True)

plt.show()
```

```
Number of seeds planted in each year:
[2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513]
```

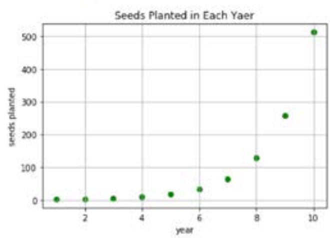


Figure 5. Graphical output with Jupyter Notebook.

As we have noted in Gadanidis & Cummings (2018), we are very interested in creating mathematics classroom experiences that engage students with the authentic computational modelling practices of scientists and professionals, which involve solving real world problems and building knowledge – to learn – through computational "conversation" and "interaction" with their field (Barba, 2014) "with and across a variety of representational technologies" (Wilkerson-Jerde, Gravel and Macrander, 2015, p. 396). "It's a source of power to do something and figure things out, in a dance between the computer and our thoughts" (Barba, 2016).

The above coding examples offer some initial solutions to the puzzle of meaningful computational modelling in the context of seed growth patterns. Using coding to model mathematics patterns as tables and as graphs give students the power to see small changes to the code represented dynamically. This affords better conceptual understanding, as well as opportunities risk-taking and exploration, not only of these patterns, but also of others that capture their imagination, as noted in Grade 10 student comments below:

> It's more like math in action. I like doing math with coding. You get to use math in different ways, to understand it more. You can't code it unless you really understand the math part. It feels like there's more space. You don't have to do it like everyone else. (Gadanidis & Cummings, 2018, p. 2).

Artistic Puzzle #3: How do we design a coding environment?

We are interested in using coding to model more complex relationships. The artistic puzzle may be stated as this question: If we could create a new coding environment to better capture the multi-faceted, ecological relationships that exist in civilization, what might this look like?

Two factors came into play as we considered solutions to this puzzle: First, exponential growth is not possible in real life due to finite resources, so we turned our attention to sustainable growth. Second, we needed an easy-to-picture and understand interconnected environment, so we settled on flowers and bees, which need one-another to survive, and also added birds as predators. Some birds eat seeds, some eat bees, and some eat both (such as blue jays. Consequently, we created a simulation of a flowers-bees-birds ecosystem (available at http://eduapps.ca/civilization/growth) controlled by code blocks that students combine and edit. Figure 6 shows an image of a code example and resulting output.

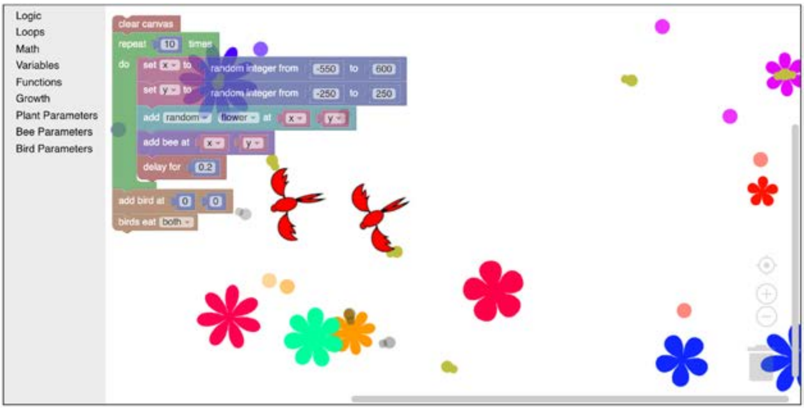


Figure 6. Flower, bees and birds simulation.

In one of the coded examples we provide with the environment, shows students and teachers how it is possible to create their own coding blocks (which may also be called functions, procedures or sub-routines). Figure 7 shows this capability in the case of plotting seeds/flowers along linear function paths. Figure 8 illustrates this capacity with a quadratic function pattern of seeds/flowers.

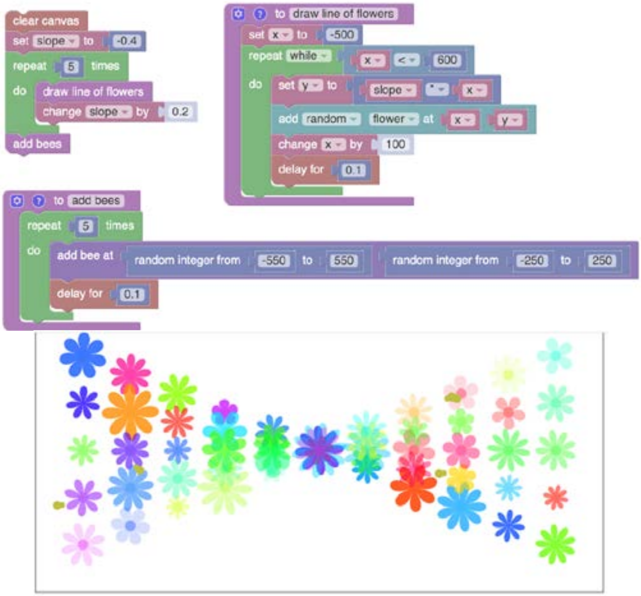


Figure 7. Using user-created coding blocks to plot linear functions.

Figure 8. Seeds/flowers along a quadratic function path.

The simulation/coding environment has various parameters (see example in Figure 9) available for students to use as code blocks. Students may also save and to share their code using the unique URL that is created through the save process.

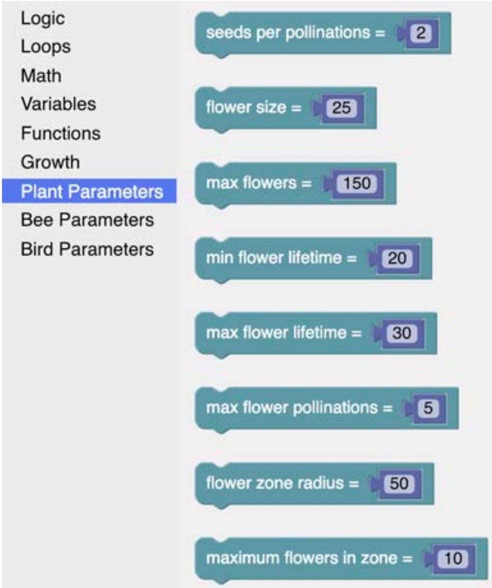
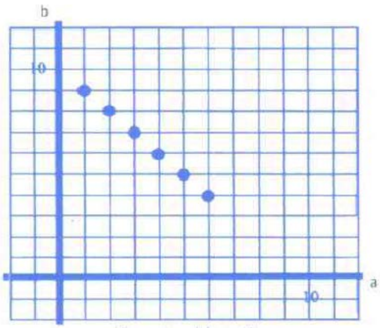


Figure 9. Parameters that may be used in code.

Case 2: From 2d to 3d

The third author was an observer in a math preservice teacher class in which she witnessed a surprising math activity: the "Making 10" activity. In this activity, teacher candidates were given the equation: __+__ = 10 and a die. They were asked to find the first number by rolling a die and then calculate the second number so that it satisfies the equation. They repeated this until all possibilities (that is, all the numbers 1 to 6 for the first number) were exhausted. Then, they took the pairs numbers (such as 1 and 9) and plotted them on a grid as ordered pairs (such as (1, 9)). Once plotted, the students discovered the points aligned to form a straight line and they experienced a mathematical surprise. The reason for their surprise was that they did not expect an organized result like a straight line from randomly generated numbers by rolling a die. The graph in Figure 10 displays points plotted with the constraint of __+__=10.



a+b=10

a	b
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4

Figure 10. The Making 10 activity graph.

Artistic Puzzle #1: Where is the surprise?

Having had the experience of creating pop-up cards, the idea (the artistic puzzle) came to the third author to design a pop-up story that also offered the surprise of "They line up!" How would this be possible? The pop-up story created was based on a Christmas scene, where a young girl, Sara, wanted to reach the top of the Christmas tree, to place a star. Sara used planks that had 7 sections and could fold to create steps. To parallel the Making 10 activity, the order of the planks was chosen randomly. However, this led to the puzzle that the steps did not line up, as shown in Figure 11.

Figure 11. The random folding steps do not line up.

Sara could place the steps in order, and they would line up (as shown in Figure 12), but an ordered set of steps that line up did not create a surprise.

Figure 12. The ordered folding steps do line up.

Where is the surprise of "They line up!" in the random pop-up staircase steps? The puzzle was solved by looking at the folding steps from the side. Using a flashlight, the shadows of the steps lined up (see Figure 13).

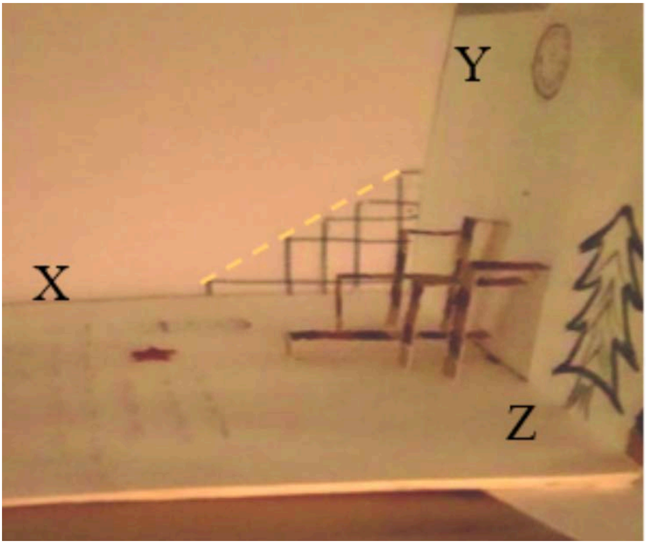


Figure 13. The random folding steps do line up.

This discovery, of seeing the steps line up as shadows, created a surprise for the third author. This surprise, however, is quite different from the surprise experienced in the Making 10 activity. In the Making 10 activity, the students are led to the "They line up!" surprise by the activity sequence. That is, the surprise is predetermined, and they have no choice but to notice that the randomly plotted points line up. On the other hand, the case of modelling the random points as 3-D steps, led initially to a state of confusion. Unlike the students, the surprise experienced in the pop-up steps was not predetermined, and the third author and had to "think hard" to discover it. The possibly also existed that it might never have been discovered.

Pedagogically, the pop-up steps experience is more similar to the next part of the Making 10 activity, where students have to think hard, experience some confusion and failure, as they try to design equations that would lead to graphs that point in different directions, or that may even curve.

Mathematically, seeing the random steps line up as shadows, leads to a realization that the 3-D steps were projected to a 2-D surface. The points in the Making 10 activity live on the X-Y 2-D plane. The points at the tips of the steps live in the X-Y-Z 3-D space. The shadow of the steps, where we can see then “line-up”, live on the X-Y plane.

Artistic Puzzle #2: Why do the folded steps line up?

What would happen to the steps if they were folded? Once folded, we can see that they make a "line" pattern. They all ended up at one row 7 units from the z-axis. Another surprise. All the steps have the different vertical sides, so it may not be expected that they would line up (see Figure 14).

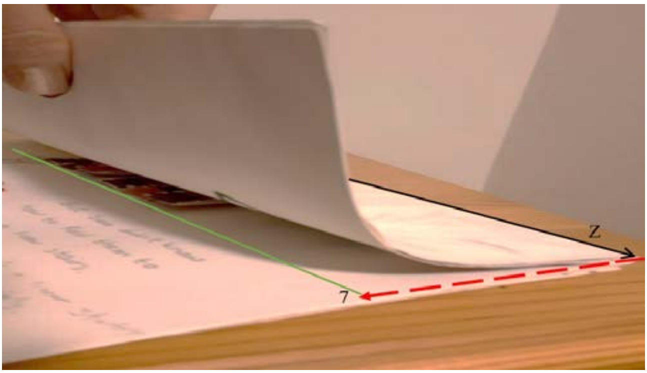


Figure 14. The folded steps line up.

Why do the folded steps line up? The vertical sides gradually fold from the place where the horizontal sides end and eventually align with the horizontal sides as it is shown in Figure 15. The horizontal and vertical sides form an imaginary line together and its length is the total length of the horizontal and vertical sides. Therefore, when all the steps fold together, all their vertical sides become aligned with their horizontal sides and make the imaginary lines with the total length of horizontal and vertical sides (see the red lines in Figure 16).

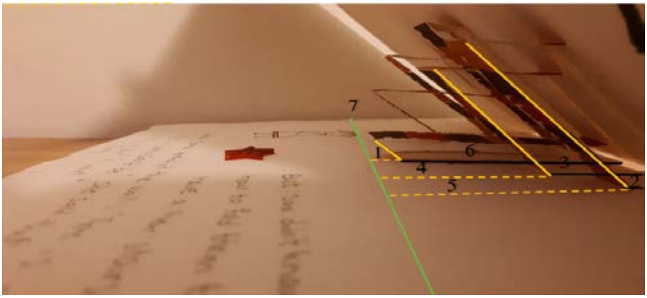


Figure 16. Why the folded steps line up.

On the other hand, the total length of the vertical and horizontal sides of each step are equal to 7. So, the length of all the lines formed by the vertical and horizontal sides should be 7. As a result, when the steps are folded, they will end up at the row 7 units far from the z-axis (see the green line in Figure 16). Given that 7 is the total number of the vertical and horizontal lengths, we can see the folding action as a physical sum operation which can add two numbers, which are the length of horizontal and vertical sides of a pop-up step and display the result where the step falls off.

Unlike the other shadow "line" described earlier, which was diagonal, this line is horizontal, and it represents the value of the constraint (that is, the constant sum of the horizontal and vertical components of the folding steps. Pedagogically, this surprising finding may lead to further attention on the constraint of the sum being 7, and its importance in creating mathematical patterns

Discussion: the role of “seeing-as”

Zwicky (2003) states that "metaphor is a species of understanding, a form of seeing-as. We see simultaneously, similarities and dissimilarities" (p. 4). "Seeing as" can illuminate resemblances between phenomena that create leaps and turning points in what we understand and how we understand it. Seeing-as requires the metaphorical process of making connections between apparently disparate phenomena or situations, which are not initially obvious, and which lead to a reorganization of knowledge.

It is interesting that both cases presented in this chapter arose from seeing-as situations. In the first case, the growth of seeds was seen through the lens of civilization and through the lens of computational modelling. In the second case, a random pattern lining up on a grid was seen as pop-up steps. These were not simple relationships between various perspectives, but opportunities to think hard, experience surprises, and discover new insights. Thinking metaphorically, searching for connections between different ideas, involves us in creating more robust schemas of what we know and understand. This is what we need to do as teachers to design and provide aesthetic mathematics experiences for students.

We end by noting that "seeing-as" is a crucial component in both the design of aesthetic experiences and in how students engage with aesthetic experiences. If we want to provide students with aesthetic experiences in mathematics, where they have opportunities to be make unexpected connections, to be surprised, and to gain new mathematical insights, then we as educators need to be willing to engage deeply in solving seeing-as artistic puzzles ourselves where we also have opportunities to make unexpected connections, to be surprised, and to gain new mathematical insights.

References

Anno, M. (1999). *Anno's Magic Seeds*. New York, NY: Penguin Putnam Books.

Barba, L.A. (2014). Computational thinking is computational learning. Keynote address at SciPy (Scientific Computing with Python) Conference, Austin, Texas. Video retrieved 5/01/17: http://lorenabarba.com/gallery/prof-barba-gave-keynote-at-scipy-2014

Barba, L.A. (2016). Computational Thinking: I do not think it means what you think it means. Blog post, retrieved 06/01/18: http://lorenabarba.com/blog/computational-thinking-i-do-not-think-it-means-what-you-think-it-means.

Boyd, B. (2001). The origin of stories: Horton hears a Who. Philosophy and Literature 25(2), 197-214.

Brown, J.S., Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher 18*(1), 32-42.

Gadanidis, G., Borba, M., Hughes, J. and Lacerda, H. (2016). Designing aesthetic experiences for young mathematicians: A model for mathematics education reform. *International Journal for Research in Mathematics Education, 6*(2), 225-244.

Gadanidis, G, Clements, E. & Yiu, C. (2018). Group theory, computational thinking and young mathematicians. *Mathematical Thinking and Learning 20*(1), 32-53.

Gadanidis, G. & Cummings, J. (2018). *Integrated mathematics + computer studies, Grade 10: Reforming secondary school mathematics education.* KNAER Mathematics Knowledge Network White Paper (April 2018). Toronto, ON: Fields Institute. Retrieved 19/02/2019 from http://mkn-rcm.ca/wp-content/uploads/2018/04/MKN-white-paper-April-2018.pdf

Hewitt, D. (1999). Arbitrary and Necessary Part 1: A Way of Viewing the Mathematics Curriculum. *For the Learning of Mathematics 19*(3), 2-9.

Papert, S. (1978). The mathematical unconscious. In J. Weshsler (Ed.) *On aesthetics in science.* Cambridge, MA: MIT Press.

Root-Bernstein, R. (1996). The sciences and arts share a common creative aesthetic. In *The elusive synthesis: Aesthetics and science (*pp.49-82). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sinclair, N. & Watson, A. (2001). Wonder, the rainbow, and the aesthetics of rare experiences. The aesthetic is relevant. For the Learning of Mathematics, 21(1): 25-32.

Sriraman, B. & Lesh, R. (2007). A conversation with Zoltan P. Dienes. *Mathematical Thinking and Learning* 9(1), 57-75.

Whitehead, A.N. (1967). *The Aims of Education and Other Essays*. New York: The Free Press.

Wilkerson-Jerde, M.H., Gravel, E.G. & Macrander, C.A. (2015). Exploring shifts in middle school learners' modeling activity while generating drawings, animations, and computational solutions of molecular diffusion. Journal of Science Education and Technology 24, 396-415.

Zwicky, J. (2003). *Wisdom & Metaphor*. Kntville, NS: Gaspereau Press.

Capítulo 2

Composição de razões em matemática e música: uma abordagem histórico/educacional

Oscar João Abdounur [1]

Neste capítulo, será considerado o potencial educacional de um operador matemático semânticamente e estruturalmente próximo a procedimentos presentes na música teórica ao longo da história. Trata-se da ideia de composição de razões, que a rigor não possui historicamente o *status* de um conceito matemático, mas ocorre tacitamente em tratados de matemática e de música teórica ao longo da história desde *Os Elementos* de Euclides, em que as evidências apontam ser o primeiro momento que se tem registro desta ideia.

A ideia de composição de razões apresenta-se como uma operação peculiar presente na estrutura dos conceitos matemáticos de razão e proporção desde o período clássico. Tal operação possui semelhança estrutural com a operação multiplicação, transformando-se ao longo de sua história de forma irregular até aproximar-se deste último conceito, o que é representativo do papel do contexto teórico-musical na aritmetização de razões. O caso considerado possui ainda potencial didático a serviço de evidenciar diferenças entre identidade e proporção, na medida em que a abordagem matemático-musical neste caso distancia semanticamente tais conceitos, tornando suas demarcações mais nítidas.

[1] Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, IME-USP – abdounur@ime.usp.br

O contexto matemático-musical permite elucidar diferenças semânticas existentes entre conceitos de composição e de multiplicação, assim como entre conceitos de proporção e de identidade, que praticamente desaparecem quando consideradas sob uma perspectiva puramente aritmética. Para tal, um pressuposto necessário é a correspondência entre razão matemática e intervalo musical, cujo fundamento histórico é determinante para a compreensão da abordagem aqui considerada.

A prática grega clássica de lidar com razões, realizada predominantemente até o período moderno, inseriu-se em uma importante tradição no tratamento de razões, passível de estimular o estabelecimento de analogias estruturais subjacentes a tais conceitos pertencentes a princípio, sob uma perspectiva classificativa atual, a diferentes campos do conhecimento. Tal abordagem promove uma compreensão de estruturas segundo as quais conceitos matemáticos foram tratados e, reciprocamente, uma compreensão da maneira aparentemente sem sentido -- se desconsiderada tal abordagem -- em que tais conceitos matemáticos foram manipulados por um longo período de tempo antes de atingir a estrutura atual.

A consciência dessas práticas possibilita a aquisição de uma atitude flexível em relação às estruturas existentes anteriormente ao enfrentar problemas em geral, bem como de uma ferramenta a serviço da resolução de problemas e de modo geral da heurística matemática. A abordagem considerada também auxilia na revelação, por meio de conceitos simples tais como razões matemáticas e proporções, processos epistemológicos envolvidos na construção de novas teorias matemáticas, como por exemplo o de tomar emprestadas estruturas de teorias análogas pré-existentes para então se desenvolverem de maneira autônoma em seu novo contexto, adaptando-se aos problemas práticos os quais essas novas teorias passam a enfrentar ao longo do seu desenvolvimento.

Para melhor compreender tais reflexões, considera-se primeiramente a introdução de alguns aspectos históricos dos conceitos de razão e de proporção matemáticas, bem como do operador que chamaremos de composição de razões matemáticas em contextos matemático-musicais, assim como de estruturas correspondentes em que a composição faz sentido, para então considerar exemplos da prática de composição no monocórdio, assim como aspectos didático-epistemológicos subjacentes a tal prática.

Composição de razões/composição de intervalos musicais: considerações históricas

Matemática e música possuem vínculos desde a Antiguidade. No conhecido experimento de Pitágoras com o monocórdio, que estabelece correspondência entre intervalos musicais e razões matemáticas de uma corda, relacionou-se, sob uma perspectiva aritmética, consonâncias musicais a razões matemáticas simples, de modo que aos intervalos musicais de oitava, de quinta e de quarta, subjaziam razões matemáticas 1:2, 2:3 e 3:4, respectivamente. A descoberta de Pitágoras com o experimento do monocórdio lança luz sobre inúmeras discussões no âmbito da música teórica tendo por fundamento os conceitos matemáticos de razão e de proporção.

É plausível que, por razões culturais, matemáticos gregos juntamente com seus contemporâneos e predecessores, tenham concebido razões matemáticas como generalização de intervalos musicais e de maneira mais ampla, teorias da razões e proporções matemáticas como generalização da música, na medida em que propriedades de cordas e comparações entre tons, assim como cálculos relacionados a tais magnitudes através dos conceitos de razão e proporção, consistiam em uma importante parte da matemática desde os pitagóricos até Euclides (ABDOUNUR, 2012; GRATTAN-GUINNESS, 1996).

O estabelecimento de tal vínculo levanta ainda questões referentes a teorias matemáticas subjacentes às manipulações com razões matemáticas desde a Antiguidade até o final da Idade Média, tanto em contextos matemáticos como em contextos teórico-musicais. A influência tanto de problemas teóricos quanto práticos confrontados pela música ao longo de sua história possibilita à historiografia da matemática, bem como à educação matemática, uma consciência epistemológica mais ampla do desenvolvimento dos conceitos de razão e de proporção matemática.

Tal consciência dá subsídios, por exemplo, à criação de contextos que esclareçam diferenças entre conceitos relacionados e/ou resultantes de razões e proporções, tais como as que existem entre composição e multiplicação, identidade e proporção dentre outros pares, diferenças estas mais difíceis à percepção, quando tais conceitos são abordados, por exemplo, apenas em contextos aritméticos.

Há diversos temas acerca da relação entre matemática e música, e em particular, entre razões matemáticas e intervalos musicais, passíveis de ser explorados em educação matemática. Aqui concentra-se nesta característica intrigante da estrutura originalmente associada a razões e proporções matemáticas, a saber, o conceito de composição de razão, embora este nunca tenha tido o *status* de um termo técnico em matemática (SYLLA, 1984). Tal operador manifestou-se tacitamente em contextos envolvendo razões e proporções matemáticas desde o período clássico até o século XVII, aproximando-se finalmente do conceito aritmético de multiplicação.

A mudança estrutural ocorre de teorias envolvendo concepções de operações semanticamente vinculadas a intervalos musicais contíguos para teorias admitindo a composição de razões de forma irrestrita - multiplicação - com um caráter essencialmente aritmético, que inclui por exemplo, a aproximação semântica entre razão e número. Uma questão desafiadora neste contexto seria como abordar, do ponto de vista didático, tal mudança epistemológica no desenvolvimento histórico do conceito de razão matemática, de tal forma a criar-se um domínio em que tal diferença se manifeste mais claramente do que em domínios puramente aritméticos.

Quando se observa que tal estrutura transitória, com a qual razões matemáticas foram parcial e irreversivelmente munidas durante um longo período, deriva de contextos musicais e que a composição não faz sentido fora de tais contextos, é razoável considerar a música como cenário para abordar tais diferenças, uma vez que em tal cenário se destaca a estrutura original vinculada ao conceito de razão. Antes de introduzir aspectos educacionais de tal tema, considera-se aqui alguns antecedentes históricos da composição de razões.

Indicadores de diferentes teorias ligadas ao conceito de razão são encontrados associados a questões como a restrição de Euclides na operação de composição com razões presentes nas definições 9 e 10 do Livro V, bem como na proposição 23 do Livro VI (HEATH, 1956). Tais operações consistiam na composição de razões do tipo a: b com b: c para produzir a: c, o que permite a repetição recursiva deste processo com c:d e assim por diante (ABDOUNUR, 2012).

Com fortes afinidades musicais, esta operação exigia, em geral, que, dada uma seqüência de razões matemáticas a serem compostas, o segundo termo de uma razão fosse igual ao primeiro termo da razão subsequente. Matematicamente falando, não há razão para operar-se desta maneira e provavelmente isto não ocorreria desta forma sem uma remissão ao seu significado musical, a saber, a composição (agrupamento) de intervalos musicais contíguos.

Por exemplo, (2:3)(3:4)::(1:2) é estruturalmente equivalente à composição musical do intervalo musical de quinta com o de quarta para gerar um intervalo musical de oitava. Sob tal perspectiva, o experimento de Pitágoras parece fornecer a princípio dois resultados importantes, cujas implicações didático-epistemológicas tentaremos apontar em seguida.

O primeiro resultado e mais geral é que razões matemáticas subjazem a intervalos musicais. Além disso, tal experimento também significa, mais especificamente, que a composição de razões matemáticas explica a composição de intervalos musicais contíguos, e talvez, devido a este vínculo, a composição de razões matemáticas em contexto euclidiano é tratada desta maneira. Tal diferença possui potencial para despertar interesse merecendo ainda atenção em contextos educacionais.

A partir de tais considerações, propõe-se explorar em contextos didático-pedagógicos estes dois entendimentos diferentes e complementares do conceito de razão, um geométrico-musical em que razão consiste em uma comparação entre grandezas homogêneas (dois comprimentos, duas notas, etc) e não possui proximidade semântica com número e outro, em que razão se identifica semanticamente com o conceito de número, passível de ser multiplicado da mesma forma com que os números são multiplicados. Para tornar clara tal mudança epistemológica presente no desenvolvimento histórico do conceito de razão, faz-se uso de contextos musicais.

A composição de razões matemáticas e de intervalos musicais no monocórdio

Em seguida, são descritos alguns problemas envolvendo razões e proporções matemáticas no monocórdio, a partir dos quais se estabelece reflexões acerca das implicações educacionais de atividades envolvendo matemática e música. De modo geral, ao reproduzir uma situação histórica, tais atividades reproduzem direta ou indiretamente estruturas presentes simultaneamente em matemática e em música, criando circunstâncias que propiciem experiências de similaridade entre esquemas por trás das situações originais e reconstruídas.

As situações apresentadas a seguir consistem basicamente de compor intervalos/razões por meio do monocórdio, onde a composição no sentido euclidiano não se coloca na mesma categoria da multiplicação, embora o primeiro apresente semelhanças estruturais com o segundo. Tanto diferenças quanto semelhanças entre composição e multiplicação em contextos musical e aritmético, respectivamente, tornam-se evidentes e melhor compreendidas com auxílio de uma reconstrução enriquecida do experimento do monocórdio.

Tal reconstrução pode ocasionar o interesse pela matemática por meio da música e vice-versa, capacidade esta que não apenas estimula a relação entre duas áreas e as habilidades relacionadas, mas também exige habilidades matemáticas em contextos musicais e habilidades musicais em contextos matemáticos por meio de um arranjo simples envolvendo conceitos elementares.

Estas atividades exigem inicialmente, no caso de alunos não familiarizados com música, a experiência com a percepção musical especialmente de intervalos tais como oitava, quinta e quarta – as consonâncias perfeitas --, pressuposto para as atividades com o monocórdio. Após tal familiarização, é importante a reprodução do experimento de Pitágoras, identificando tais consonâncias perfeitas no monocórdio, cujas razões matemáticas correspondentes são 1: 2, 2: 3 e 3: 4.

Envolvendo conceitos matemáticos e musicais, pode-se considerar alguns problemas no monocórdio, tais como:

- Seja L o comprimento que produz uma determinada nota no monocórdio. Qual é o comprimento de corda necessário para produzir uma altura, que resulta da elevação do tom original por uma oitava e uma quinta, seguindo-se da descida de dois intervalos de quarta? Ouça o tom resultante no monocordado e compare com o tom obtido no piano. Comente.
- Seja *do* a nota correspondente ao comprimento L. Qual é a nota obtida pelo comprimento 32L/27? Indique, em termos de superposição de quartas, quintas e oitavas, os sucessivos passos para obter esta nota. Ao subir uma quarta a partir de uma nota dada,

quais são a nota e o comprimento obtidos? Ouça a nota resultante no monocórdio comparando-a com a nota obtida no piano.

Tais problemas em particular, talvez por exigirem simultaneamente aptidões musicais e matemáticas, podem despertar a curiosidade de estudantes que, a princípio, se interessem exclusivamente por matemática ou por música. Dependendo do potencial de cada aluno, pode-se resolver esse tipo de problema encontrando o intervalo musical e verificando a composição de razões que o produz ou encontrando a combinação de razões matemáticas que, quando combinadas, fornecem tal intervalo, verificando-o em seguida.

Estes problemas oferecem ainda a oportunidade não apenas de vivenciar, talvez inconscientemente, a composição de razões matemáticas, mas também de simular operações com razões em contextos musicais gregos e medievais, tendo como elementos operacionais básicos as consonâncias perfeitas, cujas razões discretas subjacentes 1: 2, 2: 3 e 3: 4 não possuem relação categórica com números, mas são meros instrumentos de comparação.

Para ilustrar esses pontos, comenta-se questões relacionadas à solução desses problemas. Limita-se ainda a discussão a algumas abordagens do primeiro problema, bem como questões levantadas como consequência. Neste caso, as soluções passaram basicamente de uma abordagem geométrica para uma aritmética.

Na abordagem de problemas desta natureza, familiariza-se o aluno inicialmente, com intervalos e composição de intervalos musicais/razões matemáticas no monocórdio. Tal experiência permite compor intervalos musicais contíguos/razões matemáticas, em que a segunda magnitude da primeira razão matemática coincide com a primeira magnitude da segunda razão - razões do tipo a:b com b:c - que é o que se observa no monocórdio durante a familiarização. Pode-se neste caso trabalhar com grupos de diferentes tendências, a fim de não somente obter diferentes tipos de interpretações dos problemas, mas também de avaliar o potencial diversificado de cada grupo, uma vez que os problemas tratados exigem pelo menos, habilidades matemático e musicais.

Pode-se solicitar inicialmente, que se resolva o problema utilizando uma régua com apenas quatro divisões e um compasso. Depois de visualizar como as composições ocorrem no monocórdio, há basicamente duas tendências na resolução do problema: uma tendência é fazer o cálculo transferindo sempre as razões matemáticas para a corda e dividindo a corda em tantas partes quanto o denominador da razão em questão, levando-se depois o número de partes presentes no numerador - no caso de 2: 3, duas partes da corda previamente dividida em 3 partes - que corresponde à composição no sentido clássico. Uma outra tendência possível é encontrar a nota resultante - no caso a nota lá - tentando verificar tal resultado ao compor as razões matemáticas 1: 2, 2: 3 e decompondo as razões 3: 4 duas vezes, como no primeiro caso.

Em geral, pode-se ainda encontrar por percepção musical a parte da corda que, quando tocada, resulta na nota lá sem saber precisamente a que razão matemática ou nota tal ponto ou nota corresponda. Então, pode-se resolver o procedimento como na obtenção das consonâncias, compondo-se adequadamente as razões correspondentes para obter a nota em questão, utilizando-se no caso de régua e compasso para construir triângulos semelhantes, a fim de dividir um segmento em 2, 3 e 4 partes, o que resultaria em diferentes soluções. Aqui caberiam, por exemplo, perguntas relacionadas a alterações no resultado ao mudar a ordem do procedimento, o que não é difícil descobrir do ponto de vista musical, uma vez que a composição não é senão a "adição" e a "subtração" de intervalos musicais.

Tal interpretação torna a comutatividade dessa operação intuitiva, assim como mostra também, até certo ponto, como o contexto musical pode elucidar o significado de tal propriedade na estrutura da razão. Estes problemas também fornecem um contexto adequado para refletir sobre como se pode compor intervalos musicais, quando se sabe apenas os comprimentos das cordas, cuja razão fornece cada intervalo, ainda sem régua métrica.

Neste caso, cabe-se tentar adaptar por tentativa e erro o primeiro termo da segunda razão ao segundo termo do primeiro, tomando razões equivalentes ao segundo termo expressas como múltiplos de suas duas grandezas originais. Uma solução musical também caberia aqui, por exemplo, tentando ouvir os intervalos definidos por cada par de cordas cantando suas composições e, às vezes, mantendo o resultado parcial em um teclado para manter a afinação.

É possível neste caso, confirmar o resultado musicalmente, às vezes, passo a passo, outras vezes no final da operação, com base na experiência musical inicial com intervalos e consonâncias. Pode-se fazer isso quase automaticamente, verificando subsequentemente o comprimento da corda que corresponde à altura descoberta. Para realizar tal operação, é sempre possível encontrar a quarta proporção "musical", na medida em que em cada passo tem-se uma razão de referência e o primeiro termo de uma segunda razão que fornece a nota mais grave sobre a qual o intervalo de referência deve ser transladado.

Tal situação também fornece um contexto adequado para questionar como se pode compor intervalos musicais, quando se sabe apenas os comprimentos das cordas cuja razão fornece cada intervalo. Novamente sem régua métrica. Aqui também caberiam soluções mistas para encontrar por meio da audição a razão provável, a partir da qual se pode inferir acerca do fator pelo qual é necessário multiplicar ambos os fatores da segunda razão. Em todos os casos, pode-se fazer uso de um par proporcional de cordas, que não são iguais, mas que possuem alguma propriedade que as torna similares de alguma forma ao primeiro par.

Esta percepção de similaridade realizável pela audição é um ponto que eventualmente pode evidenciar a diferenciação entre proporcionalidade e igualdade, uma diferença que desaparece quando se enfrentra o problema com uma abordagem puramente aritmética fazendo uso por exemplo de uma régua métrica. A vantagem da abordagem musical em comparação com a aritmética consiste no fato de que a primeira fornece a intuição, baseada em uma habilidade perceptiva, de que ambos os pares de magnitudes não são iguais, mas que possuem um atributo comum, que é musicalmente o intervalo definido por eles, percepções estas que desaparecem em uma abordagem puramente aritmética.

O contexto mencionado possibilita ainda comentários que evidenciam a sentido do conceito de razão no sentido clássico, tais como o fato de que tais intervalos não são iguais, mas de que um é como se fosse o outro, linguagem condizente com aquela presente nos Elementos de Euclides. A racionalização de tal ideia pode ser refinada, quando não apenas as versões harmônicas, mas também melódicas de uma mesma razão são fornecidas, na medida em que a consciência logarítmica de intervalo musical pode ser traduzida por meio do conceito de proporção entre razões no fato de que as notas caminham uma mesma distância, o que também endossa o conceito de razão no sentido euclidiano diferenciando-o daquele de fração.

Uma outra questão decorrente consistiria em como proceder para compor *a:b* com *c:d,* quando não há inteiro m tal que *mc = a*. Quando se lida apenas com grandezas geométricas, tal questão não ocorre, já que se pode sempre adaptar diretamente uma magnitude a outra, mas isso não ocorreria com números inteiros a serem adaptados um ao outro fazendo uso de múltiplos inteiros. Neste caso, deve-se multiplicar o numerador e o denominador de ambas as razões, resultando como fatores c e b, respectivamente, que ao fazer a composição original proporcional a (ac: bc).(bc: bd) :: ac: bd, a conforma ao sentido clássico pressuposto para a composição. Baseando-se, até certo ponto, em tentativa e erro feita antes com grandezas geométricas, tenta-se agora fazer algo análogo com o uso do Múltiplo Mínimo Comum entre b e c. Neste caso, a composição das razões pode ser realizada com intervalos, isto é, a partir de um intervalo determinado com uma nota mais grave, pode-se construir o intervalo correspondente equivalente - razão proporcional – pelo ouvido e sentindo o mesmo 'crescimento' de intervalo.

Os comentários e questões mencionados acima sobre a solução do primeiro problema refletem parcialmente como se pode fornecer um ambiente adequado para vivenciar o sentido geométrico-musical de razões, introduzindo essa abordagem antes de recorrer à régua métrica.

Tais problemas podem ser repetidos permitindo o uso da regra métrica e gradualmente razões matemáticas e composição de razões equiparam-se a números decimais e multiplicação de números decimais respectivamente, diminuindo assim a ênfase na diferenciação entre identidade e proporcionalidade.

Assim, possíveis restrições aos problemas por exemplo nos instrumentos fornecidos para suas soluções -- compasso, régua não métrica, régua métrica, instrumentos -- tornam-se mais interessantes, na medida em que induzem a reproduzir a maneira com que distintas tradições lidaram com razões ao longo da história. Estas restrições proporcionam significados diferentes à razão e proporção, podendo-se levar a operar por vezes com a composição e outras vezes com multiplicação. Tal arranjo enriquecido prova ser útil não apenas para ilustrar a importância da razão como um meio de comparação, mas também e mais importante para fornecer um contexto para praticar a diferenciação entre composição e multiplicação, bem como entre proporcionalmente e identidade dentro de uma situação prática significativa.

Aspectos didático-epistemológicos

Além da diferença entre composição e multiplicação, há outras diferenças no contexto da aritmetização de razões, que se tornam transparentes pelo uso do arranjo mencionado anteriormente, como aquela entre identidade e proporção. Em Euclides, a ideia de igualdade de proporções não é natural quanto a dos números ou de grandezas. Tal maneira de estabelecer relações entre razões ganha maior significado quando se considera, que no monocórdio, por exemplo, do-sol e la-mi são os mesmos intervalos - neste caso, de quinta - mas que eles não são iguais, na medida em que este último é uma sexta acima do primeiro, ou até mesmo, que do - sol 'é como' la - mi. Neste caso, a identidade pode ser abordada na dinâmica de ensino/aprendizagem, enfatizando a distinção entre identidade e proporção em contextos matemáticos/musicais, onde tais diferenças se tornam mais claras quando visíveis e "audíveis".

Os problemas e o contexto mencionado também encorajam a percepção de tal diferença, na medida em que se pode pode ouvir os intervalos fornecidos por razões como 9:12 e 12:16 - ambos são intervalos de quarta, isto é, os mesmos intervalos, mas suas respectivas razões não são iguais - que são proporcionais, mas que não são idênticos. Isso elucida, pelo uso da matemática e da música, as diferenças e semelhanças entre os dois conceitos, o que aborda o entendimento das identificações de *razão* e *fração* e de *proporção* e *igualdade*. Isto abre ainda outras possibilidades para a exploração de tais conceitos em ambos os contextos. Por exemplo, pode-se encontrar a quarta proporcional e deduzir qual é a nota associada ou reciprocamente, dado um intervalo, pode-se descobrir a nota que produzirá o mesmo intervalo dado uma determinado nota mais grave: ambas as situações lidam com magnitudes proporcionais em matemática e contextos musicais simultaneamente. A consciência do procedimento epistemológico subjacente a essa dinâmica não é um pressuposto ou um fim, o que é realmente importante é que se vivencie tal situação e, assim, se estabeleça uma referência com a qual se possa vincular a compreensão de outras situações envolvendo tais conceitos. Da mesma forma, a experiência permitirá desapegar-se de conceitos associados em princípio a áreas fixas.

O contexto de ensino/aprendizagem mencionado acima, bem como a longa história de razões e proporções mostram que, dentro do amplo campo semântico associado a tais conceitos, o conceito de razão teve um papel importante como veículo para se comparar diferentes contextos por meio de proporções, isto é, analogias. Neste sentido, a proposição de que 3:2 corresponde a um intervalo de quinta, bem como a de que os intervalos de quartas são proporcionais, significam que esses dois conceitos pertencentes a campos matemáticos e/ou musicais podem ser comparados entre si por meios da razão de números e intervalo entre notas por meio de proporções. Nesse sentido, é possível vivenciar que a proposição geométrica/musical A: B :: C: D é semanticamente distinta, mas estruturalmente similar à proposição aritmética A/B = C/D, assim como os casos correspondentes em que as razões não são proporcionais e frações não são iguais.

Reciprocamente, fazendo uso do monocórdio, razões e proporções podem ser vistas como instrumentos para avaliar o grau de similaridade entre diferentes contextos. Tal dispositivo também possibilita a compreensão da distinção categórica entre razão e proporção - às vezes mal interpretada -, na medida em que a razão se torna claramente vista como uma comparação envolvendo duas magnitudes do mesmo tipo, enquanto que a proporção ocorre nas situações mencionadas como uma proposição lógica, a qual se pode atribuir um valor ou como uma ferramenta para tornar uma proposição verdadeira. No caso, tal diferença pode ser vivenciada por meio da questão acerca da plausibilidade da igualdade entre dois intervalos ou da proporção entre duas razões. As diferenças entre estes dois conceitos matemáticos tornam-se melhor demarcadas, quando entendidas no âmbito geométrico-musical, do que quando vistas em contextos puramente aritméticos.

Conclusões

A presente abordagem musical amplia a compreensão de razões e proporções em matemática, não apenas devido à sua contextualização histórico-cultural e sua característica interdisciplinar, mas também pelo papel que o pensamento analógico desempenha neste caso para a construção dos conceitos de razão e proporção matemáticas. Neste contexto, é razoável considerar que o entendimento da ideia de razão matemática se amplia na medida em que se vicencia suas diversas interpretações.

Ao longo da história da matemática e da música teórica, razões e proporções assumiram diferentes significados com naturezas discretas ou contínuas com respeitio à geometria, à música e/ou à aritmética. Dentre tais significados, a razão pode ser vista como uma ferramenta de comparação por meio de proporções, um intervalo musical, uma fração, um número, um invariante com relação à proporção, um fio comum entre contextos distintos com respeito a proporções, ao passo que proporções pode ser vista como um veículo para comparar razões, uma igualdade, uma relação, uma função, etc. Os contextos mencionados acima não somente fornecem um terreno fértil para a compreensão das diferenças sutis e semelhanças estruturais subjacentes à diversidade de interpretações associadas a razões e proporções, como também contribuem para construir e vivenciar de maneira mais ampla seus significados associados.

A percepção de esquemas comuns é uma maneira de construir conceitos que dizem respeito, em princípio, a diferentes áreas. Uma analogia ou metáfora pode reconfigurar uma situação de aprendizagem, possibilitando a compreensão de assuntos que escapam à intuição imediata, ou que possam parecer muito abstratos, como as interpretações associadas a razões e proporções, bem como a variedade de estruturas historicamente associadas a elas.

Referências

ABDOUNUR, O. J. Uma abordagem histórico/didática de analogias envolvendo razões e proporções em contexto musical: um ensaio preliminar. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 4, n. 3, p. 386-397, 2012.

GRATTAN-GUINNESS, I. Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid’s Elements: how did he handle them? *Historia Mathematica*, v. 23, n. 4, p. 355-375, 1996.

GRATTAN-GUINNESS, I. Alguns aspectos negligenciados na compreensão e ensino de números e sistemas numéricos. *Zetetiké*, v. 7, n. 11, p. 9-27, 1999.

HEATH, T. L. (Ed.) *The thirteen books of Euclid‘s Elements:* translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. New York: Dover Publications, 1956. v. 2.

SYLLA, E. Compounding ratios: Bradwardine, Oresme, and the first edition of Newton’s Principia. *In*: MENDELSOHN, E. *Transformation and tradition in the sciences:* essays in honor of I. Bernard Cohen. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. p. 11-43.

Capítulo 3

Gödel, Escher, Bach. Três nomes e apenas duas questões para celebrar os quarenta anos de um *emaranhamento de gênios:* À memória de S. W. Hawking

Ricardo Mendes Grande [1]

Introdução

Utilizaremos, em nosso trabalho, a edição de vinte anos de aniversário de *Gödel, Escher Bach* e, a título de praticidade, escreveremos apenas GEB para nos referirmos ao livro de Hofstadter. Também fomos inspirados pelo ótimo livro de Rudy Rucker (1995), *Infinity and the Mind*, que levanta questões semelhantes àquelas que visamos discutir. A nossa motivação para escrever este artigo se deveu à seguinte passagem do livro de Hofstadter:

> One could suggest, for instance, the reality is itself nothing but one very complicated formal system. Its symbols do not move around on paper, but rather in a three dimensional vacum (space); they are elementar parcicles of everything is composed (...) The 'typographical rules' are the laws of physics (...) the theorems of this grand formal system are the possible configuration of particles at diferent times (...) The sole axiom is

[1] Bacharel em matemática, mestre em física-matemática, doutor em filosofia com concentração em lógica com pós-doutorado em filosofia (com concentração em física quântica). rekdinhopoetico@gmail.com

> (or perhaps, *was*) the original configuration of all the particles at the 'beginning of the time' (Hofstadter, 2000, p. 54).

Colocamos, então, duas questões:

i. O mundo (o universo, a realidade) é um sistema formal? De outro modo: é possível interpretá-lo como um sistema formal?
ii. É possível alcançar todo o nosso raciocínio por meio de sistemas formais?

Antes de nos determos nessas duas questões, falemos um pouco do livro em si. A resposta para a segunda pergunta pode nos parecer mais óbvia, mas retornaremos a ela no fim do texto.

1. Os três gênios

Gödel, Escher e Bach? Qual a relação entre o trabalho do maior lógico do século XX, os desenhos de Escher e a música de Bach? A resposta é a autorreferência presente em muitas das peças de Bach, desenhos de Escher e na demonstração do teorema da incompletude de Gödel.

O excelente livro de Douglas R. Hofstadter é uma obra prima e deveria servir de *base* para qualquer livro de divulgação científica de alto nível. Utilizemos o termo *alto nível*, porque acreditamos que um livro de popularização da ciência não deva ser constituído de um mero recorte de fatos escritos em uma linguagem cuja simplificação acabe comprometendo o conteúdo da mensagem. GEB não é o que podemos chamar de livro de popularização da ciência, salvo o caso de termos um público formalmente educado, o que está muito distante de ser a nossa realidade em que a educação corre diversos riscos a todos os momentos.

GEB é um livro rico em *insights*, histórias curiosas a respeito de Bach, ilustrações maravilhosas e inúmeras metáforas riquíssimas sobre a autorreferência que envolvem ilustrações, zen budismo e diálogos muito divertidos entre personagens curiosos como uma tartaruga, um caranguejo e Aquiles, dentre outros. Não visamos analisar o livro, a sua história, estrutura, impacto ou fazer algum tipo de resenha, i.e., nos deteremos apenas nas duas questões supracitadas. Entendemos GEB como um texto cujo *mote* principal é o teorema de Gödel, suas consequências e possíveis interpretações, tendo Bach e Escher como pano de fundo para a articulação de sua *glosa*.

1.1 Gödel

Navegar é preciso, viver não é preciso – F. Pessoa

Kurt Gödel nasceu em 28 de abril de 1906 na cidade de Brno, localizada hoje na República Tcheca e faleceu em 14 de janeiro 1978 em Princeton nos Estados Unidos. Foi, sem dúvida, um dos maiores nomes da lógica da história, uma pessoa que tem o seu lugar reservado no panteão dos grandes lógicos ao lado de Aristóteles, Frege, Russell e Leibniz. Todavia, o seu comportamento e a sua vida não foram tão lógicos e precisos quanto o seu trabalho. Gödel morreu de inanição devido à sua preocupação paranoica com a possibilidade de ser vítima de envenenamento. Ele só se alimentava daquilo que fosse preparado por sua esposa Adele. Em um breve relato biográfico, Hintikka nos diz que: "Ele sofria repetidamente de depressão, paranoia, hipocondria e foi hospitalizado mais do que uma vez. Ele não acreditava nos médicos e era frequentemente tratado por problemas físicos. Quando Adele foi hospitalizada em 1977, a paranoia de Kurt tirou vantagem disso. Ele recusou tratamento médico e mesmo a ajuda de amigos" (Hintikka, p. 8, 2000).

Existem, aliás, inúmeras histórias curiosas a respeito do grande lógico e, em geral, menos trágicas, sendo algumas delas ligadas ao físico Albert Einstein, um dos seus grandes amigos. Deixamos ao leitor interessado em biografias, o clássico livro de

Wang[2] (1996), *A logical journey – From Gödel to philosophy*. Como não é de nosso interesse elaborar um relato biográfico do lógico, sendo apenas o trabalho de Gödel referente aos seus teoremas de incompletude a parte relevante para o nosso artigo, não nos alongaremos nessa brevíssima introdução. Os teoremas de incompletude de Gödel foram publicados originalmente em 1931 em alemão em seu famoso artigo *Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* no periódico *Monatshefte für Mathematic und Physic* (v. 38 pp. 173-198). Entretanto, utilizamos a tradução de Meltzer para o Inglês publicada pela Dover com a excelente introdução de Braithwaite (Gödel, 1992).

1.2 Bach

Johann Sebastian Bach foi um músico alemão dotado de uma capacidade absurda para compor obras polifônicas, sendo a *fuga* um dos seus estilos favoritos. A sua última obra é chamada de “A Arte da Fuga”, a qual é, sem dúvida, uma obra de arte do mais alto nível já produzido. A última peça da arte da fuga é o *Contrapunctus XIV*, uma fuga inacabada, interrompida abruptamente no compasso 239, curiosamente após serem utilizadas as notas si bemol (B), lá (A), dó (C) e si bequadro (H) como contraponto nos compassos 235-237. Carl Phillip Emanuel Bach escreveu (Hofstadter, 2000, p. 80 – ver a figura 1) https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Philipp_Emanuel_Bach a seguinte nota no manuscrito original da peça de seu pai, Bach: *"Über dieser Fuge, wo der Nahme B A C H im Contrasubject angebracht worden, ist der Verfasser gestorben."*, que pode ser traduzida do seguinte modo: “sobre esta fuga, onde o nome B A C H foi introduzido como contrassujeito, o seu compositor morre”.

[2]Existem vários livros sobre a vida e a obra de Gödel, os quais variam de narrativas a respeito da vida do lógico, como o livro de Rebecca Goldstein (2008), a textos com abordagens originais e pouco biográficas, como o de Chaitin, da Costa e Doria (2011).

Temos um caso curioso de autorreferência em que o próprio autor a *encontra* metaforicamente em sua obra. Atualmente não se utiliza a letra H nos manuais de música, mas apenas A(lá), B (si), C (dó), D (ré), E (mi), F(fá), G (sol) e o sinal "#" para o bequadro, além dos demais símbolos para denotar o sustenido, bemol, etc.

Figura 1 - *Contrapunctus XIV*

Fonte https://en.wikipedia.org/wiki/The_Art_of_Fugue#/media/File:Bach-unfinishedfugue.jpg

Em muitas de suas obras polifônicas, Bach reproduz um tema em várias vozes paralelas. Em algumas ocasiões, o tema central é apenas repetido em uma segunda voz, mas em outras, tocado de modo mais lento ou mais rápido e há, inclusive, cânones do tipo "caranguejo" em que o tema é tocado do final para o começo em uma outra voz. Como se sabe, Bach compôs uma belíssima oferenda musical em homenagem ao rei Frederico II, também conhecido por *Frederico, o grande*. Houve um tempo em que os príncipes, reis e imperadores tinham uma educação científica e musical de alto nível, o que é algo que está muito longe da nossa realidade atual. O rei da Prússia era um bom compositor e grande apreciador da música de Bach e de seus filhos. Em 7 de Maio de 1747, J. S. Bach visitou o rei Frederico II (Hofstadter, 2000,

p. 3-10), improvisou em seus pianos e produziu algumas variações inspiradas em um tema sugerido pelo rei. Dessa visita surgiu a Oferenda Musical.

Em uma carta de 7 de Julho de 1747, Bach enviou ao rei uma cópia da versão acabada de sua Oferenda Musical com uma dedicatória (idem, p. 6). Na carta, o compositor se colocou como "o mais humilde e obediente servo". Inicialmente, não se sabe se o rei queria testar, desafiar ou, quem sabe, humilhar o compositor com um tema cuja harmonização para várias vozes fosse complicada. O que se sabe é que o resultado foi uma obra brilhante e que serve como fonte de estudos e inspiração para músicos de todas as gerações pós-barroca.

Um último exemplo que daremos é a *Invenção número 8 em Fá Maior do cravo bem temperado* (ver figura 2, na qual constam os vinte quatro primeiros compassos da peça). Temos uma peça para duas vozes de uma natureza curiosa. No segundo compasso, a segunda voz é introduzida e, curiosamente, no compasso 12 as vozes trocam as suas posições na peça e a segunda voz começa a tocar o tema principal, assumindo, então, o papel da primeira voz. Neste caso, o que se tem é uma *troca de lugar* do tema principal, o qual passa a ser tocado como melodia no *lugar* da harmonia.

Figura 2 – Invenção 8

Fonte: https://musescore.com/user/920366/scores/1015261

1.3 Escher

Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico holandês que ficou muito famoso devido aos seus desenhos (litografias, xilogravuras, e.g.) de forte inspiração matemática e que *representavam* paradoxos, ilusões de óptica, construções com duplas interpretações, etc. Escher foi um mestre da arte da simetria e dos traços matemáticos e o seu talento tem sido fonte de inspiração para muitos matemáticos, dentre eles, Roger Penrose em seu *O grande, o pequeno e a mente mumana* (Penrose, p. 43).

Um exemplo clássico da autorreferência nos desenhos de Escher é visto em uma de suas famosas litografias (autorretrato de 1935) em que a sua imagem é refletida em uma bola de cristal, desenho que reproduzimos do livro de Hofstadter (Hofstadter, 2000, p.14) – ver Figura 3.

Os trabalhos de Escher e Bach são utilizados como pontos de apoio e de modo metafórico em GEB e, por isso, não analisaremos as analogias, metáforas e diálogos elaborados por Hofstadter em seu livro e seguiremos apenas com o nosso objetivo. O tema do nosso artigo ecoa em um trabalho de Roger Penrose (1991), o seu livro provocativo *Emperor's new mind* (ENM), originalmente publicado em 1989, cuja fonte de inspiração foi, em parte, um artigo do filósofo Lucas (1961). Penrose teve o seu trabalho criticado por lógicos e cientistas da mais alta estirpe, dentre eles Feferman (2006) e Hawking (Penrose, 1997, pp. 171-174). Isso levou o matemático detentor da cátedra Rouse Ball em Oxford a escrever um novo livro, *Shadows of the mind* (Penrose, 1994), no qual utiliza as primeiras 210 páginas do livro para responder as principais críticas ao ENM. Retomaremos essa questão adiante e, no momento, basta sabermos em que consiste a ideia básica de Lucas e Penrose.

Penrose e Lucas acreditam que o teorema de Gödel possa ser utilizado para argumentar que a mente humana é, em alguma medida e em um sentido específico, superior a computadores por uma questão de princípio, no caso, teórica ou se preferir, lógica. O filósofo sugere:

> Gödel's theorem seems to me to prove that Mechanism is false, that is, that minds cannot be explained as machines. So also has it seemed to many other people: almost every mathematical logician I have put the matter to has confessed to similar thoughts, but has felt reluctant to commit himself definitely until he could see the whole argument set out, with all objections fully stated and properly met (Lucas, p. 112, 1961).

Antes de discutirmos o que Penrose pensa a respeito do teorema de Gödel, vejamos, mesmo que de modo informal e breve, o que é um sistema formal em lógica e o que nos dizem os dois teoremas de incompletude de Gödel.

Figura 3 – Autorretrato

Fonte: http://cfcul.fc.ul.pt/projectos/projecto_fisica.htm/index_2003_2007.htm

2. Sistemas formais – um resumo

Seremos breves e omitiremos a maior parte dos detalhes concernentes à parte técnica. Deixaremos, para o leitor interessado nas tecnicalidades, uma boa lista de referências.

2.1 Noções elementares.

Um sistema formal $\mathfrak{I}$ (ou uma *teoria formal*) é dado (a) por:

i. Um conjunto enumerável de símbolos $\mathcal{S}$. Chamaremos de expressão qualquer sequência finita de símbolos dessa coleção;

ii. Um subconjunto $\mathcal{W}$ de $\mathcal{S}$ chamado de *conjunto das expressões bem formadas* (*well formed formulas* ou *wffs*). Além disso, exigimos a existência de um procedimento efetivo (ver Enderton, 1972, 60-62) para decidir se uma dada expressão é uma *wff* ou não;

iii. Um subconjunto[3] $\mathcal{A}$ de $\mathcal{W}$ chamado de *conjunto de axiomas* de $\mathcal{S}$;

iv. Um conjunto finito de relações entre *wffs* chamadas de *relações ou regras de inferência.*

Uma prova em $\mathfrak{J}$ é uma sequência finita S_i de *wffs* em que cada S_j é um axioma ou obtida de *wffs* S_k anteriores por uma regra de inferência. Um teorema em $\mathfrak{J}$ é a última *wff* de uma prova. Embora haja um procedimento efetivo para se determinar se uma *wff* é um axioma ou não, isso não é necessariamente válido para um teorema em qualquer sistema ou teoria formal. No caso de haver tal procedimento, diremos que a teoria formal $\mathfrak{J}$ é *decidível,* caso contrário, que é *indecidível.*

Dizemos que uma teoria[4] é completa se para toda *wff* φ existir uma prova para φ ou para a sua negação $\sim \varphi$ na teoria (ou seja, em $\mathfrak{J}$). Quando existir uma prova para φ no sistema, escreveremos $\vdash_{\mathfrak{J}} \varphi$ (analogamente, escreveremos $\vdash_{\mathfrak{J}} \sim\varphi$ para a sua negação). Se Ambas φ e $\sim\varphi$ forem demonstráveis em $\mathfrak{J}$, diremos que o sistema é inconsistente. Claro que podemos estender a noção de demonstração em um sistema formal para o

---

[3]Exige-se também que haja um procedimento efetivo para decidir se uma dada *wff* é um axioma ou não do sistema- ver (Mendelsohn, 2015, p. 27).

[4]Para uma lógica, dizemos que é *completa* ou *semanticamente completa*, se todas as suas *wffs* φ *verdadeiras* forem demonstráveis. Escreveremos $\vDash_{\mathfrak{J}} \varphi$ *para* denotar que φ é verdadeira em $\mathfrak{J}$. Assim, uma lógica é completa quando se der a implicação: se $\vDash_{\mathfrak{J}} \varphi$, então, $\vdash_{\mathfrak{J}} \varphi$. Gödel demonstrou que a lógica de primeira ordem é semanticamente completa (Enderton, 1972, p. 128). Note que não definimos o significado de φ *ser uma sentença verdadeira em* $\mathfrak{J}$, visto envolver detalhes técnicos que estão além dos propósitos do nosso artigo. Conforme foi dito, deixaremos uma lista razoável de referências.

Indicamos, para uma abordagem informal da semântica da lógica de primeira ordem (Boolos & Burgess & Jeffrey, Chap. 10); para uma abordagem técnica, (Enderton, 1972, pp. 79-86). Um texto bastante didático em que o conceito de verdade em uma estrutura é muito bem trabalhado é (Mortari, 2016, p. 224-246). Para os cientistas da computação, recomendamos (De Souza, 2008, p. 158-174).

caso de, além dos axiomas do sistema, utilizarmos um conjunto Γ de *wffs* como hipóteses. Neste caso, escreveremos $\Gamma \vdash_{\mathfrak{T}} \varphi$.

A título de ilustração, o cálculo proposicional clássico (que denotaremos apenas por **CPC**) é decidível (Enderton, 1972, p. 61) e completo (Mendelsohn, 2016, p.35). Para os nossos propósitos, precisamos de um sistema formal mais rico que o do **CPC** e do qual falaremos agora de modo didático e muito simplificado. No caso, precisaremos falar da aritmética de Peano de primeira ordem. Indicamos (Enderton, 1972, p. 68), (Mendelsohn, 2015, pp. 47-48), (Shoenfield, 1967, pp. 9-23) e o livro de Ebbinghaus, Thomas e Flum (1994) para uma apresentação precisa e detalhada de uma linguagem de primeira ordem. Para a aritmética de Peano de primeira ordem, a nossa referência principal será (Smith, 2012, chap. 10).

O leitor não precisa ter um conhecimento aprofundado de lógica de primeira ordem para acompanhar a nossa argumentação. De uma maneira intuitiva, em uma linguagem de primeira ordem, há apenas objetos no escopo dos quantificadores, i.e., não se quantifica sobre propriedades de objetos, nem propriedades de propriedades de objetos, etc. Se escrevermos $(\exists x)P(x)$ (lê-se: *existe um x que satisfaz P*), a variável x se referirá a um objeto em nossa linguagem e P a um predicado (ou propriedade). Por exemplo, se P significar $ser\ par$, estaremos dizendo que existe um número que é par. Claro que é só uma ilustração e os lógicos e matemáticos estão interessados em propriedades menos triviais de números. Caso utilizássemos quantificadores para *quantificar propriedades*, a nossa linguagem não seria mais de primeira ordem.

Para que possamos desenvolver a nossa argumentação, é mister saber quais os símbolos que constituirão a nossa linguagem. No caso, ela consistirá de símbolos lógicos, de pontuação, símbolos para variáveis, além dos símbolos funcionais e para predicados. Como será necessário falar da aritmética dos números naturais, precisaremos também de símbolos específicos para ela. Os símbolos lógicos serão sete, no caso $\sim, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall$, que devem ser lidos, respectivamente como *não*, *e, ou, implica, se e somente se*, *existe, para todo*. Utilizaremos *parênteses* "(,)" e *colchetes* "[,]"como símbolos de pontuação. Em geral, só se utilizam os parênteses, mas como visamos facilitar a leitura das fórmulas, utilizaremos os colchetes também. As nossas variáveis serão denotadas, a princípio, por x, y, z (poderemos utilizar também $x_1, x_2, x_3, \dots y_1, y_2, y_3, \dots, z_1, z_2, z_3,$. ..); a rigor, temos uma coleção infinita e enumerável de símbolos. Predicados serão denotados por P, Q, R (poderemos utilizar $P_1, P_2, P_3 \dots Q_1, Q_2, Q_3 \dots, R_1, R_2, R_2 \dots$). Outros símbolos para variáveis e predicados serão introduzidos adiante, e.g., $Proof_{\mathfrak{J}}(,)$ para a denotar a demonstrabilidade, ou não, de uma determinada *wff* no sistema $\mathfrak{J}$.

Para a linguagem elementar da teoria dos números naturais, precisamos do símbolo de igualdade "$=$", do "0" para denotar uma constante, do símbolo funcional S para denotar o sucessor de um número e de dois símbolos funcionais para nos referirmos à adição e multiplicação de números, sendo eles, respectivamente, "$+$" e "$.$" . Claro que, para uma apresentação rigorosa do tema em discussão, precisaríamos de alguns grupos de axiomas lógicos, axiomas para a igualdade, para quantificadores, etc. – ver (Shoenfield, 1967, pp. 20-23). Todavia, apresentaremos os axiomas de Peano, que será o suficiente. Para uma discussão resumida da sintaxe e semântica da lógica de primeira ordem, recomendamos - mais uma vez - (Boolos & Burgess & Jeffrey, 2012, cap. 9 & 10).

Até aqui, a nossa apresentação não se deteve em questões semânticas de natureza alguma, i.e., na interpretação dos símbolos utilizados. Para o caso do **CPC**, e.g., se P e Q são variáveis proposicionais, é muito simples elaborar uma interpretação via *tabelas de verdade* para os conectivos lógicos $\sim, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Supondo que V se refira a *verdadeiro* e *F* a falso, temos:

P	Q	$\sim P$	$P \vee Q$	$P \& Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Para as linguagens de primeira ordem, a semântica é mais rica e sofisticada e remetemos o leitor às referências: (Enderton, 1972, p. 79-83) e (Shoenfield, 1967, Chap. 5), além do texto supracitado de Boolos (2012). E quanto à regra de inferência do quarto item do começo desta seção, a única regra que utilizaremos será *Modus Ponens*. No caso: de P e $P \rightarrow Q$ infira Q.

2.2 Axiomas da teoria dos números naturais

Podemos enunciar os axiomas utilizando as noções básicas de sistemas formais da seção anterior. São eles[5]:

P1. $(\forall x)[\sim(Sx = 0)]$
P2. $(\forall x)(\forall y)[(Sx = Sy) \rightarrow (x = y)]$
P3(i) $(\forall x)[x + 0 = x]$
P3(ii) $(\forall x(\forall y)[x + Sy = S(x + y)]$
P4.(i) $(\forall x)[x. 0 = 0]$
P4.(ii) $(\forall x(\forall y)[x. Sy = x. y + x]$
Esquema de Axioma da Indução:
P5. Para cada fórmula $P(x)$ com a variável livre x:

$$P(0) \rightarrow [((\forall x)P(x) \rightarrow P(Sx)) \rightarrow \forall y P(y)].$$

Quanto aos *termos* e *fórmulas* da teoria, é óbvio que seria necessário defini-los de modo explícito e detalhado em uma apresentação rigorosa do assunto, o que não está no escopo do nosso trabalho. Apenas deixaremos indicado como isso poderia ser feito.

[5]É costume apresentar os axiomas de Peano do seguinte modo: ***i. o é um número; ii. o sucessor de qualquer número é um número; iii. não há dois números com um mesmo sucessor; iv. o não é o sucessor de número algum; v. qualquer propriedade que pertença a o, e também ao sucessor de um número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números.*** Claro que, para os nossos propósitos, levando em consideração a formulação da aritmética em uma linguagem de primeira ordem, a apresentação que demos é padronizada.

Para os termos:

i. Todo símbolo de variável é um termo;
ii. Se r e s são termos, então, $S(r), r + s$ e $r.s$ são[6] termos;
iii. Uma cadeia de símbolos é um termo se e somente se puder ser obtida de aplicações de i. e ii.

Para as fórmulas bem formadas da nossa aritmética:

i. Se r e s são termos, então, $r = s$ é uma *wff;*
ii. Se A e B são *wffs*, então $\sim A, A\&B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ são *wffs;*
iii. Se u é símbolo de variável, $(\forall u)A(u)$ e $(\exists u)A(u)$ são *wffs;*
iv. Uma cadeia de símbolos é uma *wff* se e somente se puder ser obtida de aplicações de i. . ii. e iii.

Pensamos em seguir Penrose (Penrose, p. 116-119, 2003) em sua exposição didática e bastante heurística do teorema de Gödel, porém, achamos que faríamos mais justiça ao trabalho de Hofstadter se introduzíssemos algumas noções básicas de sistemas formais nesta seção. Para os nossos objetivos, acreditamos que o caminho que estamos seguindo é o mais adequado, apesar de nossa exposição não ser detalhada e rigorosa. Weyl (1949), por exemplo, elaborará uma apresentação bastante clara dos teoremas de Gödel no primeiro apêndice de seu *Philosophy of mathematics and natural sciences*, porém, não tão sucinta, o que faz com que a deixemos como referência apenas.

3. Os teoremas de Gödel

3.1 Autorrreferência

Chegamos ao ponto em que é mister falar da autorreferência no trabalho de Gödel, o elo entre os três gênios que dão nome ao

[6]Note que não utilizamos, anteriormente, as letras r e s no nosso vocabulário. Analogamente, para o caso das fórmulas, utilizaremos A e B para *wffs* e a letra u para uma variável.

livro que inspirou o nosso texto. O que discutiremos é um processo pelo qual se enumera as *wffs*, provas, axiomas, teoremas e os demais símbolos utilizados em uma teoria formal. Existem infinitas maneiras de se fazer isso e optamos por uma específica. Para evitar a circularidade, não haverá a ocorrência de zeros nos números associados aos símbolos à sua direita:

~ 1	$[11$	$z21$
$\vee 2$	$]12$	$x_1 22$
$\&3$	$S13$	$x_2 23$
$\rightarrow 4$	$+14$	$x_3 24$
$\leftrightarrow 5$	$.15$	$x_4 25$
$\exists 6$	$= 16$	$x_5 26$
$\forall 7$	017	$x_6 27$
$(8$	$x18$	$x_7 28$
$)9$	$y19$	$x_8 29$

Além das variáveis x, y, z, utilizaremos, a principio, x_1, x_2, x_3,..., etc.

O numeral 0 será usado para separar os símbolos. Por exemplo, o número associado à fórmula $(\forall x)[\sim(Sx = 0)]$ é: 8070180911010801301801601709012. Utilizaremos $g\{\}$ para nos referirmos ao *número de uma fórmula*, chamado de *Número de Gödel*. Assim, para o nosso exemplo,

$$g\{(\forall x)[\sim(Sx = 0)]\} = 8070180911010801301801601709012$$

As definições de termos e fórmulas têm a sua contrapartida óbvia nesse processo de numeração, por exemplo, as variáveis são numeradas a partir de 18, como se vê na tabela acima. Podemos definir a seguinte propriedade $T(w)$: i. se $w \geq 17$ e se não houver zeros na expansão de w, então, $T(w)$; ii. se $T(w)$ e $T(v)$, então[7], $T(13080w09)$, $T(w0140v), T(w0150v)$, iii. Nada mais é T.

[7]Note o seguinte, $g\{Sx\} = 130801809$, $g\{x + y\} = 18014019$, $g(x.y) = 18015019$. Para facilitar a compreensão, abusando da notação, para o leitor entender de modo imediato essa definição, $g\{Sx\} = \mathbf{13080}18\mathbf{09}$, $g\{x + y\} = 18\mathbf{0140}19$, $g(x.y) = 18\mathbf{0150}19$.

Claro que, se tivéssemos utilizado parênteses em $w + v$ e $w.v$, quando definimos as entidades chamadas de *termos* na seção anterior, teríamos diferentes números de Gödel para elas. Analogamente, podemos seguir com esse processo para as *wffs*, o que não faremos aqui, porém, assumiremos ser possível. Assumido isso, podemos codificar sequências de fórmulas. Por exemplo, separando os seus números de Gödel por dois numerais 0, i.e., uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$, seria codificada da seguinte maneira:

$$g\{A_1\}00g\{A_2\}00 \ldots 00g\{A_n\}$$

Ora, até aqui estamos indicando que é possível codificar os termos, *wffs*, demonstrações, etc. do nosso sistema formal. O *trabalho duro* e completo não caberia aqui e estaria fora do escopo da nossa proposta, assim, esperamos que o leitor se convença da possibilidade dessa codificação, podendo consultar os manuais técnicos ou o artigo original de Gödel, caso queira conhecer os detalhes a fundo. Aceito isso, podemos seguir com o nosso texto.

Suponha, então, que n seja o número de Gödel de uma *wff A* e que m seja o número de Gödel de uma prova para A em nosso sistema formal. Note que definimos *prova* para um sistema bastante simplificado em 3.1., mas a definição se estende naturalmente para sistemas formais mais sofisticados descritos em linguagens de primeira ordem, segunda ordem, etc. Criemos o predicado $Proof_{\mathfrak{J}}(m, n)$ que será válido quando o número de Gödel, $g\{S\} = m$, da sequência finita S de *wffs* $A_1, A_2 \ldots A_k$ codificar uma prova para A no sistema formal $\mathfrak{J}$, sendo n o número de Gödel de A, i.e., $g\{A\} = n$.

Podemos fazer a seguinte *tradução* agora: *A pode ser provada -ou demonstrada- no sistema formal* $\mathfrak{J}$ *se e somente se* $\exists m Proof_{\mathfrak{J}}(m, g\{A\})$. É fundamental que seja possível representar $Proof_{\mathfrak{J}}(m, g\{A\})$ no sistema formal. Caso contrário, a nossa argumentação terminaria aqui! Colocamos a questão: é possível construir uma *wff* G para a qual seja válida a equivalência: $G \leftrightarrow \sim\exists m Proof_{\mathfrak{J}}(m, g\{G\})$? A resposta é sim e o trabalho de construir tal fórmula ocupa parte do artigo de Gödel (1992). Primeiramente, o lógico teve que mostrar que $Proof_{\mathfrak{J}}(m, g\{A\})$ poderia ser representando em seu sistema e, então, construir G, que chamaremos de *sentença de Gödel.*

Para uma exposição didática e simplificada, podemos seguir Hintikka (2000, p. 33) e dizer que o lema diagonal[8] de Cantor garante o seguinte: para cada fórmula de uma única variável $F[u]$ da teoria[9] elementar dos números existe um número $n = g\{F\}$ que é o número de Gödel de $F[g\{F\}]$ (na notação de Hintikka $F[\boldsymbol{n}]$, em que **n** é o numeral que representa *n*). Podemos ler $F[g\{F\}]$ da seguinte maneira: *o número de Gödel da fórmula F tem a propriedade F.* Aceito isso e o fato de $Proof_{\mathfrak{J}}(,)$ poder ser representada no sistema formal, basta aplicar o lema de Cantor à fórmula de uma única variável livre n, $\sim\exists m Proof_{\mathfrak{J}}(m, n)$. O lema garante a existência de uma fórmula G tal que: $G \leftrightarrow \sim\exists m Proof_{\mathfrak{J}}(m, g\{G\})$. Conforme veremos, em seguida, o trabalho de Gödel garantirá a existência de sentenças indecidíveis em qualquer axiomatização consistente da teoria dos números naturais e que satisfaça a certos requisitos básicos. Encerramos, então, o tema da autorreferência, o elo entre os três gênios.

E antes de seguirmos, mais uma vez, é importante enfatizar que a nossa exposição é informal e que *o diabo mora nos detalhes*, os quais não são triviais. Para ilustrar o que queremos dizer, parafraseando Hofstadter, tudo parece simples quando dito da seguinte forma:

---

[8]Existe uma discussão sobre a utilização do lema de Cantor no trabalho de Gödel, porém, é irrelevante para a nossa finalidade adentrar nela. Penrose (2003, pp. 116-118), por exemplo, em sua exposição didática da construção de G (denotada por $A(k, k)$), nos dirá que “É um procedimento famoso, conhecido por procedimento diagonal de Cantor”. A abordagem do matemático inglês é via máquinas de Turing e, para uma discussão detalhada nessa direção, indicamos o ótimo livro de Epstein e Carnielli (2005, pp. 279-280). Sugerimos também (Rucker, 1995, pp. 283-285)

[9]Qual teoria dos números? Hintikka está se referindo à aritmética de Robinson, um sistema *mais pobre* do que o que estamos utilizando.

"All consistent axiomatic formulations of number theory include undecidable propositions" Hofstadter (2000, p. 17).

Porém, isso foi dito de outra forma na proposição VI do trabalho seminal de Gödel de 1931: "To every ω-consistent recursive class k of formulae there correspond recursive *class-signs r*, such that neither $vGenr$ nor $Neg(vGenr)$ belongs to Flg(k) (where v is the free variable of *r*" (idem, ibidem) e (Gödel, 1992, p. 57).

3.2 Os teoremas de Gödel

Comecemos com uma observação: um sistema formal $\mathfrak{J}$ é ω-inconsistente se ele contém uma fórmula $\varphi(x)$ de modo que são demonstráveis no sistema:

$$(\exists x)\varphi(x)$$
e
$$\sim\varphi(0), \sim\varphi(1), \sim\varphi(2), \ldots$$

Se tal fórmula não existe, dizemos que o sistema é ω-consistente.

Primeiro teorema da incompletude[10]

Seja $\mathfrak{J}$ o sistema formal que utilizamos para descrever a aritmética de primeira ordem, i.e., $\mathfrak{J}$ inclui o aparato lógico da

[10]A propósito, a título de ilustração, o primeiro teorema de Gödel se aplica a um sistema *mais pobre* do que o nosso, no caso, à aritmética de Robinson **Q** – ver (Boolos & Burgess &Jeffrey, 2012, p. 284). Os axiomas de **Q** são (Smith, 2012, p. 55):

P0. $(\forall x)[\sim(x = 0) \rightarrow \exists y(y = Sx)]$

P1. $(\forall x)[\sim(Sx = 0)]$

P2. $(\forall x)(\forall y)[(Sx = Sy) \rightarrow (x = y)]$

P3(i) $(\forall x)[x + 0 = x]$

P3(ii) $(\forall x(\forall y)[x + Sy = S(x + y)]$

P4.(i) $(\forall x)[x.0 = 0]$

P4.(ii) $(\forall x(\forall y)[x.Sy = x.y + x]$

linguagem de primeira ordem (com axiomas para a igualdade também) e os axiomas da seção 3.2. Se $\mathfrak{J}$ for consistente, então existe uma *wff*, no caso a sentença G, que não é demonstrável em $\mathfrak{J}$. Para mostrar que a negação de G também não é demonstrável, é mister assumir a ω-consistência de $\mathfrak{J}$.

Suponha que G seja demonstrável. Sabemos que: $G \leftrightarrow \sim\exists m Proof_{\mathfrak{J}}(m, g\{G\})$. Assim, obviamente, se n é o número de Gödel da prova π de G, teremos a validade de $Proof_{\mathfrak{J}}(n, g\{G\})$. Sendo G demonstrável, temos também que: $\sim\exists m Proof_{\mathfrak{J}}(m, g\{G\})$, logo, uma contradição. Como o sistema é consistente por hipótese, segue que G é indemonstrável. Notemos que G é verdadeira ou falsa. No primeiro caso, é verdadeira e indemonstrável; no segundo, seria falsa e demonstrável. Como argumentamos, ela é indemonstrável, logo, vale o primeiro caso. Não nos deteremos nos argumentos ligados à impossibilidade de se provar a negação de G no sistema. Antes de enunciarmos o segundo teorema da incompletude, é importante fazer ressalvas sobre as condições a que o sistema formal deve satisfazer para que o primeiro teorema seja derivável nele. São elas:

i. O conjunto de axiomas e de regras de inferências de $\mathfrak{J}$ deve ser *efetivamente decidível* (ou seja, recursivo), i.e., deve haver um procedimento efetivo para decidir em um intervalo finito de tempo se uma determinada *wff* do sistema é um axioma ou não;
ii. $\mathfrak{J}$ deve estender o sistema formal da aritmética básica dos números naturais (i.e., a aritmética de Peano de primeira ordem);
iii. $\mathfrak{J}$ deve ser ω-consistente.

Segundo teorema da incompletude

Nas condições acima, um sistema $\mathfrak{J}$ não pode demonstrar a sua consistência.

Escreveremos[11] $Con(\mathfrak{I})$ para denotar *consistência de* $\mathfrak{I}$ (dito de outra forma, $\mathfrak{I}$ é consistente). O segundo teorema nos diz que não é possível provar a consistência do sistema $\mathfrak{I}$ descrito pelas condições acima a partir dele mesmo, i.e., *dentro dele*. Compreendida a natureza do primeiro teorema, é mais fácil se convencer do segundo. Deixamos, ao leitor interessado, a tarefa de refletir sobre a demonstração do segundo teorema. Grosso modo, formaliza-se dentro do sistema o seguinte argumento: se $\mathfrak{I}$ é consistente, então, G é demonstrável no sistema. Ora, se é válida a implicação $Con(\mathfrak{I}) \rightarrow G$, teremos, caso a teoria seja consistente, uma dedução de G . Isso, evidentemente, implicaria na inconsistência do sistema. Dito de outro modo, o segundo teorema se resume a:

i. $\mathfrak{I}$ prova[12] $Con(\mathfrak{I}) \rightarrow G$;
ii. Então, se $\mathfrak{I}$ é consistente, $\mathfrak{I}$ não prova $Con(\mathfrak{I})$, i.e., $\mathfrak{I}$ não prova a sua própria consistência.

4. Perguntas e respostas

Começamos o nosso artigo colocando duas questões:

i. O mundo (o universo, a realidade) é um sistema formal? De outro modo: é possível interpretá-lo como um sistema formal?
ii. É possível alcançar todo o nosso raciocínio por meio de sistemas formais?

4.1 Tese de Lucas-Penrose

Começaremos pela segunda pergunta e uma questão importante colocada por Lucas (1961) e retomada por Penrose (1996). É importante dizer que há inúmeros argumentos

---

[11]Se escrevermos a fórmula $\rho \equiv 0 = 1$, teremos que a $Con(\mathfrak{I})$ pode ser expressa pela seguinte fórmula:$Con(\mathfrak{I}) \equiv \forall y{\sim}Proof_{\mathfrak{I}}(y, g\{\rho\})$, sendo y o número de Gödel de uma prova, claro.

[12] $\mathfrak{I}$ prova, mais precisamente, $Con(\mathfrak{I}) \leftrightarrow G$.

convincentes contra as sugestões de Lucas e Penrose, sendo os de Feferman[13] (2006), os que consideramos mais relevantes. Todavia, vejamos brevemente em que consistem o argumentos de Lucas e Penrose que chamaremos de *Tese de Lucas-Penrose*.

Vimos, na subseção referente a Escher, a seguinte citação de Lucas:

> Gödel's theorem seems to me to prove that Mechanism is false, that is, that minds cannot be explained as machines. So also has it seemed to many other people: almost every mathematical logician I have put the matter to has confessed to similar thoughts, but has felt reluctant to commit himself definitely until he could see the whole argument set out, with all objections fully stated and properly met (Lucas, 1961, p. 112).

E continua afirmando que "Gödel's theorem states that in any consistent system which is strong enough to produce simple arithmetic there are formulae which cannot be proved-in-the-system, but which we can see to be true" (idem, ibidem).

Já Penrose[14] nos dirá que "o procedimento computacional não poderá, afinal de contas, compreender a totalidade do raciocínio matemático para decidir se determinadas computações não terminam, isto é, para estabelecer a veracidade de declarações π_1" Penrose (2003, p. 116). Apesar do matemático inglês argumentar diretamente a partir computações realizadas por máquinas de Turing, é importante deixar claro que a essência do argumento é a mesma.

Supondo fazer sentido a expressão "intuição matemática" ou "intuição humana" em nossa argumentação, podemos enunciar a tese de Lucas-Penrose, pensando em máquinas de Turing em vez

---

[13]Há também um artigo de Feferman que é bastante esclarecedor. Todavia, só conhecemos a sua versão on-line. https://math.stanford.edu/~feferman/papers/penrose.pdf

[14]No artigo on-line de Feferman da nota de rodapé anterior (p. 3), é discutida a formulação do teorema de Gödel em termos de máquinas de Turing e vários problemas ligados aos argumentos de Penrose.

de sistemas formais (o que é equivalente, aliás, visto toda *máquina provadora de teoremas poder ser identificada com um sistema formal* e vice-versa). Tese de Lucas-Penrose*: pelo primeiro teorema da incompletude de Gödel, sempre vai haver uma sentença G verdadeira, porém, indemonstrável por uma máquina (satisfeitos os requisitos mínimos pelo sistema formal). Todavia, a veracidade de G é acessível à intuição humana.* Esse argumento é gritantemente falacioso e envolto em muitos problemas e imprecisões, como foi apontado por muitos pesquisadores, dentre eles, Feferman (2006, pp. 146-148).

Colocado de maneira simples, para que exista a sentença G, o sistema formal deve ser consistente, porém, como uma pessoa poderia conhecer isso? “Saindo do sistema”? O que isso quer dizer[15]? Supondo que, em algum sentido, possamos falar da *consistência da mente humana*, como ela pode saber da sua própria consistência? E como interpretamos esse tipo de afirmação? O teorema de Gödel não prova a existência de sentenças absolutamente indemonstráveis, mas apenas que há uma sentença verdadeira, porém, indemonstrável em um sistema particular. Todavia, nada impede que tal sentença seja demonstrável por uma máquina em um outro sistema. Seria mais honesto e razoável comparar máquinas e homens não com relação a listas de teoremas impressos, mas quanto às suas habilidades de resolver problemas ou elaborar estratégias para isso. Antes de encerrarmos esta seção, mencionaremos duas citações de Turing que consideramos relevantes para a discussão, sendo a segunda relacionada aos teoremas de Gödel.

Por um lado, o gênio da computação nos diz que:

> Let us suppose we have set up a machine with certain initial instruction tables, so constructed that these tables might on

[15]Gentzen demonstrou a consistência da aritmética *saindo do sistema* no sentido de utilizar um determinado método de indução transfinita, mas isso já é algo que não vem ao caso e que *foge da questão*. Sugerimos o artigo on-line de Tait. http://home.uchicago.edu/~wwtx/Gentzen.original.pdf

> occasion, if good reason arose, modify those tables. One can imagine that after the machine bad been operating for some time, the instructions would have altered out of all recongition, but nevertheless still be such that one would have to admit that the machine was still doing very worthwhile calculations. Possibly it might still be getting results of the type desired when the machine was first set up, but in a much more eficiente manner. In such a case one would have to admit that the progress of the machine had not been foreseen when its original instructions were put int. It would be like a pupil who had learnt much from his máster, but had added much more by his own work. When this happens I feel that one is oblige to regard the machine as showing intelligence (Turing, 2013, p. 496).

Por outro lado, Turing nos diz "If a machine is expected to be infallible it cannot also be intelligent" (idem, p.497). A primeira citação nos remete ao seu famoso artigo de 1950 em que é discutido o *Jogo da Imitação*, conhecido por *Teste de Turing*. Ora, não podemos tirar as razões de Turing ao afirmar que uma máquina que possa se modificar nos pareça inteligente em certas ocasiões. Todavia, não é razoável esperar inteligência de um computador cuja forma operatória não produza erros e que tenha um *programa fixo e infalível* para tarefas específicas. Bem, não há incompatibilidade entre as citações, visto uma máquina que possa aprender não estar livre do ato de cometer erros. O que sustentamos é que nada impede que máquinas inteligentes surjam com o desenvolvimento subsequente da inteligência artificial e das técnicas de *machine learning*, desde que elas estejam sujeitas a algum tipo de *processo de evolução* e *aprendizado*. Quanto à tese de Lucas-Penrose, ela parece estar ultrapassada e, por isso, nos dirigiremos à outra pergunta desta subseção.

Para a encerrar esta parte, tiramos a seguinte citação de um texto de Deutsch (2002, p. 11): "There is every reason to believe that the brain is a universal classical computer". Infelizmente, ele não indica que razões seriam essas. A propósito, não conhecemos um único argumento razoável que sustente tal afirmação. Como argumentamos, os teoremas de Gödel não implicam o que Penrose e Lucas queriam que implicassem, mas nada do que foi dito sustenta (ou, ao menos indica) que o cérebro seja uma máquina de Turing universal.

4.2 It from *qubit*

Feynman (1982) escreveu um trabalho brilhante sobre a simulação de fenômenos físicos com computadores e isso invoca uma questão, a de que seria possível descrever o nosso universo como um computador quântico, como sugeriu Seth Lloyd (2013). David Deutsch (2002) escreveu um bom artigo intitulado de *It from qubit* inspirado no famoso texto de Wheeler (1989) em que aparece a expressão *it from bit*. Bits são abstrações, porém, *qubits* denotam sistemas físicos, ou melhor, sistemas quânticos de partículas em determinados estados. Os primeiros podem ser interpretados como casos particulares ou, melhor, manifestações dos segundos, i.e., "Bits, Boolean variables, and classical computation are all emergent or approximate properties of qubits, manifested mainly when they undergo decoherence" (Deutsch, 2002, p. 4). A questão a ser colocada é a seguinte: o universo seria constituído de informação e a nossa realidade seria uma simulação rodando em um grande computador, sendo as leis da física o software?

Cremos ser um mal entendido colocar a informação como uma espécie de entidade básica do Cosmos, visto o seu estatuto ontológico não ser o mesmo de partículas, campos ou algo que constitua ou participe da criação da matéria. Parece desarrazoado pensar em um universo desse tipo, pois, ele teria aparentes *problemas óbvios de hardware.*

Seria mais honesto perguntar se o universo é constituído de *qubits*. A resposta correta é NÃO! *Qubits* existem em determinadas circunstâncias controladas e isso nos parece óbvio, dada a dificuldade em se construir computadores quânticos. Deutsch, a respeito do *qubit*, nos diz o seguinte (tendo em mente a interpretação da mecânica de quântica de Everett):

> Qubits are unequivocally multiversal objects. This is how they are able to undergo continuous changes even though the outcome of measuring – or being – them is only ever one of a discrete set of possibilities.
> What we perceive to some degree of approximation as a world of single-valued variables is actually part of a larger reality in which the full answer to a yes-no question is never just yes or no, nor even both yes and no in parallel, but a quantum observable -- something that can be represented as a large Hermitian matrix. Is it really possible to conceive of the world, including ourselves, as being 'made of matrices' in this sense? (Deutsch, 2002, p. 13)

Obviamente, Deutsch não está sugerindo que os objetos matemáticos são entidades físicas que constituam (*ou estejam por aí em*) o nosso mundo, mas que podem ser vistos como ferramentas fundamentais para a descrição dele. Quanto aos "multiversal objects", isso surge da intepretação de "vários mundos" da mecânica quântica sugerida por Everett (1973) e adotada por Deutsch, DeWitt (1973) e muitos outros. Todavia, parece-nos claro que a tese de que o universo é constituído de *qubits* é desarrazoada. Um forte argumento contra ela nos é dado pelo próprio Deustch (2002, p. 14) ao citar universalidade[16] inerente à computação quântica:

> Universality means that computations, and the laws of computation, are independent of the underlying hardware. And therefore, the quantum theory of computation cannot explain hardware. It cannot, by itself, explain why some things are technologically possible and others are not. For example, steam engines are, perpetual motion machines are not, and yet the quantum theory of computation knows nothing of the second law

[16]Universalidade nada mais do que a possibilidade de um *gate quântico* simular os demais (DEUTSCH, D. & BARENCO, A. & EKERT, 2008).

> of thermodynamics: if a physical process can be simulated by a universal quantum computer, then so can its time reverse.

Temos razões de sobra para não aceitar que o universo seja uma espécie de computador rodando programas. Todavia, indicamos o trabalho de Lloyd (2013) que defende a tese oposta à nossa. Resta a questão: como a natureza computa? Aliás, a natureza computa? Esse é o tema de um artigo de Deutsch (2013), que discutiremos antes de responder à primeira pergunta do nosso artigo.

Primeiramente, o que seria uma lei da computação? Um exemplo: não existe uma máquina de Turing que possa detectar se um determinado programa parará ou não (idem, p. 553). Concordamos com Deutsch em que as leis da computação "são determinadas [17] pelas leis da física" (idem, ibidem). E uma computação é:

> (...) um processo físico em que objetos físicos como computadores, réguas de cálculo ou cérebros são usados para descobrir, ou para demonstrar ou para aproveitar propriedades de objetos abstratos – como números ou equações. Como eles podem fazê-lo? A resposta é que nós os usamos apenas em situações em que o melhor da nossa compreensão das leis da física fará com s que variáveis físicas como as correntes elétricas em computadores (representando bits) imitem as entidades abstratas em que estamos interessados (Idem, p. 558).

E finalmente, concordamos em que as computações são processos físicos e que também é possível interpretar processos físicos como computações, caso atribuamos *rótulos* a todas os estados iniciais finais, aqui vistos como os *inputs* e *outputs* e os deixemos evoluírem de acordo com as leis da física (idem, ibidem).

[17] Um leitor atento poderia nos interromper aqui e dizer: "Em que sentido o problema da parada é determinado por uma lei da física?". O fato de computadores pararem, ou não, é um problema físico, não matemático, apesar de não haver um algoritmo para decidir sobre a parada. Acreditamos que essa seria a resposta de Deutsch.

Deutsch nos diz no fim de seu artigo que “computadores devem ser concebidos como estando dentro do universo, sujeitos às suas leis, não algo anterior ao universo, gerando as suas leis” (idem, ibidem). Respondendo, então, à questão que propusemos, desde que o estatuto ontológico das leis da física seja mais fundamental do que o das leis da computação, qualquer metáfora como aquela da primeira citação que mencionamos de Hofstadter é bem vinda. Se o autor de GEB acredita *ipsis litteris* que o nosso universo possa ser interpretado como um grande computador, temos razões para não acreditar nessa hipótese. Caso contrário, é apenas mais uma metáfora elegante e inofensiva.

5. Conclusão

Apresentamos duas questões que consideramos atuais e relevantes para o debate ligado ao teorema de Gödel e a sistemas formais. GEB é um livro que continua inspirando muitas mentes no mundo e esperamos que continue a estimular muitos cientistas de diversas áreas. Quanto à questão concernente à tese de Lucas-Penrose, a nossa resposta foi a de que ela é imprecisa e está imersa em falácias. Quanto à possibilidade do mundo ser descrito por algum tipo de sistema formal, cremos que seja mais uma hipótese problemática e que visa colocar as leis da física como posteriores àquelas da computação, um fato que não nos parece correto. Enquanto os antigos viam arqueiros, ursas e carruagens nos céus, os modernos *parecem ver* computadores e simulações, porém, *não vemos* nada mais do que aquilo que é dado pelas leis da física. Esperamos ter contribuído, mesmo que humildemente, para a celebração dos quarenta anos do livro.

6. Epílogo

Escrito em 1979, três anos antes do lançamento de *Blade Runner* e cinco antes de *Terminator*, Hofstadter toca, mesmo que tangencialmente, no tema de máquinas inteligentes que poderiam trazer perigos à sociedade. O capítulo XX de GEB começa com uma citação de Arthur Samuel que visa rebater as declarações de um dos pais da cibernética, Norbert Wiener, que acredita que as máquinas poderão ser perigosas, além de efetivas no futuro (Hofstadter, 2000, chap. XX). Logo no título de seu artigo *Some Moral and Technical Consequences of Automation*, Wiener escreve que: "As machines learn they may develop unforeseen strategies at rates that baffle their programmers" (Wiener, 1960, p. 1355).

O intuito nosso é o de trazer para os dias de hoje essa discussão com base em tudo o que foi dito até aqui. Bem, não acreditamos que devamos utilizar teoremas de incompletude para argumentar contra a possibilidade de termos máquinas dotadas de inteligência, intuição, etc. O ponto a ser seguido são as leis da física e nada mais e, para isso, tomaremos emprestadas algumas palavras de Hawking.

6.1 Hawking, Skynet e os exterminadores do presente

> *A vida do homem instintivo está fechada no círculo de seus interesses privados (...) Em tal vida há algo de febril e limitado, em comparação com a qual a vida filosófica é calma e livre* - B. Russell (2008, p. 217)

Do trabalho seminal de von Neumann (1966) sobre os autômatos aos manuais modernos de inteligência artificial (Russell & Norviwg, 2004), progressos enormes foram feitos e muitas questões de cunho filosófico e sociológico têm surgido. É óbvio que a reflexão nessa direção deveria ser estimulada de modo enérgico para criarmos uma geração de pessoas conscientes dos benefícios e das ameaças reais ligadas às novas tecnologias. Ora, esperar o que de pessoas imersas em um mundo tecnológico que não lhes parecerá menos mágico ou mitológico do que aquele regido por deuses do trovão e da guerra? Infelizmente, estamos caminhando na direção oposta àquela que prepara as pessoas para os desafios que as novas tecnologias nos trarão. A filosofia liberta a mente de preconceitos e abre um novo mundo de perguntas que buscam por respostas. Citando a nossa maior referência em filosofia, Bertrand Russell, em seu ensaio *O valor da filosofia*:

> O homem 'prático', tal como esta palavra se usa frequentemente, é aquele que reconhece apenas bens materiais, que vê que os homens têm de ter alimento para o corpo, mas não presta atenção à necessidade de fornecer alimento para a mente. Se todos os homens tivessem uma boa situação financeira, se a pobreza e a doença tivessem sido reduzidas a seu ponto mais baixo possível, faltaria ainda fazer muito para produzir uma sociedade valiosa; e, mesmo no mundo que temos, os bens da mente são pelo menos tão importantes quanto os bens do corpo. É exclusivamente entre os bens da mente que o valor da filosofia se encontra. A filosofia, como todos os outros estudos, visa primariamente o conhecimento. O conhecimento que visa é o tipo de conhecimento que dá unidade e sistema ao corpo das ciências, e o tipo que resulta de um exame crítico dos fundamentos de nossas convicções, preconceitos e crenças. (...) À parte a sua utilidade ao mostrar possibilidades insuspeitas, a filosofia tem valor (...) (Russell, p. 214, 2008).

Seguindo com a nossa reflexão filosófica e sociológica, em seu último livro, postumamente publicado, Stephen Hawking nos alerta para os possíveis perigos do desenvolvimento da inteligência artificial. Ele nos diz que "It's tempting to dismiss the notion of highly intelligent machines as mere science fiction, but this would be a mistake, and potentially our worst mistake ever" (Hawking, 2019, pp.183-184). Parece-nos que o físico inglês concordaria com Wiener. Ele segue dizendo que: "Because of the great potential of AI, it is important to research how to reap its benefits while avoiding potential pitfalls. Success in creating AI would be the biggest event in human history" (idem, p. 184).

Não devemos temer as mudanças, mas estar preparados para elas. Quanto ao desenvolvimento da inteligência artificial, temos que analisar o tema com o mínimo de preconceito, imparcialidade e do modo mais científico possível. Máquinas, acreditamos, podem ser inteligentes à sua maneira e não é mister comparar um *suposto modo de pensar robótico* ao nosso modo de pensar, intuir, sentir, amar, odiar. Cremos que máquinas poderão pensar, mas como máquinas. O que queremos dizer é que o termo *pensamento* não precisa significar, exclusivamente, *pensamento humano*. Se uma máquina inteligente pensasse e falasse, nós a entenderíamos? Na proposição 25 de suas Investigações Filosóficas, Wittgenstein nos diz que:

> Diz-se muitas vezes: os animais não falam porque lhes faltam as capacidades espirituais. E isso significa: "Eles não pensam, por isso, não falam". Mas eles não falam mesmo. Ou melhor, não empregam a linguagem – se abstrairmos as mais primitivas formas de linguagem. Comandar, perguntar, contar, tagarelar pertencem à história de nossa natureza assim como andar, comer, beber, jogar (Wittgenstein, 1999, p. 36).

Não há dúvidas de que a linguagem humana possui formas que servem de molde ao pensamento, todavia, discordamos de Wittgenstein em que animais não pensam. Eles pensam como animais, o que nos parece mais tautológico e menos *sapiencial* ou *provinciano*. Aliás, partilhamos mais da opinião do pai da cibernética: "(...) há animais humanos mentalmente retardados cujos cérebros envergonhariam um chimpanzé" (Wiener, 1954, p. 81).

Seres humanos e computadores habitam o mesmo universo e estão sujeitos às mesmas leis físicas e, assim como a espécie humana evoluiu e se adaptou, não há lei física alguma que impeça que as máquinas criadas pelos homens possam evoluir através de programas que se modifiquem por si mesmos. Evidentemente, tais programas são escritos por seres humanos, não pela natureza (meio ambiente físico) em bilhões de anos de evolução. O maior risco seria a utilização militarista de máquinas para fins de guerra, extermínio em massa, construção de armas mais eficientes, etc. ou o surgimento de uma corrida armamentista por *máquinas* *inteligentes de guerra*. É sempre importante ter em mente que o homem é, em grande medida, *o lobo do homem*, o seu maior inimigo e exterminador. A sociologia, além da antropologia, tem como serventia ajudar o homem a entender a sociedade como um todo e, inclusive, a colocar freios à estupidez de muitos governantes.

Agradecemos ao professor Ricardo Scucuglia R. da Silva pelo apoio e paciência.

7. Referências

BOOLOS, G. S. & BURGERSS, J. P. & JEFFREY, R. C. *Computabilidade e lógica*, Edunesp, S.P. (2012).

CARNIELLI, W. & EPSTEIN, R. L. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática,* Edunesp, SP (2005).

CHAITIN, G.& DA COSTA, N. C.A.& DORIA, F.A. *Gödel's way – exploits into na undecidable world* , CRC Press, USA (2011).

DE SOUSA, J. N. *Lógica para ciência da computação, uma introdução concisa - 2ª Edição*, Ed. Campus SP(2008).

DEUTSCH, D. - "It from Qubit", on-line lecture (2002). https://pdfs.semanticscholar.org/e61b/fbc6a38778e1b83088b124a97f2e5009b464.pdf

DEUTSCH, D. & BARENCO, A. & EKERT, A - *Universality in quantum computation* (2008). https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9505018.pdf

-"What is computation? How does nature compute", In *A Computable Universe – Understanding and exploring nature as computation,* World Scientific Co. Ptc. Ltd. , Ed. Hector Zenil, pp. 551-565, USA (2013).

DEWITT, B "The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics" In *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* Eds. DeWitt, B. Graham, R.N Princeton Séries in Physics, Princeton University Press, Princeton (1973).

EBBINGHAUS, H. -D & FLUM, J. & THOMAS, W. *Mathematical logic* , Springer Science+Business Media, LLC , New York (1994).

ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic,* Academic Press, USA (1972).

EVERETT, H. "The theory of the universal wave function", In *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* Eds. DeWitt, B. Graham, R.N Princeton Séries in Physics, Princeton University Press, Princeton (1973).

FEFERMAN, S. "Are there absolutely unsolvable problems? Gödel's dichotomy", *Philosophia Mathematica* (III) **14** , pp. 134-152 (2006).

FEYNMAN, R. P. "Simulating physics with computers", Int. J. Theor. Phys. 21: 467-488 (1982).

GÖDEl, K. *On Formally undecidable propositions of principia mathematica and related systems,* Dover Publications Inc. , New York (1992).

GOLDSTEIN, R. *Incompletude – A prova e o paradoxo de Gödel ,* Ed Companhia das Letras, São Paulo (2008).

HAWKING, S. W. *Brief answers to big questions,* Bantan Books, New York, USA (2019).

___________-"As objeções de um reducionista assumido" Em *O grande, o pequeno e a mente humana*, PENROSE, R. Ed. Gradiva, pp. 171-174, Lisboa (2003).

HINTIKKA, J. *On Gödel,* Wadsworth, USA (2000).

LLOYD, S. "The universe as a quantum computer", In *A Computable Universe – Understanding and exploring nature as computation,* World Scientific Co. Ptc. Ltd. , Ed. Hector Zenil, pp. 567-582, USA (2013).

LUCAS, J. R. "Minds, machines and Gödel", *Philosophy* **36**, pp. 112-137 (1961).

Versão digital: http://users.ox.ac.uk/~jrlucas/Godel/mmg.html

MENDELSOHN, E. *Introduction to mathematical logic, 6th edition, CRC Press*, New York, USA (2015).

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*, Edunesp, SP (2016).

PENROSE, R. *O grande, o pequeno e a mente humana* , Ed. Gradiva, Lisboa (2003).

___________ *Emperor's new mind - concerning computers minds and the laws of physics,* Penguim Books, USA (1991).

___________ *Shadows of the mind – a search for the missing science of the conscience,* Oxford University Press, New York (1994).

RUCKER, R. *Infinity and the mind,* Princeton University Press , Princeton – New Jersey (1995).

RUSSELL, B. *Os problemas da filosofia*, Edições 70 Ltda, Lisboa (2008).

RUSSELL, S. & NORVIG, P. *Inteligência artificial* 2ª Edição, Ed. Campos, Rio de Janeiro (2004).

SMITH, P. *An introduction to Gödel's theorems,* Cambridge University Press, Cambridge, England (2012).

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*, Addison-Wesley Publishing Company, USA (1967).

TURING, A. M. "Lectures to the London Mathematical Society on 20 Februabry 1947" In *Alan Turing – his work and impact,* pp. 486-497 Editors: COOPER, B. S. & VAN LEEUWEN, J. , Elsevier, Amsterdan (2013).

___________ "Computing Machinery and Intelligence" . Mind **49**: pp. 433-460, (1950).

VON NEUMANN, J. *Theory of self reproducing automata* , University o Illinois Press, USA, (1966).

WANG, H. *A logical journey – From Gödel to philosophy ,* Bradford Books – Mit Press Series, USA (2016).

WEYL, H. *Philosophy of mathematics and natural sciences*, Princeton University Press, Princeton, USA (1949).

WHEELER, J. A. "Information, physics and the search for links" From *Proc. 3rd Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics,* pp.354-368, Tokyo (1989).

WIENER, N. "Some Moral and Technical Consequences of Automation", Science 131 (1960).

___________ *Cibernética e sociedade - o uso humano de seres humanos,* Ed. Cultrix, SP (1954).

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas,* Ed. Nova Cultural, SP (1999).

Capítulo 4

Discussões Curriculares sobre a Interface Arte e Matemática a partir de uma Perspectiva Crítica e Criativa

Harryson Júnio Lessa Gonçalves [1]
Edvan Ferreira dos Santos [2]

Este capítulo objetiva discutir possibilidades, com base em perspectivas curriculares críticas, de práticas didáticas nas quais conhecimentos pertencentes à interface arte e matemática contribuem para uma visão da matemática escolar mais humana e menos distante da realidade. Admite-se que tais práticas possuem potencial para o desenvolvimento de criticidade e criatividade, capacidades fundamentais no processo formativo que prime por uma formação para a emancipação.

O entendimento crítico a respeito dos conceitos matemáticos, para além de se instrumentalizar matematicamente, compreende a relação de tais conhecimentos com a práxis social — ou seja, a maneira como tais conhecimentos dão forma às práticas sociais e podem interferir no modo com que o sujeito compreende e age perante às problemáticas da realidade em que está inserido.

---

[1] Faculdade de Engenharia da UNESP – Câmpus Ilha Solteira; docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência e do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos (ambos da UNESP). Pedagogo e Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB) e doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Líder do Grupo de Pesquisa em Currículo: Estudos, Práticas e Avaliação (GEPAC). E-mail: harryson.lessa@unesp.br.

[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) – Câmpus Avançado de Ilha Solteira. Licenciado em Matemática pelo IFSP e mestre em Educação para a Ciência pela UNESP. Membro do Grupo de Pesquisa em Currículo: Estudos, Práticas e Avaliação (GEPAC). E-mail: edvanferreirastos@gmail.com.

O conhecimento matemático escolar sem contextualização e trabalhado numa perspectiva tradicional não contribui com a superação dos problemas didático-pedagógicos enfrentados pelos professores que ensinam matemática, tais como desinteresse, dificuldades de aprendizado, desafeto e até mesmo fobia à matemática por parte dos educandos. Não apenas isso, mas num quadro amplificado, processos formativos descontextualizados não contribuem para a superação das crises estruturais da sociedade, como desigualdades, fome, violência, barbáries, etc., visto que a forma desconexa da realidade nos conhecimentos produzidos no âmbito da perspectiva curricular tradicional, que pretende ser neutra (mas não é), não prioriza a dialogicidade e problematização crítica. Desta forma, perpetua-se a visão estereotipada da matemática como algo puramente idealizado, inumano, verdade absoluta e infalível. Portanto, o que se pretende discutir é a contextualização da matemática escolar em sua interface com a arte na qual a segunda não é concebida como mero objeto ilustrativo, mas elemento constituinte de uma visão mais ampla e humana do conhecimento, crítica.

No desenvolvimento de capacidades críticas e criativas no âmbito dos processos formativos em matemática, interrelacionar conceitos matemáticos com as artes pode ser um caminho favorável, pois práticas dessa natureza divergem da abordagem tradicional por propiciarem experiências das quais contextualização, historicização, sensibilização, estabelecimento de analogias, processos de experimentação, abstração, criação, dentre outros podem ser desenvolvidos.

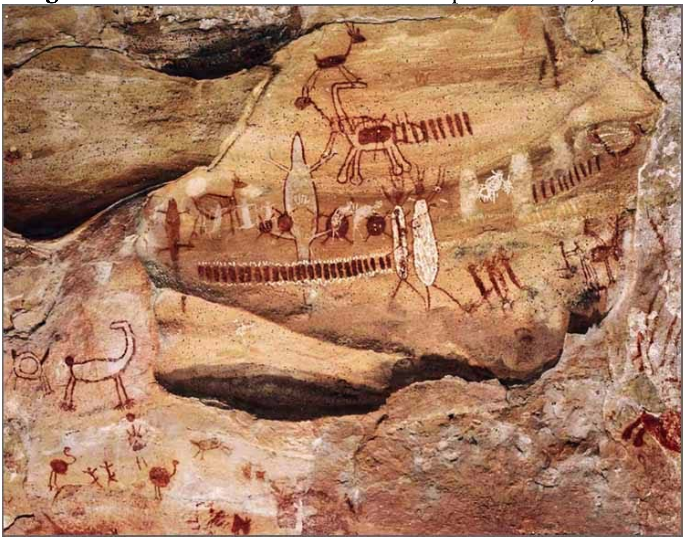
Alguns precedentes históricos

É possível que muitos ainda ignorem o fato de que há arte na matemática, bem como a recíproca, há matemática na arte. Se perguntarmos aleatoriamente para as pessoas: o que é arte? Certamente não se chega a uma resposta unânime. Da mesma forma ocorre com: o que é matemática? Ainda assim, cogitamos respostas instantâneas que podem surgir para tais perguntas. Possivelmente dirão que a arte são as obras de arte (preferencialmente artes plásticas) e a matemática são números, cálculos, fórmulas. Elementos à primeira vista totalmente distintos, sem diálogo, sem conexão. Uma é fria, calculista, sem sentimentos. A outra é colorida, expressa emoções, sensações. Parece até que estamos a contrapor razão versus emoção. Mas será que de fato isso se verifica? Tal separação excludente não é real, e a visão fragmentada difundida é uma construção que provém da forma como nós, seres humanos, viemos produzindo nosso conhecimento no decorrer de nossa história evolutiva.

Acredita-se que antes mesmo de existir alguma ciência, a percepção sensorial seria o principal modo com que o ser humano desenvolvia relações cognitivas com a realidade. No caso da matemática a percepção mais primitiva seria talvez a de quantidade, que se baseia na observação de contrastes: uma alcateia em oposição a um único lobo; ou, a diferença colossal entre o tamanho de uma sardinha em contraposição ao de uma baleia, produz neste humano pré-histórico uma noção do que mais tarde se chamou de número (BOYER, 2012).

Já no caso da arte, vestígios arqueológicos mostram que no período histórico denominado Paleolítico Superior, aproximadamente há trinta mil anos a. C., período esse em que o ser humano já apresentava algumas habilidades relacionadas às suas necessidades de sobrevivência, por exemplo a produção de artefatos e ferramentas. Foi quando passou a registrar sua realidade por meio de manifestações consideradas artísticas: as pinturas rupestres. Tais pinturas refletem por meio de uma perspectiva representacionalista a vida desse humano que certamente já compreendia propriedades matemáticas simples (Figura 1).

Figura 1: Nicho Policrômico – Serra da Capivara – Piauí, Brasil



Fonte: Associação de Arte Rupestre ABAR (2006)

Na imagem acima, é possível identificar formas semelhantes à silhueta humana bem como outras que aparentam ser de outros animais. Também visualizamos conjuntos de traços sequenciados próximos às figuras. O que nos sugere que possivelmente esse humano estaria realizando um registro de contagem de suas caças. Indícios como esse sugerem que a arte, em sua linguagem visual, e a matemática, num aspecto ligado a noções de quantificação, se constituíram num contexto comum, o da sobrevivência.

Avancemos a linha do tempo e olhemos para a antiga civilização egípcia. Os egípcios foram expressivos na relação arte-ciência por terem apresentado por meio de sua cultura consideráveis realizações no que se refere à agricultura, matemática, arquitetura e técnicas de esculpir. Na quarta dinastia egípcia, as grandes pirâmides foram construídas, feitas a partir de imensos paralelepípedos calcários esculpidos em rochas brutas extraídas da natureza. Apesar de as pirâmides serem os ícones do legado histórico-cultural da civilização egípcia, as estátuas produzidas pelos egípcios também têm destaque. Elas foram as primeiras a representarem a beleza estética do corpo humano. Com tamanho colossal, proporções bem próximas do real e significativa simetria, elas curiosamente apresentam exatos 90 graus em relação ao solo, o que pressupõe que os egípcios possivelmente possuíam conhecimentos relativos às propriedades do triangulo retângulo. Tais feitos denotam concepções – geométrica; arquitetônica; e mesmo astronômica, pois sabiam as épocas certas de plantio por meio da observação dos astros – bastante avançadas para a época que fazem dessa cultura representativa na história.

Assim como os egípcios, os gregos cultuavam a estética do corpo humano que inicialmente inspirados nas esculturas egípcias, esculpiam figuras humanas nuas, eretas, numa distribuição de peso extremamente balanceada e com realismo surpreendente. O diferencial da escultura grega é que com a evolução das técnicas, elas passaram a apresentar, diferentemente das egípcias, noção de movimento, não mais naquela postura rígida, estática, além de terem proporções idênticas à real (GOMBRICH, 1999).

Na arquitetura apresentaram também grandes avanços, evidenciados nos templos para cultuarem seus deuses. Os gregos descobriram que as colunas nas construções transmitiam um aspecto de leveza sendo ao mesmo tempo tão resistentes quanto as paredes. Por valorizarem a racionalidade, suas construções eram simétricas e consequentemente conseguiam produzir efeitos estéticos harmoniosos em suas produções arquitetônicas (GOMBRICH, 1999).

A Grécia antiga foi também o berço dos grandes filósofos, matemáticos e cientistas como Platão, Aristóteles, Pitágoras, Euclides, Arquimedes, dentre outros. Conforme se tem registro, o primeiro experimento científico foi concebido por meio de uma relação arte-ciência que curiosamente se deu por meio da matemática e da música. Trata-se do experimento do monocórdio, atribuído à Escola Pitagórica, ou a Pitágoras que se utilizando de tal instrumento composto por uma única corda fixada em uma caixa de ressonância, relacionou razões de números inteiros com o comprimento de uma corda vibrante e estabeleceu um modelo de escala musical, denominado diatónico, o qual é base do modelo de escala musical atual, o cromático (ABDOUNUR, 2005).

Olhemos para o Renascimento, período histórico em que se buscou retomar os valores estéticos e racionais da Antiguidade Clássica, "um tempo onde a separação arte e ciência não existiu" (FLORES, p. 45, 2003). Sabe-se que vários artistas desse período se consubstanciaram em conhecimentos matemáticos na criação de suas obras, e um exemplo em destaque é Leonardo da Vinci (1452-1519). Expoente cientista e artista do Renascimento, valorizava as perfeitas proporções em suas obras, tais como na pintura *Mona Lisa* que apresenta em sua anatomia medidas proporcionais à razão áurea. Essa razão pode ser obtida a partir da sequência de Fibonacci. Leonardo Fibonacci di Pisa (1175-1240), matemático, xará e compatriota de da Vinci deixou um surpreendente e duradouro legado.

> A sequência de Fibonacci suscita a noção de simetria dinâmica – a razão áurea, ou 'divina proporção', que o próprio Fibonacci não poderia ter antevisto. Três séculos depois que Fibonacci formulou aquela sequência, Leonardo da Vinci ilustrou um livro chamado De divina proportione. Mas a integração entre ciência e arte [em da Vinci] tem muito mais vertentes que a matemática de Fibonacci e a arte de Leonardo: ela também extrai elementos da arquitetura, astronomia, biologia, química, geologia, engenharia, matemática, filosofia, física – englobando uma extraordinária gama dos interesses de Leonardo. Para ele, esses eram ramos da mesma árvore, parte de uma grandiosa estrutura unificada, o universo (ATALAY, 2007, p. 35, comentário nosso).

Seria esse o motivo da obra *Mona Lisa* ser uma das mais famosas mundialmente? A matemática e a *Mona Lisa*: arte na matemática ou matemática na arte? Nos parece, por esse exemplo e pelos fatos históricos que a separação entre arte e matemática não é excludente, ou seja, elas apresentam conexões visto que ambas são manifestações humanas, conhecimentos que só fazem sentido num contexto histórico e social humano.

Além do exemplo de da Vinci, ainda nas artes visuais existem diversos exemplos de artistas que em suas obras explicitam uma íntima relação da arte com a matemática, podemos citar: Albrecht Dürer (1471-1528), com a técnica da perspectiva e da geometria projetiva; Wassily Kandinsky (1866-1944) e Piet Mondrian (1872-1944), com a arte abstrata; Maurits Cornelis Escher (1898-1972), com tesselações e pavimentações; István Orosz (1951-), com anamorfoses, dentre outros. É importante salientar que a verificação de relações com a matemática não se limita às artes visuais. Em consonância à afirmativa anterior, evidencia-se relações da matemática para além das artes visuais, na música (ABDOUNUR, 2006), no teatro (POLIGICHIO, 2011), na dança (MORAES, 2014), e acreditamos que é possível identificar e estabelecer relações matemáticas com outros possíveis campos artísticos.

Educação matemática e arte em meio às perspectivas curriculares

De acordo com pesquisadores desse tema no contexto da Educação Matemática, Alves (2007), Zaleski Filho (2009), Silva (2013), Campos (2014), Barros (2017) e Gregorutti (2016)), explorar as relações da Matemática com a Arte em ambiente escolar é uma possibilidade de estimular a criatividade, a criticidade e despertar a afetividade pela matemática.

Há muito tempo, no âmbito educacional o ensino de matemática carrega a insígnia da tendência tradicional, em que ensinar se resume à “transmissão” do conhecimento e aprender à “recepção” de conteúdos frequentemente desconexos da realidade ou sem significado para aprendiz. A metáfora do ensino “bancário” de Paulo Freire traduz a relação educador-educandos nessa tendência:

> [...] a narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais ainda, a narração os transforma em 'vasilhas', em recipientes a serem 'enchidos' pelo educador. Quanto mais vá 'enchendo' os recipientes com seus 'depósitos', tanto melhor educador será. Quanto mais se deixem docilmente 'encher', tanto melhores educandos serão (FREIRE, 1987, p. 32).

Nessa forma de ensinar, consequentes problemas se expressam no distanciamento do educando do conhecimento, como uma verdadeira fobia matemática. Apelo a processos mecânicos, memorização de fórmulas, intensa repetição de algoritmos geram sofrimento ao aprendiz. Qual a importância de se democratizar o conhecimento matemático? A matemática permeia os diversos processos humanos, especialmente no modelo de sociedade em que vivemos, estruturada numa lógica instrumental, dividida em classes, na qual o poder se concentra nas mãos dos poucos detentores de capital maciço. O desenvolvimento de habilidades ligadas ao raciocínio lógico, fluência no manejo de quantidades, medidas, estatísticas, etc., numa perspectiva crítica, é essencial para a formação cidadã e fundamental na sobrevivência e manutenção de direitos que se viabilizam por meio da luta e resistência das classes rebaixadas por melhores condições de vida.

A Educação Matemática apesar de não ter sua componente política claramente definida (VALERO, 2004), ao se ocupar da contextualização da matemática escolar deveria conduzir os educadores ao reconhecimento e incorporação da dimensão política. Essa asserção se justifica pela necessidade de dar sentido crítico ao conhecimento matemático escolar, o que difere de simplesmente fornecer um pano de fundo agradável ou apenas ilustrar os conteúdos matemáticos.

O conceito de contextualização, no âmbito curricular brasileiro, começa a se apresentar com maior intensidade na proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997), na década de 1990, sendo tal conceito, em conjunto ao de interdisciplinaridade, um dos princípios que integram discurso regulativo. Lopes (2002), afirma que para a produção de uma proposta como a dos PCN, os múltiplos discursos acadêmicos são apropriados, hibridizados e ressiginificados com o fim de atender às necessidades educacionais do momento corrente.

Contextualização nos PCN se apresenta como um conceito associado à valorização do cotidiano, de modo que os saberes escolares precisam estabelecer relação com questões objetivas da vida dos educandos. Assim, podemos considerá-lo como próximo de uma perspectiva mais crítica por considerar as concepções de ensino contextualizado,

> [...] relacionadas com a valorização dos saberes prévios dos alunos e dos saberes cotidianos, bem como relacionadas com o caráter produtivo do conhecimento escolar, contribuem para a legitimidade dos PCNEM junto à comunidade educacional. É preciso considerar, todavia, o quanto tais concepções estão hibridizadas aos princípios do eficientismo social. Os saberes prévios e cotidianos são incluídos em uma noção de contexto mais limitada em relação ao âmbito da cultura mais ampla. Contexto restringe-se ao espaço de resolução de problemas por intermédio da mobilização de competências (LOPES, 2002, p. 392).

Nas propostas dos PCN o ensino de arte está pautado, dentre várias abordagens, na construção de textos artísticos pelo aluno valendo-se dos conhecimentos no âmbito das linguagens da arte: a música, as artes visuais, a dança e o teatro. Os textos produzidos nessa disciplina não se limitam a mensagens variadas sobre temas avulsos, visto que na visão dos PCN a arte é uma narrativa sobre a humanidade que sintetiza as diversas visões de mundo de cada cultura e de cada época (BRASIL, 2006), pois,

> (...) é fenômeno social e parte da cultura. Está relacionada com a totalidade da existência humana, mantém íntimas conexões com o processo histórico e possui sua própria história, dirigida que é

> por tendências que nascem, desenvolvem-se e morrem, e às quais correspondem estilos e formas definidos (NUNES, 1991, p. 1).

Por tal viés se configura nossa compreensão do potencial crítico da arte numa interface com a matemática que além de superar a tendência tradicional, é um conhecimento que possibilita uma maior compreensão da realidade e que desenvolve capacidades críticas e criativas na formação plena do educando. Capacidades que avançam na proposta dos parâmetros curriculares, essas pautadas no eficientismo social que defende a associação entre a educação e o mundo do trabalho, no qual a concepção de trabalho se limita a uma visão empírica:

> (...) todos devem ser educados na perspectiva do trabalho enquanto uma das principais atividades humanas, enquanto campo de preparação para escolhas profissionais futuras, enquanto espaço de cidadania, enquanto processo de produção de bens, serviços e conhecimentos com as tarefas laborais que lhes são próprias (BRASIL, 1999, v. 1, p. 140).

De acordo com Lopes (2002), mesmo não existindo um mundo produtivo no contexto dos modelos do eficientismo social, a ideia de que a educação deve se associar ao mundo do trabalho e formar com a finalidade de inserir de maneira eficiente o sujeito nessa realidade "sem questionamento do projeto de construção desse mesmo mundo" (LOPES, 2002, p. 393-394), ainda permanece.

No Movimento da Matemática Moderna, movimento educacional curricular ocorrido na década de 1960, o grande empenho era o de aproximar o ensino escolar da ciência. Desenvolver uma matemática útil para a técnica, ciência e para a economia moderna. Entretanto, nas etapas correspondentes à educação infantil e às séries iniciais do ensino fundamental, a intenção de unificar a linguagem e de possibilitar ao aluno a construção de suas noções matemáticas, o levava, na realidade, a descrever, numa linguagem matemática mais ou menos confusa, situações pseudoconcretas e bastante mágicas. Nas séries finais do ensino fundamental, o raciocínio sobre objetos matemáticos, dos quais o aluno poderia inclusive ignorar o sentido, foi cultivado como uma virtude. Assim, o que se colocou em prática estava distante de ser um ensino renovado e democrático da Matemática, preparando o aluno para a compreensão da ciência, mas um ensino formalizado ao extremo, decepado de todo suporte intuitivo, apresentado a partir de situações artificiais e, além de tudo, bastante seletivo (PIRES, 2008, p. 14-15).

Na busca por superação ao Movimento da Matemática Moderna, começam a surgir tendências em Educação Matemática orientadas para a integração dos conhecimentos matemáticos escolares com questões sócio-étnico-culturais a fim de tornar o ensino-aprendizagem de matemática imbuído de significação e com vistas a uma formação próxima das perspectivas críticas. Dentre essas tendências podemos citar a Etnomatemática, a Educação Matemática Crítica e a Modelagem Matemática.

No contexto histórico do surgimento das teorizações críticas da sociedade e do currículo, e, na necessidade de se pensar em uma educação para a emancipação, características da Educação Matemática Crítica (EMC) começam a ser delineadas.

> A educação crítica emergiu durante os anos 1960, com muita inspiração da teoria crítica. A educação matemática crítica se originou durante os anos de 1970 em um ambiente europeu, e durante os anos 1980 surgiu uma versão nos Estados Unidos. A noção de etnomatemática desenvolveu-se no Brasil, e [...] aquela noção ganhou destaque e iniciou-se uma tendência forte em direção à educação matemática crítica (SKOVSMOSE, 2007, p. 20).

Segundo Borba (2001), apesar de não utilizarem a denominação Educação Matemática Crítica, pesquisadores como Marilyn Frankenstein e Arthur Powell, nos Estados Unidos, Ole Skovsmose e Stieg Mellin-Olsen, na Europa, Munir Fasheh, na

Palestina, Paulus Gerdes e Jonh Volmink, na África e Ubiratan D'Ambrósio, no Brasil, são representantes dessa tendência no âmbito da Educação Matemática

Skovsmose (2001) apresenta três pontos em destaque das características da EMC: 1) o envolvimento dos estudantes no controle do processo educacional; 2) a consideração crítica de conteúdos e outros aspectos; e 3) o destaque dado às relações entre o processo educacional e os problemas existentes fora do universo educacional.

A Etnomatemática, nas palavras de seu criador, o educador matemático Ubiratan D'Ambrósio, é o estudo sobre os "modos, estilos, artes, técnicas" (tica) de "explicar, aprender, conhecer, lidar" (matema) com "o ambiente natural, social, cultural e imaginário" (etno). Uma observação importante é que a matemática como a conhecemos, "ciência dos números" direcionada ao formalismo teórico e o raciocínio lógico abstrato, trata-se na verdade de uma parte limitada do conhecimento agregado e passa a ser ampliada para uma visão com maior alcance considerando também as relações étnico-culturais em que as "matemáticas" estão inseridas (D'AMBRÓSIO, 2005).

Já a Modelagem Matemática, consiste na "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BASSANEZI, 2002, p. 16).

Tais tendências corroboraram, por meio do trabalho acadêmico dos pesquisadores em Educação Matemática, para a incorporação no discurso de normativas curriculares, como aconteceu com os PCN; dos conceitos de contextualização e interdisciplinaridade, ainda que hibridizados e ressignificados para atender aos interesses do Estado.

Em decorrência desse processo histórico curricular no Brasil e no mundo evidencia-se que

> A perspectiva que se coloca, portanto, é a construção de currículos de Matemática mais ricos, contextualizados cultural e socialmente, com grandes possibilidades de estabelecimento de relações intra e extramatemáticas, com o rigor e a conceituação matemáticos apropriados, acessível aos estudantes, evidenciando o poder explicativo da Matemática, com estruturas mais criativas que a tradicional organização linear [...] e que deve ser uma meta a ser perseguida pelos educadores matemáticos em suas pesquisas e em suas práticas (PIRES; SILVA, 2011, p. 68).

Esse processo se desdobra para as práticas de ensino que da mesma forma buscam essa contextualização e, como Pires (2011) mesmo coloca, que deve ser uma meta a ser perseguida pelos educadores matemáticos tanto nas práticas quanto nas pesquisas. De posse disso, podemos afirmar que as práticas didáticas, bem como as pesquisas sobre tais práticas – até mesmo dessas, sobre a interface arte e matemática – se intensificam a partir desse movimento e têm nos PCN um marco curricular que orienta o desenvolvimento dessas propostas. Infelizmente, pela precarização na formação docente, discursos ligados às questões de integração curricular podem cair em modismos e se propagarem no meio escolar de forma ambígua, tornando-se jargões quando apropriados de maneira inadequada. Por isso acreditamos que o desenvolvimento de práticas que interrelacionam matemática e arte demandam apropriação por parte dos educadores de perspectivas curriculares tais como as que estamos a discutir.

Criatividade e abstração: elos da interface arte e matemática

Além da apropriação de perspectivas curriculares e contextualização histórica, conhecimentos no âmbito epistemológico e filosófico são importantes na problematização crítica. Dessa forma retomamos a pergunta: o que é matemática? Geralmente, o público leigo define a matemática e fala sobre sua natureza com base na matemática escolar, ou a partir de estereótipos, imagens construídas e reproduzidas ao longo do tempo. Para esses, a pergunta parece simples. É óbvio que a matemática é (num senso comum) a ciência dos números. Eventualmente as formas geométricas são incluídas. Aqueles talvez um pouco mais familiarizados com a literatura sobre o assunto podem arriscar uma definição que vem do livro de Keith Devlin: "A matemática é a ciência dos padrões" (DEVLIN, 1996). Além dessa visão limitada, caracteriza-se a matemática como um conhecimento atemporal, lógico, verdade absoluta e infalível. Porém consideramos essa visão um tanto antiquada, além de superficial, na qual não há espaço para se problematizar.

Hersh (1997) explica que o platonismo e o formalismo são as duas visões principais da natureza da matemática que prevalecem entre os matemáticos. O formalismo se mostra respeitável filosoficamente, porém "é quase impossível para um matemático que trabalha em pesquisa realmente acreditar nele." (HERSH, 1997, p. 7, tradução nossa). Tal descrença se dá porque para o formalismo as verdades matemáticas são verdades formais e se dão unicamente por um jogo de convenções e símbolos. O platonismo é a filosofia mais difundida da matemática. Possui variedade de versões, porém uma das versões mais disseminadas diz que entidades matemáticas existem fora do espaço e do tempo, fora do pensamento e da matéria, em um domínio abstrato independente de qualquer consciência, individual ou social.

Segundo a visão platonista, conjuntos numéricos, funções, formas geométricas, etc. são objetos definidos, com propriedades definidas, conhecidas ou desconhecidas. Tais objetos nunca foram criados e nunca mudam. Para o platonismo, matemáticos são cientistas empíricos, como geólogos. Eles não podem inventar, porque tudo já está lá, podem somente descobrir. É característico do pensamento platônico defender que nosso conhecimento matemático é objetivo e imutável porque é um conhecimento de objetos externos a nós, independentes de nós, que são dessa maneira imutáveis.

Hersh (1997) compara a visão platonista na matemática e na arte. Para ele, dizer que espaços de Hilbert já existiam no universo antes mesmo de serem "descobertos" é equivalente a dizer a Rodin: "O Pensador é uma bela obra, mas tudo o que você fez foi retirar o mármore extra. A estátua estava lá dentro da pedra de mármore antes de você nascer". E da mesma forma como Rodin teria feito *O Pensador* removendo o mármore à sua volta, os descobridores dos espaços de Hilbert o fizeram analisando, generalizando e rearranjando ideias matemáticas que estavam presentes na atmosfera matemática de seu tempo para revelar uma verdade universal pré-existente (HERSH, 1997).

Diz-se que a matemática teve início quando por um processo de abstração, a percepção de três objetos, quaisquer sejam, se separou dos objetos e se tornou o número inteiro três (DAVIS; HERSH, 1995). Esse processo é um exemplo de abstração, existem sentidos diferentes de abstração nos quais o termo pode ser empregado.

Digamos que um artista está no processo de criação e desenvolvimento de uma obra de arte plástica. Uma pintura para ser mais específico. A pintura trata-se da imagem de uma casa. Nesse processo conceitos matemáticos são mobilizados mesmo que o artista não tenha consciência de tais. Se ele quiser pintar a imagem de uma casa de alvenaria num estilo realista, o conceito de reta certamente será mobilizado. Possivelmente ao esboçar o desenho, usará uma régua para traçar a lápis ao longo da tela uma linha que delimitará uma das paredes da casa. A linha traçada é um objeto físico, um depósito de grafite sobre a tela. Largura e espessura não são constantes, e ao acompanhar a régua, a ponta do lápis acompanha simultaneamente as imperfeições da tela, o que resulta num tracejado absolutamente irregular. Em contraponto à linha reta concreta traçada, está o conceito mental de abstração matemática de uma linha reta ideal.

Na manifestação idealizada as imperfeições desaparecem e podem até mesmo nem serem percebidas pelo artista no momento em que realiza o traço. Tem-se dessa forma a descrição idealizada de uma reta. Poderíamos supor que tal idealização é descrita a partir da percepção da experiência de esticar fios, dobrar papeis, observar a propagação de raios luminosos (DAVIS; HERSH, 1995). Além dessa idealização da reta, outras podem surgir nesse processo, tais como: planos, quadrados, triângulos, polígonos até que se chegue à imagem da casa.

> As idealizações [...] chegaram ao mundo matemático vindas do mundo da experiência espacial. Aristóteles descreveu esse processo ao afirmar [...] que o matemático elimina tudo o que é sensorial, como o peso, a dureza e a temperatura, e nada deixa senão a quantidade e a continuidade espacial (DAVIS; HERSH, 1995, p. 127).

A abstração, seguindo a lógica do exemplo do artista a produzir uma pintura, é um dos elos em que se estabelece a interface arte e matemática. O artista ao dar vida à sua obra está desenvolvendo um processo de abstração ainda que ignorando, no sentido de possivelmente não conhecer de maneira formal conceitos matemáticos como exemplificamos anteriormente. Será que caberia uma visão platonista para a arte? Dizer que as obras já existem em algum mundo ideal?

Propagar a concepção platonista de que não criamos, que tudo já está estabelecido e assim reificado nos remete a uma forma de alienação, a qual contribui com o estereótipo inumano da matemática. Cabe destacar que a abstração do artista não é somente uma abstração matemática, ela tem algo mais, algo que não se fecha na racionalidade instrumental e que está no âmbito da expressividade, das emoções, dos sentimentos, da imaginação. Cremos que o potencial da visão da arte em sua interface com a matemática está também na criatividade.

A criatividade é um potencial da arte, porém deve-se ponderar que não é somente nas artes existe criatividade. De acordo com Ostrower (1987), tal ideia constitui um vício que "deforma toda a realidade humana" (OSTROWER, 1987, p. 39). Essa deformação se dá no encobrimento da precariedade em outras áreas de atuação, principalmente aquelas que estão totalmente alinhadas às finalidades e interesses do capital. Nesse vício, há uma mecanização sem convicção ou visão próspera de humanidade (OSTROWER, 1987).

Retomando o caso do artista que está a pintar um quadro, ele o faz pensando em termos de trabalho a ser realizado numa tela de pintura. As possibilidades por ele elaboradas a nível de conjectura não seriam as mesmas para um trabalho em um mural, ou numa gravura, nos quais técnicas, medidas, espessuras, moldes seriam distintos.

> Mas, por ser o imaginar um pensar específico sobre um fazer concreto, isto é, voltado para a materialidade de um fazer, não há de se ver o 'concreto' como limitado, menos imaginativo ou talvez não-criativo. Pelo contrário, o pensar só poderá se tornar imaginativo através da concretização de uma matéria, sem o que não passaria de um fazer descompromissado (OSTROWER, 1987, 32).

Ao elaborar possibilidades objetivadas na materialidade é possível que se alcancem conhecimentos profundos e elevados em um trabalho. Um astrônomo poderá ser criativo em Física, Química, Biologia, Geologia, Astronomia por formular suas perguntas em termos dessas áreas, não porventura em termos de Astrologia ou Alquimia. No entanto se esse astrônomo nada mais vê pela frente do que Ciências Naturais, se todos os seus interesses e conteúdos de vida se resumem a exclusivamente problemas de especialistas, especializações dentro de especialidades, é de se perceber que ele vive uma enorme redução em termos de possibilidades humanas. E por quão elevado possa ser seu talento e eficiência, tal reducionismo poderá esvaziar até mesmo o sentido de criatividade que tem em seu trabalho profissional (OSTROWER, 1987).

Pelo que podemos perceber a criatividade é um elemento essencial em qualquer ação, em todas as áreas do conhecimento e não somente na arte. Portanto, é necessário entender que a criatividade só tem função numa dialética com a realidade. Na materialização, na concretização de ideias provindas da imaginação criativa. Criatividade é um processo elaborativo que consiste em dar forma e vida a algo novo, diferente. É a partir dessa necessidade que nossa evolução se possibilita. Assim, nos processos formativos, cremos que é fundamental priorizar processos do criar.

Arte e matemática na formação crítica

O que é arte? Não existe resposta definitiva, visto que os diversos tratados sobre estética produzidos por vezes apresentam ideias divergentes e contraditórias. Mas entende-se que a definição do que é arte, passa por um discurso institucional.

> Para decidir o que é ou não arte, nossa cultura possui instrumentos específicos. Um deles, essencial, é o discurso sobre o objeto artístico, ao qual reconhecemos competência e autoridade. Esse discurso é o que proferem o crítico, o historiador da arte, o perito, o conservador de museu. São eles que conferem o estatuto de arte a um objeto. Nossa cultura também prevê locais específicos onde a arte pode manifestar-se, quer dizer, locais que também dão estatuto de arte a um objeto. Num museu, numa galeria, sei de antemão que encontrarei obras de arte; num cinema 'de arte', filmes que escapam à 'banalidade' dos circuitos normais; numa sala de concerto, música 'erudita', etc. (COLI, 1985, p. 10-11).

As teorias expressivistas da Arte a definem como meio de expressão de emoções. Então pode-se afirmar que para os expressivistas a Arte é para o mundo interior das emoções como a Ciência é para o mundo exterior (COSTA, 2005). Partindo dessa ideia inicial de expressão, alguns teóricos avançaram, como é o caso do filósofo inglês Robin George Collingwood em sua obra The principles of Arts (traduzido: Os Princípios da Arte) (COLLINGWOOD, 1974) onde apresenta uma teorização de cunho filosófico mais rigorosa a respeito do fenômeno artístico na qual classifica-o em duas vertentes, uma é a "arte própria", a grande arte, a arte séria e a outra é a arte "assim chamada", aquela que se apresenta como arte mas de fato não é. Essa segunda vertente apresenta duas funções, são elas a mágica e a de entretenimento.

A função mágica é uma função utilitária, como é o caso de um hino patriótico, que tem a função de despertar sentimentos cívicos. Já a de entretenimento como o próprio nome já diz está ligada a função de proporcionar diversão, prazer. Tais funções para o filósofo acabam por degradar a consciência humana e podem levar a sociedade à decadência. Diferentemente da arte "assim chamada", a "arte própria" tem a função de regeneração da consciência e tem como pilares de sustentação a imaginação e o pensamento que organizados na produção artística levam tanto o artista quanto os espectadores a uma regeneração da consciência e fortalecimento do intelecto. Uma consciência verdadeira dá ao intelecto uma fundação sólida; uma consciência corrompida força o intelecto a construir de maneira instável (COSTA, 2005).

Os teóricos críticos, a citar: Karl Marx (1818-1883), György Lukács (1885-1971), Theodor W. Adorno (1903-1969), Herbert Marcuse (1898-1979), Walter Benjamin (1892-1940), dentre outros sinalizam em seus ensaios que a arte é um forte elemento que pode ser incorporado às questões de luta e resistência (CHAVES; RIBEIRO, 2014). No entanto, cabe destacar que só assume esse papel a arte que "rompe com a consciência dominante e revoluciona a experiência" (MARCUSE, 1999, p. 11). Essa arte pode ser revolucionária em sua forma estética quando

> [...] apresenta ausência de liberdade do existente e indica forças que se rebelam contra isso; quando rompe com a realidade reificada e aponta horizontes de transformação; quando subverte as formas de percepção e compreensão e deixa transparecer um

> teor de verdade, de protesto e de promessa na linguagem e na imagem (CHAVES; RIBEIRO, 2014, p. 15).

Adorno (1970) em sua teoria estética diz que "as obras de arte destacam-se do mundo empírico e suscitam um outro com uma essência própria, oposto ao primeiro como se ele fosse igualmente realidade" (p. 12). Assim imaginamos que num processo formativo pautado em perspectivas curriculares críticas, em que a arte é elemento de contextualização e integração dos conhecimentos matemáticos, potencialidades críticas criativas podem ser exploradas no sentido de questionar a realidade reificada na busca por soluções para os problemas e crises estruturais da sociedade.

Possibilidades à vista

A formação crítica compreende a integração do conhecimento com a prática social, visto que ser crítico "implica engajamento efetivo no contexto social para que surjam condições que levem à identificação de problemas, à sua avaliação e à intervenção" (PAIS et al., 2008, p. 727). Portanto uma proposta educativa para ser crítica precisa partir de uma problemática da realidade em que o educando está inserido, conforme sinalizam as pedagogias críticas, das quais podemos citar a *Pedagogia do Oprimido* (FREIRE, 1987) e a *Pedagogia Histórico Crítica* (SAVIANI, 2003). Bem como o retorno à essa problemática com novas compreensões e até mesmo possíveis soluções que se constroem num processo dialético.

Santos (2019) investigou como se fundamentam as pesquisas realizadas em nível de pós-graduação *stricto sensu* no Brasil sobre a interface arte e matemática no contexto da Educação Matemática em uma revisão de literatura. Constatou-se que os trabalhos que compõem tal revisão realizam a crítica no âmbito do ensino de matemática — no sentido de superação da perspectiva tradicional, "ensino bancário" (FREIRE, 1987) — pois dentre outros fatores, desenvolvem práticas educativas nas quais a dialogicidade é fundamental. Além disso propiciam no mínimo a interdisciplinaridade e a contextualização por meio de atividades em que alunos experienciam processos ativos, nos quais abstração, imaginação e criatividade são desenvolvidos.

Acreditamos que é possível explorar outras potencialidades críticas por meio dessas práticas que interrelacionam arte e matemática no sentido de uma formação para a emancipação, como por exemplo, competências democráticas na luta e resistência das minorias. Nessa proposição a arte em suas múltiplas linguagens poderia se estabelecer como um elemento que expressa o novo entendimento a respeito da prática social que se problematiza no processo formativo crítico. É a concepção da interface arte e matemática, em que ambas se estabelecem como elementos constitutivos de uma perspectiva crítica e criativa na busca pela transformação social, de um mundo novo com justiça, paz e igualdade.

Referências

ABAR. Associação brasileira de arte rupestre. **A arte rupestre pré-histórica**. Disponível em: <https://goo.gl/n55V95>. Acesso em: 05 ago. 2018.

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música**: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras, 2006.

ADORNO, Theodor W. **Teoria estética**. Lisboa: Edições 70, 1970.

ALVES, Maira Leandra. **Muito além do olhar:** um enlace da matemática com a arte. 2007. 88 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007. Disponível em: <https://goo.gl/sFyknb>. Acesso em: 25 jul. 2018.

ATALAY, Bulent. **A Matemática e a Mona Lisa**: a confluência da arte com a ciência. São Paulo: Mercuryo, 2007. 349 p. Tradução de Mário Vilela.

BARROS, Priscila Bezerra Zioto. **A arte na matemática: contribuições para o ensino de geometria**. 2017. 206 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Docência Para A Educação Básica, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista "júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/6faJ8g>. Acesso em: 25 jul. 2018.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Prefácio. In: SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus Editora, 2001. p. 07-12. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental: **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.. Brasil: Mec, 01 jan. 1997. Anual. Não Há. Disponível em: <https://bit.ly/1WzpeVo>. Acesso em: 03 mar. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. 239 p. Disponível em: <https://goo.gl/DnpdL6>. Acesso em: 01 ago. 2018.

CAMPOS, Gean Pierre da Silva. **A Teoria dos Conjuntos e a Música de Villa-Lobos**: uma abordagem didática. 2014. 94 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: <https://goo.gl/BRjPUJ>. Acesso em: 25 jul. 2018.

CHAVES, Juliana Castro; RIBEIRO, Daviane Rodrigues. **Arte em Herbert Marcuse**: formação e resistência à sociedade unidimensional. Goiânia: S/e, 2014. Disponível em: <https://bit.ly/2sTDWvK>. Acesso em: 18 out. 2018.

COLI, Jorge. **O que é arte?** 15. ed. São Paulo: Editora Brasiliense, 1995.

COLLINGWOOD, Robin George. **The Principles of Art**. Oxford University Press: Oxford, 1974.

COSTA, Claudio Ferreira. Teorias da arte. **Crítica**: Revista de Filosofia e Ensino, Portugal, v. 1, n. -, p.1-8, 5 out. 2005. Disponível em: <https://bit.ly/2HTuNoF>. Acesso em: 04 fev. 2019.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e pesquisa**, São Paulo, v. 1, no 31, p.99-120, jan./abr., 2005. Disponível em: <https://goo.gl/dsgdVk>. Acesso em: 01 ago. 2018.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

DEVLIN, Keith. **Mathematics**: the science of patterns: the search for order in life, mind and the universe. Macmillan, 1996.

FLORES, Cláudia Regina**. Olhar, Saber, Representar**: Ensaios sobre a representação em perspectiva. 2003. 188 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 17 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GOMBRICH, Ernst H. **A História da arte**. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

GREGORUTTI, Gabriel Souza. **Performance matemática digital e imagem pública da matemática**: viagem poética na formação inicial de professores. 2016. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2016. Disponível em: <https://goo.gl/zuBg1N>. Acesso em: 25 jul. 2018.

HERSH, Reuben. **What is mathematics, really?** New York: Oxford University Press, 1997.

LOPES, Alice Casimiro. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e a Submissão ao Mundo Produtivo: o caso do conceito de contextualização. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 23, n. 80, p.386-400, 2002. Trimestral. Disponível em: <https://goo.gl/UqQvyG>. Acesso em: 17 jul. 2018.

MARCUSE, Herbert. **A dimensão estética**. Portugal: Edições 70, 1999.

MORAES, João Carlos Pereira de. **Experiências de um corpo em Kandinsky**: formas e deformações num passeio com crianças. 2014. 220 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014. Disponível em: <https://goo.gl/EsZ7if>. Acesso em: 25 jul. 2018.

NUNES, Benedito. **A filosofia contemporânea**. São Paulo: Ática, 1991.

OSTROWER, Fayga. **Criatividade e processos de criação**. Petrópolis: Vozes, 1987.

PAIS, Alexandre et al. O conceito de crítica em educação matemática e perspectivas de investigação. In: Investigación en educación matemática, 12, 2008, Badajoz. **Anais**... . Badajoz: Sociedad Española de Investigación En Educación Matemática, SEIEM, 2008. p. 725 - 734. Disponível em: <https://bit.ly/2B2ePLF>. Acesso em: 27 jan. 2019.

PIRES, Célia Maria Carolino. Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 29, p.13-42, 2008. Quadrimestral. Disponível em: <https://goo.gl/t9KNx7>. Acesso em: 18 jul. 2018.

PIRES, Célia Maria Carolino; SILVA, Marcio Antonio da. Desenvolvimento curricular em Matemática no Brasil: trajetórias e desafios. **Quadrante**: Revista de Investigação em Educação Matemática, Lisboa, v. 20, n. 2, p.57-80, jun. 2011. Semestral. Disponível em: <https://goo.gl/Prw6cn>. Acesso em: 19 jul. 2018.

POLIGICCHIO, Andrea Gonçalves. **Teatro:** materialização da narrativa matemática. 2011. 148 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://goo.gl/i89a8Z>. Acesso em: 25 jul. 2018.

SANTOS, Edvan Ferreira dos. **A interface arte e matemática**: em busca de uma perspectiva crítica e criativa para o ensino de matemática. 2019. 170 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação para a Ciência, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2019. Disponível em: <https://bit.ly/2HbDQGM>. Acesso em 09 maio 2019.

SAVIANI, Demerval. **Escola e democracia**. Campinas: Autores associados, 2003.

SILVA, Alessandra Pereira da. **Matemática na Arte**: análise de uma proposta de ensino envolvendo a pintura renascentista e a Geometria em uma classe do 9º ano do Ensino Fundamental em Belo Horizonte (MG). 2013. 201f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013. Disponível em: <https://bit.ly/2fGeKQK>. Acesso em: 12 set. 2016.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus Editora, 2001.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007. Tradução de: Maria Aparecida Viggiani Bicudo.

VALERO, Paola. (2004). **Socio-political perspectives on mathematics education**. Researching the socio-political dimensions of mathematics education: issues of power in theory and methodology (pp. 1-17). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Disponível em: <https://bit.ly/2CNIoSW>. Acesso em: 29 jan. 2019.

ZALESKI FILHO, Dirceu. **Arte e Matemática em Mondrian**. 2009. 168 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação, Arte, e História da Cultura, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://goo.gl/dMtfu1>. Acesso em: 25 jul. 2018.

Capítulo 5

A música teórica e prática [Na Lenda de Pitágoras] no ensino da matemática: diferentes abordagens

Carla Bromberg *

A música e a matemática vêm construindo uma longa parceria na história. Enquanto hoje trabalhamos por decisões curriculares que integrem diferentes disciplinas, como acontece em programas de caráter interdisciplinar[1]; sabemos que na história, a música e a matemática já foram ambas ciências de caráter especulativo, compartilhando classificações matemáticas na Grécia antiga, nas artes liberais (no *quadrivium*) do período medieval e renascentista, e como matemáticas mistas, até assumirem posicionamentos apartados nas classificações modernas do conhecimento, resultantes das especializações das ciências nos séculos XIX e XX.

Dados os diferentes embasamentos teóricos que a música e a matemática tiveram na história, precisamos identificá-los devidamente, para poder compreender qual a sua forma de interação. A necessidade de conhecimento dos conteúdos de ambas as áreas é necessária, para posteriormente, tendo sidos definidos

---

* Pesquisadora e Doutora em História da Ciência, Pós-Doutorado em Educação Matemática.

[1] No que se refere ao nível escolar, talvez o melhor exemplo de programa seja o STEAM. Acrônimo formado pelas iniciais dos nomes em inglês das disciplinas: ciência, tecnologia, engenharia, artes e matemática. Na literatura, STEAM é considerado um programa interdisciplinar nos quais as diversas disciplinas são trabalhadas de forma conjunta, permitindo ao estudante a mobilização de habilidades e saberes de forma integrada.

os conteúdos matemáticos a serem ensinados, saber relacioná-los com os conhecimentos musicais na educação matemática.

Na educação matemática é bastante comum a utilização da música como ferramenta didática. Um levantamento da produção de pesquisas na interface da música com a matemática foi feito nos repositórios institucionais acadêmicos (respectivos bancos de teses e agências de fomento) pelo país, no qual pode-se constatar que os conteúdos matemáticos mais abordados foram:

a) ensino de frações e/ou da distinção entre fração, razão e proporção,
b) ensino das progressões aritmética e geométrica,
c) logarítmos,
d) funções trigonométricas[2].

Nos trabalhos estudados, quase todos visavam a elaboração de atividades práticas em salas de aulas que demandavam conhecimento musical. Essas práticas subentendiam capacidades específicas ligadas a percepção musical (conhecimento da teoria musical e habilidade de reconhecimento auditivo para a posterior reprodução) e organologia (conhecimento da teoria e prática da construção de instrumentos musicais)[3].

O caminho traçado para estabelecer uma relação entre os elementos matemáticos anteriormente mencionados e os musicais (intervalos musicais, escalas, sistemas de afinação e ritmos)[4] deu-se, majoritariamente, através de contextualização histórica. A

[2] O estudo foi feito durante um pós-doutorado no departamento de Educação Matemática na PUC-SP finalizado em 2017. Dados detalhados no Relatório final. Os trabalhos estudados incluem trabalhos de conclusão de curso (TCC), dissertações de mestrado acadêmico e profissional, e teses de doutorados. Vide também: (BROMBERG, SAITO, 2017).

[3] A análise dos trabalhos se restringiu ao aspecto textual (sem participação nas atividades práticas) e demonstrou inúmeros erros conceituais musicais (interpretações equivocadas do termo harmonia, da noção de métrica e ritmo, da formação tonal e modal das escalas), acústicos (incluindo problemas na descrição dos materiais e construção dos instrumentos) e históricos.

[4] As definições fornecidas desses elementos são atuais, ou seja, aquelas definidas e padronizadas durante os séculos XIX e XX, nos quais as notas são definidas através do estabelecimento de suas alturas absolutas, medidas por frequências, as escalas são escalas de afinação temperada que representam um sistema musical tonal.

contextualização invariavelmente valeu-se de uma narrativa da origem comum da relação entre a matemática e a música, resgatando, do período clássico grego, a lenda[5] da invenção da música por Pitágoras de Samos (c.570-495 a.C.):

> "[...] O presente trabalho propõe o desenvolvimento do projeto interdisciplinar por meio de oficinas cuja construção seria realizada com os alunos trabalhando em grupo, discutindo possibilidades de intervenção e exploração do monocórdio de Pitágoras, pesquisando sobre a origem dos termos razão e fração, finalizando sempre com um registro da atividade, processo que seria todo detalhado para os alunos no primeiro contato com o projeto (Barnabé, 2011, p. 52)".
>
> "[..] no segundo capítulo [são apresentados os aspectos históricos dessas relações], dando enfoque na escola pitagórica, pois teriam sido os pitagóricos os primeiros a estudar os intervalos musicais produzidos por notas emitidas por razões de diferentes tamanhos de uma corda vibrante (Jablonski, 2014, p.21)".
>
> "Já os primeiros indícios da relação da Matemática e a Música ocorreu por volta do século VI a.C., na escola Pitagórica, estes pensadores relacionaram intervalos musicais com o conceito matemático de frações (Cabral, 2015, p.19)".
>
> "[neste capítulo] apresentamos uma abordagem teórica sobre algumas das relações matemático-musicais observadas em meio a História [...] De acordo com [...], Pitágoras teria sido o primeiro matemático a descobrir conexões entre a Matemática e a Música.[...] autores como [...] apresentam Pitágoras, supostamente, como inventor de um aparelho científico capaz de verificar a teoria musical utilizada pelos pitagóricos e explica pormenorizadamente, a experiência com que Pitágoras teria comprovado e quantificado a sua intuição genial da relação existente entre a harmonia musical e os números (Camargos, 2010, p.34)[6]".

---

[5] (JAMBLICO, 2008; TENNEY, 1988; CENTRONE, 1992).

[6] No relatório de pós-doutoramento encontra-se uma análise das inúmeras obras que trazem esta temática. (BARNABÉ, 2011; JABLONSKI, 2014; CABRAL, 2015; CAMARGOS, 2010).

Nos trabalhos, seguiu-se a apresentação da origem comum da música e da matemática, a descrição do "experimento (ou experimentos)" [7] que Pitágoras teria feito [8], e que seria reconstituído nas atividades práticas com os alunos.

A narrativa da lenda é apresentada num contexto acústico: a audição de intervalos musicais é relacionada às razões de segmentos da corda vibrante que introduzem a noção de frequência, causa da formação de intervalos e escalas. Os conteúdos matemáticos acompanham a sequência da lenda, e assim, as razões são relacionadas ao conceito de frequência, as progressões aritméticas, as geométricas e os logaritmos são relacionados ao conceito moderno de som (com as características da altura e intensidade, demonstrando que enquanto a altura do som varia de acordo com uma PA de razão 1, a frequência desse mesmo som varia de acordo com uma PG de razão 2), consequentemente se introduzem a linguagem logarítmica (a = log2 f, onde **a** é a altura e **f** a frequência) e as curvas trigonométricas.

Essa narrativa acústica é feita com seus elementos modernos, não obstante a datação da lenda pitagórica, alguns séculos antes da contagem moderna. A datação se restringe a um marco retórico-temporal fornecido nos trabalhos. Já que, como se sabe, fisicamente não havia entre os gregos a noção de frequência e a teoria da vibração só seria desenvolvida no século XVII e matematicamente, não havia os logaritmos.

As noções musicais e matemáticas apresentadas nos trabalhos de pesquisa mencionados, encontram-se ancoradas na interpretação matematizada do fenômeno, numa concepção de ciência, de matemática e de música que se firmaram durante os séculos XIX e XX.

---

[7] Para compreender a diferença entre o uso de experimento e experimentação (SCHMITT, 1969; ALFONSO-GOLDFARB, BELTRAN, 2006).

[8] (BURKERT, 1972).

Os conteúdos estão organizados logicamente sob o ponto de vista do presente. No caso particular da utilização da lenda, os docentes baseiam-se, não nas classificações da música e da matemática que existiam então na Grécia[9], mas a partir de desdobramentos dos conhecimentos da física[10], posteriores na história.

Esse tipo de história é extremamente reproduzido na literatura[11], não apenas entre alunos, mas entre profissionais que fortalecem a vertente historiográfica caracterizada pela história de cunho continuísta que busca manter uma coerência interna do discurso matemático[12]. Não raramente, esse tipo de história, construído anacronicamente, elenca narrativas que buscam origens no passado. Uma segunda forma bastante recorrente é aquela que, apesar de propor uma perspectiva descontinuísta do conhecimento, busca na história fases de desenvolvimento do conhecimento científico, interpretando as sucessivas contradições do passado como trampolins para o progresso do conhecimento[13].

Buscando distanciar-nos dessas vertentes historiográficas, desenvolveremos algumas ideias a partir de uma interpretação devidamente contextualizada da lenda, o que nos permitirá esclarecer os papéis dos conhecimentos aritmético, geométrico e musical envolvidos na transmissão da lenda assim como a participação de elementos sociais e históricos da música na matemática.

---

[9] (BARKER, 1989, 2007; BARBOUR, 2004; BURKERT, 1972; CREESE, 2010; SZABÓ, 1978; WEST, 1992).

[10] (ROEDERER, 1998).

[11] (BIBBY, 2003; CROCKER, 1963; CUNHA, 2008; Du SATOY, 2007; OLIVEIRA, s/d, RATTON, 2002) dentre outros.

[12] Menções à lenda nas histórias da matemática. Vide: (BROMBERG, 2012).

[13] Para um resumo da historiografia sobres as tendências da escrita da história da matemática vide: (BROMBERG, SAITO, 2017; GRABINER, 1975).

Diferentes Abordagens

A música teórica na antiguidade grega era chamada de harmônica[14]. Esse termo não deve ser confundido com o adjetivo harmônico(a) derivado da palavra harmonia no nosso sentido moderno. A harmonia que conhecemos, pertence a estrutura da música ocidental tonal e se refere aos acordes com funções harmônicas (tônica, dominante, acorde de sétima etc), a escala diatônica tonal (escala maior ou menor), e ao sistema de afinação temperada.

A harmônica grega possui um contexto teórico completamente diverso deste nosso. A música harmônica era a música proporcional, isso quer dizer, que o que constituia um som musical na Grécia antiga era a sua virtude de ser proporcional. Mas o que eles queriam dizer com som proporcional? E como seria possível perceber a proporcionalidade do som?

Como mencionado, o âmbito da teoria musical era matemático, particularmente aritmético[15], assim, o número, suas espécies e relações fundamentavam os elementos musicais[16].

E como seria possível perceber a proporcionalidade do som musical? Nas artes, principalmente nas visuais, o sentido da visão podia perceber as relações entre as partes e/ou entre as partes e o todo, e estas relações podiam ser diretamente medidas. Mas na música, cujas qualidades sonoras perceptíveis são altura, volume, duração e timbre, a única proporcionalidade musical diretamente perceptível era a duração. Mas, na Grécia antiga, para um som ser musical, o que estabeleceria a proporcionalidade não era, nem a

---

[14] Na literatura grega, os termos música e harmônica são utilizados de forma análoga. (MATHIESEN, 2001).

[15] Vide nota 9. No sistema de Aristóteles, a Música era designada entre as chamadas ciências matemáticas, como a Ótica e a Astronomia, sendo que a Música era considerada, dentre elas, uma das mais naturais (Física, 194 a7).

[16] A razão entre números é o que define o intervalo musical. Segundo Szabó (1978), a palavra diastema exprime este conceito. (SZABÓ, 1978).

métrica, nem o ritmo, mas sua altura. E assim, eram os princípios e a ciência matemática que deveriam dar conta da representação da altura através dos entes aritméticos, geométricos e sonoros encontrados na música.

A descrição quantitativa e qualitativa dos conceitos por meio do número era possível através da noção de grandeza (*magnitudo*), uma vez que ela poderia ser reduzida a números. Contudo, porque medir significa em essência comparar, a grandeza (*magnitudo*) para ser medida, deveria ser material. E, para tanto, como já observara Ptolomeu ([?]-168 a.C.), a audição e a visão, necessitavam de algum método racional para abordar elementos que, de outra forma, não seriam capazes de julgar de forma apurada[17]. Em outros termos, era necessário encontrar uma maneira ou algum procedimento que permitisse "medir" na música o que, em essência, referia-se ao audível e invisível.

Na história da música, o procedimento que permitiu medir visualmente o som musical foi o instrumento chamado monocórdio.

Historicamente, o monocórdio é descrito como um instrumento formado por uma corda esticada sobre uma base de madeira, cujas extremidades estariam presas em duas pontes suspensas. Sobre a corda correria uma terceira ponte, móvel, que possibilitaria cortar a corda em duas partes nos pontos desejáveis.

A presença do monocórdio na lenda de Pitágoras estabeleceria uma data de existência do instrumento por volta do ano 100 a.C., o que, sendo verdadeiro, faria com que o instrumento tivesse existido dois séculos antes da sua primeira apariação textual no tratado conhecido por *Sectio canonis*, datado de 300 a.C. (atribuído a Ps. Euclides).

O tratado apresenta, já na sua introdução, a preocupação com o estabelecimento das razões numéricas intervalares. Na

[17] Vide *Harmonics*, livro I, 5, 10, de Ptolomeu em Barker, (1989).

introdução do tratado, o autor estabeleceu a relação entre razão e som musical:

> “ (...) Se pode dizer que as notas são colocadas por partes, pois é através da subtração e da adição, que se alcança o som necessário. Todas as coisas que podem ser postas juntas a partir de partes estão relacionadas umas as outras por razão numérica; e assim, com notas é necessário que estejam relacionadas umas as outras em razão numérica (...)[18].

No tratado, apesar da direta introdução sobre a temática sonora, as primeiras nove proposições não tratam da música, voltando à esta temática na décima proposição. Segundo os estudiosos, fica claro que o autor do *Sectio* conhecia as teorias pitagóricas de música. O tratado, baseando-se nos teoremas demonstrados nos livros V-VII-IX dos Elementos de Euclides[19], provia, em sua versão original, um tratamento aritmético da música. Contudo, o tratado chegou até nós através de diferentes versões. Nas versões de cunho aritmético, o tratado é destituído de diagramas-nos quais as linhas representariam cordas, enquanto que nas versões das tradições gregas e latinas do texto, recebeu emendas e correções, apresentando um movimento do âmbito aritmético para o geométrico[20]. Principalmente a inserção do capítulo sobre o monocórdio, teria sido uma das emendas acrescidas ao tratado original[21].

Ainda segundo os estudiosos, o *Sectio* foi um pequeno tratado escrito em resposta aos textos escritos pelo grego Aristóxeno de Tarento, discípulo de Aristóteles, que defendia a prioridade da percepção auditiva na ciência musical. No entanto, sem se disvincular das razões e de acordo com a noção de ciência

---

[18] Ps. Euclides 148.6-149.11, trad. BARBERA, 1991, p.116-7.

[19] (BARKER, 1989; MATHIESEN,1975; BARBERA, 1991; JAN, 1895).

[20] Ibid., (BARBERA, 1984; BURKERT, 1972).

[21] Os estudos das tradições manuscritas e das comparações entre as versões está detalhado em Barbera (1991). Não nos aprofundaremos neste tópico.

de Aristóteles, Aristóxeno defendia que, dado que a percepção musical não se dava de forma quantitativa, a investigação musical deveria se dar na forma em que a percepção ocorria.

O fato é que, a investigação da harmônica consistia em estudar as diferentes possibilidades de expressão dos elementos musicais através das razões. Aristóteles havia proposto que esta investigação poderia ter dois movimentos diversos. Dado que a ciência constituia-se da expressão matemática e da percepção, se a investigação partisse dos aspectos matemáticos, aqueles que nela participavam chamar-se-iam harmonicistas-matemáticos[22], e partindo em movimento contrário, harmonicistas-auditivos[23].

Quanto às técnicas de divisão do monocórdio, aqueles que as praticavam eram chamados de canonicistas. Eles recebiam esse nome por causa do *kanōn,* que eram as marcações numéricas inseridas sob a corda do instrumento, que indicavam os pontos de divisão da corda.

A ciência canônica não foi fundamentalmente transmitida pelo *Sectio*, mas sim, através dos comentários de Porfírio sobre o texto Harmônica de Ptolomeo (II d.C)[24]. Neles, Porfírio contou sobre Ptolemäi de Cyrene, a estudiosa a quem foi atribuída a definição e tratamento da ciência do monocórdio, ou canônica. Neste texto é apresentada uma ciência sistematizada do monocórdio[25], explicando que aqueles que manipulavam o instrumento eram considerados teóricos da música. Os canonicistas (*kanonikos*) eram harmonicistas que construiam razões em sincronia harmônica[26].

---

[22] Aristóteles, Metafísica 997b21,

[23] Aristóteles, Analíticos Posterior 79a1-2.

[24] Porfírio é responsável pela transmissão do Sectio no seu comentário sobre a Harmônica de Ptolomeu (1.5), mas é em Harmônica 22.22-24.6, 25.3-26.5 que ele cita Ptolemäi.

[25] Apenas os dois últimos capítulos do *Sectio canonis*, abordam o monocórdio e poderiam fornecer alguma explicação sobre a técnica de divisão do instrumento. Vide (ADKINS, 1963, 1967; CREESE, 2010).

[26] (BARKER, 1989).

Segundo Ptolemäi, a ciência teria precedido a existência do instrumento, o que parece ser confirmado através da argumentação trazida nos trabalhos de Arquitas e Filolau [27]. Curioso é que ambos os personagens aparecem, juntamente com Pitágoras, nas primeiras ilustrações da lenda, nas quais aparecem demonstrando os métodos e princípios da ciência em intrumentos outros, que o monocórdio.

Nessas formas de transmissão da lenda aparecem instrumentos, como o *aulos* e as flautas de Pan (instrumentos de sopro) [28], sinos (considerados instrumentos de percussão) [29] e martelos de ferro, que percutidos, estabelecem uma relação entre a variação de peso dos martelos e a velocidade do golpe. Segundo Ptolomeu, em muitos textos que tratam dessas demonstrações, os instrumentos descritos não são o monocórdio, porque não seriam instrumentos precisos[30].

As demonstrações poderiam ser públicas, e ao contrário do que pode parecer, eram consideradas execuções musicais embora não fossem execuções musicais artísticas[31]. No contexto da tradição teórica grega, quando algum autor se refereria a execução musical, o fazia com o termo grego *epideixis.* Em um fragmento de papiro,

---

[27] (CREESE, 2010).

[28] O aulos (pl.*auloi*) era um instrumento musical utilizado pelos gregos. Constituia-se de dois canos abertos na extremidade inferior, normalmente feitos em madeira, com três ou quatro furos cada e soprados através de palheta. A flauta de Pan é constituída por vários canos de comprimentos diferentes, emparelhados e amarrados entre si, fechados em suas extremidades inferiores e soprados com os lábios tangenciando a abertura dos tubos. Podia ser feita com diversos materiais, sendo o mais comum, o bambu.

[29] Os instrumentos descritos na lenda são instrumentos reais que apresentam diferentes formas de produção acústica. Em situações idealizadas, o modo de vibração de uma corda e de um cilindro aberto em ambas as extremidades são formalmente análogos. Contudo, não se espera o mesmo no caso de instrumentos reais, em cuja análise outros elementos devem ser considerados, como o mecanismo de excitação primária.

[30] Aparecem palavras como *chordai* (cordas) e *psaltērion* (instrumento de corda pinçada, do verbo *psallō*). (CREESE, 2010; BARKER, 1984; WEST, 1992).

[31] Em alguns casos o termo se refere à execução musical. Platão, por exemplo, utilizou o verbo *epideiknumi* para retratar récitas de poesia ou mesmo para retratar canções acompanhadas de instrumentos.

datado do quarto século (cerca de 380 a.C.), lê-se que aqueles que demonstravam (*epideixeis*) não eram como aqueles que sabiam tocar ou cantar, porque a alçada dos primeiros era o ramo teórico, enquanto os demais exerciam com mais habilidade o tocar das cordas[32]. Ptolemäi utiliza o termo *organikoi* para falar dos instrumentistas que não se preocupavam com a teoria, assim como Dydimo se referia aos cantores ou *phōnaskikoi,* cujos procedimentos não estavam de acordo com a razão.

Segundo Creese (2010) a canônica era uma ciência cujos postulados combinavam aqueles da música, da aritmética e da geometria, e não dependia do monocórdio, apesar de ter se modificado após o aparecimento do mesmo, e por causa do aparecimento deste último, as relações da aritmética, da geometria e da música modificariam a ciência musical.

Considerações finais

Como vimos, o objeto da ciência aritmética (*arithmos*), ou número constintuia-se também no objeto da ciência musical. Assim, na harmônica, as razões que correspondem aos intervalos musicais são os próprios objetos desta ciência. Porém, se tratarmos das razões numa ciência geométrica, a aritmética tornar-se-ia secundária, ou melhor, intermediária, porque as razões estabelecidas constituem-se num meio para alcançar os objetivos, podendo ser descartadas. Nessas últimas, as razões são particulares, enquanto na harmônica, são universais.

O monocórdio foi responsável por introduzir a geometria na ciência musical e com ele, a preocupação da representação e da exatidão.

Com esta introdução à história do monocórdio e de algumas de suas problemáticas tentamos, por um lado, mostrar a fundamentação matemática da ciência musical que caracteriza o

---

[32] (AVEZZÚ, 1994; CREESE, 2010).

monocórdio, chamando mais atenção para os aspectos aritméticos e geométricos envolvidos na questão. Por outro lado, prover dados contextuais da história e das filosofias da música e da matemática.

Acreditamos que a tendência à matematização dos conteúdos, como evidenciou a análise das pesquisas, traça uma história da matemática e da música que não contribui, nem para o entendimento dos conteúdos em seu contexto original, nem para o desenvolvimento teórico e prático dos conceitos modernos.

A matematização é uma caracterização da ideia de uma matemática pura aplicada, mas, como vimos, a teoria da música grega era matemática[33].

Pudemos também identificar que a representação da ciência musical apresentada na lenda, exigiu a nossa interpretação dos variados conhecimentos matemáticos, instrumentos e práticas, consequentemente mostrando como os objetos matemáticos e musicais não são universais e devem ser interpretados e compreendidos de acordo com as noções de ciência próprias às diferentes épocas na história.

Referências

ADKINS, Cecil. *The Theory and Practice of the Monochord*. PhD Thesis, State University of Iowa, 1963.

____, "The Technique of the Monochord," *Acta Musicologica*, vol. 39, fasc.1/2 1967, 34-43.

ALFONSO-GOLDFARB, A.M, ROXO-BELTRAN, M.H, *O saber fazer e seus muitos saberes: experimentos, experiências e experimentações*. São Paulo, Editora Livraria da Física/EDUC, 2006.

[33] Essa matematização se preocupa com a aplicação de seus conceitos e procedimentos aos objetos, que considera serem de outras áreas e parte de alguns pressupostos: que a matemática foi sempre a mesma, como se seu campo de conhecimento fosse unificado; e que os procedimentos matemáticos não precisam sofrer nenhuma modificação na história para poderem explicar de maneira satisfatória os fenômenos considerados. Vide: Roux (2010).

AVEZZÙ, G. Papyrus HibehI, 13: anonymi fragmentum de musica. *Musica e Storia* 2, 1994, 109-138.

BARBERA, André. Placing *Sectio canonis* in Historical and Philosophical Contexts, *Journal of Hellenic Studies* 104, 1984, 157-161.

____,*The Euclidean Division of the Canon: Greek and Latin Sources*. Lincoln and London, University of Nebraska Press, 1991.

BARBOUR, James M. *Tuning and Temperament. A Historical Survey*. New York, Dover, 2004.

BARKER, A. *Greek Musical Writings vol.1: The Musician and his Art*. Cambridge, Cambridge University Press, 1984.

____, *Greek Musical Writings: II. Harmonic and Acoustic Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 1989.

____, *The Science of Harmonics in Classical Greece*, Cambridge, Cambridge University Press, 2007.

BARNABÉ, Fernando Moreira. A melodia das razões e proporções: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática**.** Dissertação de mestrado, Pós-Graduação em Educação, USP, São Paulo, 2011.

BIBBY, N. *Music and mathematics: From Pythagoras to Fractals*. Oxford, Oxford University Press, 2003.

BROMBERG, C. Música e História da Matemática. *História da Ciência e Ensino* vol.6, 2012, 1-15.

BROMBERG, C., SAITO, F. A História da Matemática e a História da Ciência. In: BELTRAN, M.H; SAITO, F.; TRINDADE, L. (org.) *História da Ciência: Tópicos Atuais*. São Paulo, Livraria da Física, 2010, 47-71.

BROMBERG, C. e SAITO, F., *As matemáticas, o monocórdio e o número sonoro*, Livraria da Física, CAPES, OBEDUC, 2017.

BURKERT, W., *Lore and science in ancient Pythagoreanism*. Cambridge, University Press, 1972.

CABRAL, Rafayane Barros. Matemática e Música: Uma Proposta de Aprendizagem. PROFMAT em Matemática, UFG- Jataí/GO, 2015;

CAMARGOS, Chrisley B. Ribeiro, Música e Matemática: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem, Dissertação de mestrado em Educaçao, UFOP, Ouro Preto, 2010.

CENTRONE, B., L'VIII libro delle 'Vite' di Diogene Laerzio. In: HAASE, W. (ed.) *ANRW*, II 36,6. Berlin/NY, Walter de Gruyter, 1992, 4183-4217.

CREESE, David. *The Monochord in Ancient Greek Harmonic Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

CROCKER, Richard. Pythagorean Mathematics and Music**.** *The Journal of Aesthetics and Art Criticism*, Vol. 22, No. 2. (Winter, 1963), pp. 189-198.

CUNHA, N. P. *Matemática e Música: diálogo interdisciplinar*. 2 ed. Recife, Universitária da UFPE, 2008.

Du SATOY, M. *A Música dos Números Primos*, Rio de Janeiro, Ed.Zahar, 2007.

GRABINER, J.V. The Mathematician, The Historian, and the History of Mathematics. *Historia Mathematica* 2, 1975, p.439-447.

JABLONSKI, Enilso. Frações e Música: Ligações Históricas e Atividades Didáticas. Dissertação de Mestrado. Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2014.

JAN, K. von. *Musici Scriptores Graeci*. Teubner, Leipzig, 1895.

JAMBLICO, *Vida Pitagórica*. Editorial Gredos. Madrid, Espanha, 2008.

MATHIESEN, T., Greek Music Theory. In: The Cambridge History of Western Music Theory (ed.) Thomas Christensen, Cambridge, Cambridge University Press, 2001, p.109-135.

OLIVEIRA, A. M; SILVA, A. *Curso ilustrado de matemática moderna,* São Paulo: Ed. Lisa, [s.d.] v. 1.

RATTON, M. A relação harmoniosa entre os sons e números, *Boletim Arte Matemática na Escola: TV* Escola, 2002, p. 34.

ROEDERER, Juan, *Introdução à Física e Psicofísica da Música*. Trad. Alberto L. da Costa, EDUSP, São Paulo, 1998, reimpr. 2002.

ROUX, S., Forms of Mathematization 14^{th}-17^{th} Centuries. *Early Science and Medicine* 15, 2010, 319-337.

SCHMITT, C. Experience and Experiment: A Comparison of Zabarella's view with Galileo's in De Motu. *Studies in the Renaissance*, England, vol.16, p.80-138, 1969.

SZABÓ, Arpád. *The beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht: Holland/Boston: USA, D.Reidel, 1978.

WEST, L.M. *Ancient Greek Music*. Oxford, Oxford University Press, 1992.

Capítulo 6

O que pode a apropriação de elementos artísticos na pesquisa em Educação Matemática?

Roger Miarka [1]
Paola Judith Amaris-Ruidiaz [2]
Jorge Isidro Orjuela-Bernal [3]
Diego De Matos Gondim [4]

Introdução

Um convite é lançado: escrever para uma obra coletânea cujo tema é "Artes em Educação Matemática". A base para um tal convite? Uma materialidade que se mostra em termos de artigos, dissertações e teses produzidas em um coletivo de pesquisadores que mobilizam elementos usualmente apropriados pela Arte na pesquisa em Educação Matemática.

---

[1] Um errante, atualmente habitando, como professor e pesquisador, o Departamento de Educação Matemática e o Programa de Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro. Por ora, pode ser contatado por meio do e-mail roger.miarka@unesp.br

[2] Uma multiplicidade de afetos foram produzindo um Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro. É atualmente Pós-doutoranda na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. E-mail: paolaamaris@gmail.com

[3] Viajante apaixonado pela natureza e pela vida. Um inquieto pelo saber e pelas comunidades indígenas que transita no curso de doutorado em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP) Campus de Rio Claro. E-mail. jorge.orjuela@unesp.br

[4] Aqui, ali, um, dois, outros... vários... desfazendo(-se) na materialidade de um corpo, um pensar. Traduzindo(-se) em artes, cinema, imagens, Educação Matemática, Filosofia... traduzindo uma parte na outra: será arte? Vida? Nesse ato, atualmente estudante de Doutorado em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro e em Filosofia da Université Paris 8. (cotutela). Bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2017/23227-1. E-mail: gondiminit@hotmail.com

Uma possível estratégia para esboçar uma proposta nesse bojo seria partir de distinções entre obra/arte e pesquisa/ciência, contudo as discussões e reflexões que nos interessam nada têm a ver com a separação ou a caracterização do que as fazem peculiares, mas com o que podem elas juntas, neste caso, no campo da Educação Matemática.

No rastro desse posicionamento, nos perguntamos: Como linguagens usualmente utilizadas pelas Artes podem ser apropriadas pela produção da pesquisa em Educação Matemática, problematizando a área?

Para isso, operamos com a Filosofia da Diferença, no que concerne à produção de pensamento, e, neste capítulo, mobilizaremos como materialidade para nossas discussões em torno de nossa pergunta-proposta duas dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, todas defendidas em 2018 e de autoria do Coletivo Cronopi@s, da Universidade Estadual Paulista, câmpus de Rio Claro. Um grupo que tem buscado operar com diferentes dimensões do pensamento em suas pesquisas em Educação Matemática, entendendo que, assim, pode promover a diferença como produtora de conhecimento. Nessa perspectiva, a Arte ou mesmo a Educação Matemática não são um fim em si mesmas. Juntas são mobilizadas pela possibilidade de, nessa composição, criar modos inventivos e com potência de produção de elementos outrora ainda não mobilizados, tanto por uma área como por outra.

A Filosofia da Diferença como pano de fundo

Falar da diferença como ponto nevrálgico em uma filosofia, assumindo-a, trata-se, dentre outras coisas, de um ato político, na medida em que lança luz para um elemento historicamente tido como coadjuvante no processo de produção de conhecimento, em que um paradigma identitário há muito tempo impera. Na lógica identitária, as compreensões de mundo se dão junto a movimentos de categorização ou de generalização. A produção de conhecimento se dá, especialmente, por indução ou dedução, que, ainda que tomados como formas opostas de raciocínio – a primeira parte de fatos particulares e visa a uma conclusão geral; a segunda parte do geral para o particular –, ambas tomam a generalidade como elemento fundamental, seja como ponto de partida seja de chegada.

De acordo com Deleuze (2006), a igualdade se trata de uma ilusão ótica, efeito de um jogo muito mais profundo: o da diferença e da repetição. No entanto, por conta de um paradigma identitário latente, a diferença se viu acamada como subalterna do idêntico, sendo, assim, tolhida em sua potência de criação. O primado da igualdade, seja qual for a maneira como é concebida, opera junto a um mundo de representações e, por conseguinte, refém de um mundo já dado. A busca pelo idêntico aprisiona o homem em um passado já produzido, enquanto a diferença lança-o a um por vir de possíveis. Assim, junto a Deleuze, "queremos pensar a diferença em si mesma e a relação do diferente com o diferente, independentemente das formas da representação que as conduzem ao Mesmo [...]" (DELEUZE, 2006, p. 8).

Consideramos ser importante dar algum destaque ao conceito de *repetição* desenvolvido por Deleuze (2006), que poderia ser facilmente mal interpretado como repetição de aspectos identitários de algo. A *repetição* da qual o autor fala diz respeito à *repetição da diferença*, que sempre acontece diferenciando-se. Em outras palavras, a *repetição da diferença* traz a potência de produzir *diferenças* a partir de *diferenças*, produzindo novas variedades, que "opõe-se, pois, à generalidade, como generalidade do particular, e à repetição, como universalidade do singular" (DELEUZE, 2006, p. 3). Com isso, Deleuze nos mostra que a *diferença* é sempre possível e prenha de outras diferenças, que podem criar uma variedade de modos de perceber e engajar-se com o mundo.

O Coletivo Cronopi@s, da Universidade Estadual Paulista, tem buscado operar segundo essa lógica, por meio de composições que assumem os mais diversos elementos, muitos deles usualmente tomados como artísticos e ainda pouco utilizados na pesquisa em Educação Matemática, como poderá ser visto na seção que se segue.

Uma materialidade para a discussão

Apresentaremos, nesta seção, duas pesquisas de mestrado e uma de doutorado em Educação Matemática realizadas pelo Coletivo Cronopi@s, que buscaram produzir(-se) assumindo a diferença como promotora de conhecimento. As duas primeiras trabalharam com grupos culturais e a terceira com um grupo de professores de Matemática, e todas operaram com conceitos e preocupações do bojo da Filosofia da Diferença e com elementos usualmente utilizados pelas Artes, como imagens, literatura e cinema. Sugerimos fortemente aos leitores deste capítulo que acessem esses trabalhos, disponibilizados em um repositório online, cujo endereço se encontra em nota de rodapé e junto às referências no fim deste capítulo.

A primeira dissertação, de título *Ribeiras de Vales... e experimentações e grafias e espaços e quilombolas e...*[5], de autoria de Diego de Matos Gondim (2018), visou produzir junto aos movimentos de criação e produção de práticas culturais que escapassem das categorias institucionalmente demarcadas de uma comunidade quilombola do Vale do Ribeira, Estado de São Paulo. Essa produção se entregou a um percurso cartográfico, em que se aspirava operar um corpo quilombola com a Educação Matemática. No movimento de pesquisa, Gondim (2018) utilizou-se dos mais variados instrumentos metodológicos – entrevistas, diário de campo, fotografias, filmagens etc. –, cujas produções se conformaram em uma escrita inovadora e inventiva, afirmando

[5] Esta pesquisa foi financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/77088>.

uma multiplicidade de trajetórias dissidentes, compondo com uma série de afetos que pediam passagem na comunidade que acompanhou. Nesse percurso, de acordo com Gondim, a pesquisa agenciou-se a

> [...] câmeras e mar e rios e ostra e mangue e marés e escola e quilombo e conversas e fotografias [... aprendendo com] um acaso e com uma eventualidade do espaço; do lugar como aqui e agora. [... Assumiu] pensar com corpo como um pensar com espaço; um saber-com-corpo como um saber-com-espaço. [... Inventou] com acasos vertiginosos [... que deram lugar a um] espaço-tempo-lugar coetâneo às práticas que [naquele] "aqui e agora" funciona[va]m (GONDIM, 2018, p. 7).

Nessa pesquisa, a imagem não é assumida enquanto representação da comunidade quilombola do Mandira. Ao contrário disto, apresenta-se em imagens expressando os múltiplos blocos de individuação do povo mandirano. Ela se mostra em (e como) imagens. Imagens-individuação. As múltiplas cores se desfazem em palavras ao mesmo tempo em que as palavras se desfazem em imagens. Os mundos mandiranos vão se apresentando enquanto experiência de um plano de imanência que insiste em resistir. As imagens, assim, não se ocupam em representar o lugar de realização da pesquisa, mas como "gênese" de uma produção de si e do mundo. São signos que possibilitam a produção de um quilombo e a experimentação de blocos de sensações de uma vida quilombola no interior do Estado de São Paulo. Em outras palavras, as imagens são deslocadas da função "imagem-representação" para o funcionamento de uma "imagem-individuação" (SAUVAGNARGUES, 2013).

Ao entregar um conjunto de câmeras para as crianças da escola desta comunidade, Gondim (2018) realizou uma oficina que, em linhas gerais, buscava "fotografar a comunidade". Em sua produção de dados, não havia uma "pretensão" rígida com esta ação, uma vez que as fotografias das crianças não se limitavam à representação do lugar, à narratividade do espaço ou à sua historicidade; ao contrário disto, se apresentavam como possibilidade de abertura do "corpo para a passagem das cenas do mundo [mandirano] em sua proliferação de mensagens que assume assim o sentido de um registro" (FONSECA; NASCIMENTO; MARACHIN, 2015, p. 119) do instante.

Poder-se-ia dizer que as imagens produzidas arrastaram a escrita para um meio de puro fluxo contínuo e de intensidades imanentes, possibilitando um devir-infância na pesquisa realizada em Educação Matemática, misturando cores, imagens, letras etc. As imagens usadas na dissertação de mestrado expressam a potência de uma invenção se desdobrando em experimentações de mundos ainda por vir, não-narrativos, a-históricos, assimétricos, a-hierárquicos... Compõem com cores do Mandira um quilombo em completa ação de coloração infante. As diferentes cores e tamanhos de fontes vão acompanhando a produção individuante dos blocos de sensações produzidos pelas crianças, expressos das mais diversas maneiras, como em "tio, vou aumentar tudo com esse zoom".

A segunda dissertação, de título *Indígenas, Cosmovisão e Ensino Superior: [algumas] tensões*[6], de autoria de Jorge Isidro Orjuela Bernal (2018), investigou a permanência de três estudantes indígenas que ingressaram na Universidade por meio de políticas de ação afirmativa, girando em torno das linhas de tensão que emergiam entre a cosmovisão indígena e o pensamento acadêmico universitário. Para isso, Orjuela Bernal (2018) também fez uso da cartografia "como uma ferramenta na produção de subjetividades para a abordagem de caminhos, territórios e linhas de força que atravessam tanto a universidade como instituição quanto os indígenas imersos no sistema educacional" (ORJUELA-BERNAL, 2018, p. 4). Algo importante de destacar: as linhas de tensão evidenciadas nesse trabalho não eram tomadas como explicativas de

[6] Este pesquisa contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/154217>.

uma determinada situação, mas como possíveis produtoras de subjetividades.

O autor dessa pesquisa partiu de uma proposta de escrita que assumiu o uso de diferentes elementos artísticos, dentre os quais destacamos a utilização de diversos tipos de grafia, o uso de uma linguagem poética e a inclusão de imagens, formas e traços que fizeram parte e atravessaram toda a composição denominada de escrita-tecido sobre a qual...

> Tem-se
> Textos tecidos tendenciosamente
> Território[s]
> Traços, transformações.
> Textos,
> Trânsitos tímidos, tempestivos.
> Trilhas, tumbas, templos
> Tentações, traições, tripas
> Tentativas.
> Termômetro tibetano-tropical.
> Teatro topológico.
> Tequila, temores
> Torres trepadas
> Transmutações, turbulências
> Tenta-se tirar tranquilidades,
> Tornando-se, trazendo...
> ...tensões!!![7]

Uma escrita-tecido que convida seu leitor a operá-la não apenas desde a leitura e as compreensões e sensações que esta possa produzir, mas também junto à movimentação física do trabalho, com o intuito de tencionar o olho-corpo que percorre as palavras que ali unem, entrelaçam e amarram linhas e entrelinhas que escondem risos, silêncios, lutas e sentires.

A tese de doutorado, de título *Encontros e fluxos numa escola: educadora matemática em potência de criação, fratura e resistência*[8],

[7] (ORJUELA-BERNAL, 2018, p. 13).

de autoria de Paola Judith Amaris Ruidiaz (2018), debruça-se sobre o dispositivo Escola e professores que nela ensinam para refletir sobre o tema “corpo e educação”, propondo-se a pensar: *O que podem corpos que assumem suas marcas e, com elas, produzem um corpo de encontros?* Para isso, assumiu uma prática cartográfica para produzir um mapa que pudesse expor, fraturar e problematizar as relações de poder que se constituem na Escola, por meio de uma experiência sensível com um grupo de professores, em meio a dois espaços de encontros, o primeiro organizado pela própria Escola, a “Aula de Trabalho Pedagógico Coletivo” (ATPC), com características institucionais; o segundo, organizado pela pesquisadora, um espaço de encontros junto aos professores de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, que buscava discutir as marcas desses corpos e produzir junto a seus corpos-marcados. A produção da tese assumiu, ainda, uma política de escrita híbrida, em que línguas espanhola e portuguesa fazem parte de uma mesma composição, por entender que essa forma daria vazão aos afetos que pediam passagem. Avessa a uma tentativa de representação do ocorrido, convida o leitor a passear em uma sequência à sua escolha por diferentes textos, que englobam discussões e reflexões sobre corpo e educação, narrativas produzidas nos espaços habitados e aforismos não explicativos. Conforma-se, assim, como

> Uma escrita-corpo de uma colombiana junto a um grupo de professores, em que uma linguagem híbrida se mostrou mais natural, o que nos levou a uma política de escrita-híbrida, um texto polifônico, que não se trata nem de português, nem de espanhol, mas de uma outra escrita, um outro modo de escrita. Assim, ¿Qué importa quién habla? quando o objetivo é a vazão dos afetos? Criamos assim uma escrita que tenta desfolhar uma política de escrita que se engendra no fazer(-se) pesquisa, no fazer(-se) escrita (AMARIS-RUIDIAZ; MIARKA, 2018, p. 16).

---

[8] Esta pesquisa foi financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152579>.

A tese assumiu, ainda, a própria literatura como elemento de criação e, inspirada no livro *O Jogo da Amarelinha* (CORTÁZAR, 2011), configurou-se como um texto com diversos caminhos possíveis de leitura. No rastro do romance de Julio Cortázar, é oferecida a seus leitores como uma anti-novela, apresentando-se como um texto com diversas formas de ler, em que, tal como Cortázar diz em uma de suas entrevistas, é feita para "que o leitor se incomode".

A aposta é no incômodo como possibilidade de tirar o leitor de seus modos habituais de leitura e, com isso, convidá-lo a realizar outros movimentos inventivos, uma vez que já não há um único caminho certeiro oferecido pela autora. O jogo de leitura se faz

> com uma pequena pedra que é preciso empurrar com a ponta do sapato. Ingredientes: uma calçada, uma pedrinha, um sapato e um belo desenho feito com giz, preferivelmente colorido. No alto, fica o Céu, embaixo a Terra, é muito difícil chegar com a pedrinha ao Céu, quase sempre se calcula mal e a pedra sai do desenho. (CORTAZAR, 2011, p. 252).

Nessa perspectiva, existir é estar exposto, e essa tese é feita para gerar novos modos de ver, de sentir, de dizer, de pensar um modo outro de se relacionar com o mundo, que possa possibilitar outras formas de ação e de resistência.

Apresentadas as propostas dos trabalhos e o modo como se apropriaram de ferramentas usualmente utilizadas pelas Artes, não tentaremos, neste capítulo, esgotá-los, mas produzir junto a eles tendo como horizonte a pergunta "Como linguagens usualmente utilizadas pela Arte podem ser apropriadas pela produção da pesquisa em Educação Matemática, problematizando a área?". Para isso, optamos por apresentar os resultados, em um primeiro momento, por meio de aforismos como efeitos sem causa e, em seguida, por meio de um texto em que se explicita a luta do Coletivo Cronopi@s, em que tais trabalhos foram produzidos.

> Aforismo tem sua origem na palavra grega aphorismós, que, entre outras acepções, tem a de "definição curta", "sentença". [...]

> Sua potência se mostra por não carregarem em si a possibilidade do esgotamento. Pelo contrário, são curtos para funcionarem como convites a novas invenções. Operam eles mesmos como signos a serem mobilizados em busca de novas produções de mundo. Nesse sentido, não há como prever de antemão se aforismos são bons ou ruins. Tal tentativa de adjetivação apenas faria sentido em uma lógica binário e representativa. Ao priorizar a invenção ao invés da representação, seu funcionamento se dá na medida em que são operados e criam múltiplas saídas. (GONDIM; MIARKA, 2018, p.172)

Na esteira dessa proposta, dois apontamentos nos são caros. O primeiro é que não buscaremos vincular os aforismos diretamente a um ou outro trabalho apresentado nessa seção, ainda que o leitor possa produzir esse vínculo se assim desejar. O segundo é a sugestão de que nosso leitor abandone uma lógica explicativo-interpretativa desses pequenos textos, deixando-se afetar por eles. Que esses aforismos os atravessem e, nesse processo, que cada um opere com eles do modo que desejar. Quanto à luta, apresentada na sequência, que esta não sirva de referência, mas de inspiração.

[1]

Quando se cria a partir das afetações, desde a própria experiência, "pode surgir um meio que não tenha outra finalidade senão ele mesmo"[9]. Ao assumir a Arte como ato, e como forma de pensamento, este traz consigo a potência da produção de afetos que consigam provocar acontecimentos, como o sorriso do gato de Lewis Carroll em *Alice no País das Maravilhas*. Eis o escape, um gesto que pode provocar efeitos sem causas, na medida em que o escape nunca age só.

[9] (AGAMBEN, 1995, p. 70).

[2]

“Inventar mundos: pesquisar. Que mundos são inventados em educação matemática?”[10]

[3]

Ndosertanëng

Ndás cuantsabobuatm che ndosertaná ca
¿ndoñ mondoben jualiamëng
librësangá o betiyëng?

Canÿeng y inning
batsá y bëtscá mondëtatsëmb.

Bëneten
atsbe bëtstaitá tmojuantsabuaché
canÿe librësá:
tmonjauyan tonday condëtatsëmbo ca.

Ibetn
shinÿoc jotbeman
chabe cucuatsiñ
coca tsbuanach jtsebuertanayan
uayasac jtsichamuan
ndayá chiñ bnetsabinÿnan.[11]

Analfabetas

A quem chamam de analfabetas,
aos que não sabem ler
os livros da natureza?

Uns e outros
algo e muito sabem.

Durante o dia
ao meu avó entregaram-lhe um livro:
disseram-lhe que
ele não sabia nada.

Pelas noites
se sentava junto ao fogão
Em suas mãos
girava uma folha de coca
e seus lábios iam dizendo
o que nela olhava.

[4]

“E se tenho aqui que usar-te palavras, elas têm que fazer um sentido quase que só corpóreo, estou em luta com a vibração

[10] (CLARETO; ROTONDO, 2015, p. 667).

[11] Poema escrito por Hugo Jamioy Juagibioy, poeta indígena colombiano da etnia Camëntsá, ou Camuentsa Cabëng Camëntsá Biya (que, segundo o mesmo autor, quer dizer “daqui mesmo, homens daqui com pensamento e língua própria”). Presente em (ORJUELA-BERNAL, 2018, p. 86). O poema original está escrito na língua nativa do poeta, que realizou ele próprio uma tradução para o espanhol, da qual deriva a tradução a português, realizada por Orjuela Bernal.

última. Para te dizer o meu substrato faço uma frase de palavras feitas apenas dos instantes-já."[12]

[5]

Assumir a presença como uma manifestação de estar no mundo como exercício. É essa a presença que se convoca quando se faz uma tese criada por diversos traços e fragmentos, que desenham forças para serem atravessadas. Tese como mapa móvel! Ele vai mudando na mesma medida em que se desenha e se apaga. Por isso sua paisagem pode mudar a cada momento, produzindo um lugar da experiência, na possibilidade de a cada momento sermos outros, em um jogo aparentemente contraditório em que deixamos de ser nós mesmos sem que deixemos de ser nós mesmos. Acontecimentos que se constituem no instante em que se assume *um território como lugar de passagem*[13].

[6]

Aforismos? Criações feitas no instantes-já?

[7]

Estaba allí, como quien pide que lo tome, había muchos idénticos a él, pero diferentes en cuanto a lo que causaba, plausiblemente lo fui tomando, rozándolo, acariciándolo. Su olor era majestuoso, estaba un poco gastado, como si hubiese pasado por muchas vidas. Me conmovió su imagen, ¡Se puede jugar con él!, pensé. Lo tomé entre mis dedos, poco a poco acariciando su cuerpo, una seducción mutua e inmediata. No le pedí permiso, lo invadí y me invadió al instante. Me causó curiosidad su pregunta, ¿Encontraría a

[12] (LISPECTOR, 1994, p. 32).

[13] (DELEUZE; GUATTARI, 1997, p. 132).

la Maga? Me conmovió, no lo dejé volver a su lugar, lo tomé, lo hice mío y cada vez me sorprende cuando lo ocupo, no lo he descifrado, por eso siempre me sorprende, y sí, llevaré esto en mente: “una vez descifrado, muere inmediatamente”.

[8]

Uma escrita como potência criadora exposta como uma escrita singular à afirmação da vida. Desta forma, assume-se uma *política de escrita* [14] ligada ao processo de subjetivação que caracteriza a possibilidade de que as pontes das línguas passem pelas afetações. Ao assumir a experimentação de uma escrita a partir das afetações de uma pesquisa, esta não assume como ponto de partida uma prisão linguística, nem uma distinção entre realidade e ficção. Assume uma composição. Com isso, nesse exercício, distancia-se da busca por uma “explicação da pesquisa”, almejando que a pesquisa “aconteça” para o leitor em meio a um plano de intensidades constituído pelo pesquisador, formada por linhas de intensidades que visam à produção e à problematização. Nessa perspectiva, as afetações fazem mobilizar uma escrita-experimentação com aquilo que afeta, produz e vibra. Com esses “instantes-já”, que se pode produzir? Assume-se que são as próprias palavras que dão força ao instante.

[9]

Que práticas são inventadas na academia para que ela torne a vida mais potente?

[14] (RANCIÈRE, 1995).

[10]

Um ato de criação é assumido. Práticas de linguagens outras fundadas por meio de uma política estética, para produzir atos estéticos e políticos, e que junto a isto sejam possibilitados uma ética e um rigor "com que escutamos as diferenças que se fazem em nós e afirmamos o devir a partir dessas diferenças"[15], tendo como critério a afirmação da potência criadora.

[11]

"Um enfrentamento: o escrever junto ao pesquisar: como línguas são inventadas?"[16]

[12]

Criar fraturas nos próprios campos do saber requer estratégias que possibilitem produzir pesquisas baseadas nos encontros... O "toque com o outro, desde o mais próximo de si que é a interrupção de uma existência a partir de uma ressonância interior de pele - o toque do outro"[17]. Isso pode se produzir desde a Arte ou desde a Educação Matemática. "Todas as entradas são boas, desde que as saídas sejam múltiplas"[18]. Assumir pesquisas da Educação Matemática como obras de arte produz uma política sensível, assim como assumir obras artísticas como possibilidade científica poderia inventar outras práticas. Apropriar-se de práticas artísticas para operar com afetos na academia tem a potência de construir uma visibilidade e uma inteligibilidade dos acontecimentos.

[15] (VILELA, 2000, p. 39).

[16] (CLARETO; ROTONDO, 2015, p. 668).

[17] (RANCIÈRE, 2005, p. 32).

[18] (ROLNIK, 1989, p. 2).

[13]


[19]

[14]

“Sei como inventar um pensamento. Sinto o alvoroço da novidade. Mas bem sei que o que escrevo é apenas um tom.”[20]

[15]

Seguir as trajetórias múltiplas em um acaso do espaço e em uma eventualidade do lugar: eis o nosso desafio. Engendrar-se nas

[19] (GONDIM, 2018, p. 73).

[20] (LISPECTOR, 1994, p. 27).

dimensões múltiplas de si mesmo. Pesquisar seguindo singularidades de imagens-individuação, sem se prender à representação. Assumir um *instante-já*. Dobrar uma parte na outra, "... que é uma questão de vida ou morte – será arte?"[21]

[16]

"O futuro que estamos aqui inaugurando é uma linha metálica. É alguma coisa que de propósito é destruída. De tudo o que vivemos só ficará esta linha"[22]

Uma luta em meio a discussões que não se findam...

Segundo o filosofo francês Rancière (1996), ainda que distintas, a linguagem artística e a linguagem argumentativa não se contrapõem, estabelecendo a possibilidade de que as duas tomadas ao mesmo tempo possam inaugurar criações políticas de diversas índoles. Nessa lógica, o Coletivo Cronopi@s se pergunta como diferentes tipos de linguagens artísticas podem ser operadas pela produção – entendida como invenção política – da pesquisa em Educação Matemática, e como essas pesquisas permitem problematizar a própria área.

Nesse sentido, assumimos a invenção política de pesquisa em Educação Matemática como algo singular que opera como uma máquina de guerra[23] dentro de diversos campos, entre eles a própria Arte, a Educação, a Matemática, a Educação Matemática etc. Ou seja, produções que compreendem práticas singulares que desenvolvemos como professores-pesquisadores nas quais, de um modo ou outro, geram-se desafios ao "poder", à governabilidade, à dominação do território, neste caso da Educação Matemática, da

[21] (GULLAR, 2004, p. 335).

[22] (LISPECTOR, 2016, p. 383).

[23] (DELEUZE; GUATTARI, 1997).

Escola, do Currículo, da Universidade e até da forma de fazer pesquisa.

Cabe mencionar que tais práticas, parafraseando Deleuze e Guattari (1997), procuram ocupar o espaço, territorializando-o e desterritorializando-o, para criar um outro espaço-tempo e nas quais consideramos que existe, necessariamente, no seu processo de serem feitas, de acontecimento, uma ligação com um sensível que se reconfigura desde o corpo – poderíamos dizer, seguindo Rolnik (2006), *vibrátil* – a experiência e a percepção, do tempo e do espaço; conexões que produzem outras afetividades, outras temporalidades.

Ora, as produções ou invenções políticas que se geram com uma máquina de guerra estão na direção da necessidade de potência, que, para se concretizar, precisa de escapes; quer dizer, as produções que fazem uso de linguagens artísticas em Educação Matemática partem ou levam em consideração a própria rigidez da área para operar com esses elementos como possíveis disparadores que engendram intensidades que habitam na margem da pesquisa e que, ao serem suficientemente escutadas, desembocam em forças que fraturam, movimentam e reafirmam a vida.

No entanto, operar como máquina de guerra não implica necessariamente abandonar um território já posto, no caso, a Educação Matemática e de seus modos de fazer pesquisa, a institucionalidade, o sistema capitalista etc. Trata-se, sim, de uma desmonopolização da ação desses territórios sobre nós mesmos, dos modos em que percebemos, nos afetamos e agimos no mundo. Tudo isto acarreta um processo de criação no qual consideramos a importância de sermos mobilizados por meio de linguagens artísticas.

É importante assinalar, ainda, que a materialidade, a "obra", em termos de um produto como resultado de uma pesquisa que se vale de linguagens da arte, não opera por si só como máquina de guerra, pois ainda que assim já tenha sido operada por quem a "produziu", ela se refaz novamente a cada vez, com outras afetações, percepções e agenciamentos junto a quem se dispor operar com ela em novas interações. Tal e como o reconhecemos nas palavras do Calvino (1990), ao se referir às potencialidades do artista, que inventa politicamente, e dos modos pelos quais operamos com suas obras:

> A fantasia do artista é um mundo de potencialidades que nenhuma obra conseguirá transformar em ato; o mundo em que exercemos nossa experiência de vida é um outro mundo, que corresponde a outras formas de ordem e de desordem; os estratos de palavras que se acumulam sobre a página como os estratos de cores sobre a tela são ainda um outro mundo, também ele infinito, porém mais governável, menos refratário a uma forma. (CALVINO, 1990, p. 113).

Assim, assumimos que as pretensões com respeito às invenções políticas de pesquisa em Educação Matemática devem giram em torno da promoção de uma espécie de prática sensível militante em que o sujeito professor-pesquisador se abra às realidades dos grupos humanos com os quais, de modo conjunto, trabalha, contribuindo com a possibilidade de mudanças, entendidas não de forma exclusiva em seu modo de viver, de afetar-se e agir no mundo ou se ocupando das próprias micropolíticas, mas também do sensível daqueles que também lutam coletiva e individualmente em seus processos para reafirmação da vida; essa vida que está em constante ameaça pelo apressamento da totalidade e da homogeneização.

Por fim, mas sem findar, mais do que politizar a Educação Matemática pensamos em modos de fazer uma Educação Matemática política e, neste caminho, se faz potente o uso de linguagens artísticas diversas que promovam a criação de condições para impedir os tantos hábitos e retornos que nos atravessam e tentam impor determinações de quem somos e de quem seremos, promovendo, assim, novos começos, novas invenções.

Operantes

AGAMBEN, Giorgio. *Moyens sans fins: notes sur la politique.* Paris: Rivages, 1995.

AMARIS-RUIDIAZ, Paola Judith. *Encontros e fluxos numa escola: educadora matemática em potência de criação, fratura e resistência*. 2018. 172 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/155962>. Acesso em: 10 fev. 2019.

AMARIS-RUIDIAZ, Paola Judith; MIARKA, Roger. *Escrita-Corpo-Experiência e Literatura:* que pode o escrever na pesquisa? Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 11, n. 3, p. 13-31, 2018.

CALVINO, Italo. *Seis propostas para o próximo milênio*. Tradução Ivo Barroso. São Paulo: Companhia das Letras, 1990.

CLARETO, Sonia Maria; ROTONDO, Margareth Aparecida Sacramento. *Pesquisar:* inventar mundos com Educações Matemáticas. Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, n.18, p. 661-687, 2015.

CORTÁZAR, Julio. *O Jogo da Amarelinha.* Tradução de Fernando de Castro Ferro. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2011.

DELEUZE, Gilles. *Diferença e repetição. 1*. ed. Rio de Janeiro: Graal, 2006.

DELEUZE, Gilles; GUATTARI, Felix. *Mil Platôs:* volume 5. São Paulo: Editora 34, 1997.

FONSECA, Tania Mara Galli; NASCIMENTO, Maria Livia do; MARACHIN, Cleci. (Org.). *Pesquisar na diferença:* um abecedário. Porto Alegre: Sulina, 2015.

GONDIM, Diego de Matos. *Ribeiras de Vales ...e experimentações e grafias e espaços e quilombolas e...* 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" (UNESP), Rio Claro, 2018. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152579>. Acesso em: 10 fev. 2019.

GONDIM, Diego de Matos; MIARKA, Roger. *Pensar com o corpo como pensar com o espaço:* aforismos imagéticos que afirmam um aprender por trilhas. Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 23, n.60, p.169-183, out./dez. 2018.

GULLAR, Ferreira. Traduzir-se. *Toda poesia*. 12. ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 2004.

LISPECTOR, Clarice. *Água viva*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1994.

LISPECTOR, Clarice. *Todos os contos*. Organização de Benjamin Moser. Rio de Janeiro: Rocco, 2016.

ORJUELA-BERNAL, *Jorge Isidro*. Indígenas, Cosmovisão e Ensino Superior: [algumas] tensões. 2018. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018. Disponível em: < https://repositorio.unesp.br/handle/11449/154217>. Acesso em: 10 fev. 2019.

RANCIÈRE, Jacques. *Política da Escrita*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1995. 256p.

RANCIÈRE, Jacques. *O Desentendimento:* política e filosofia. Tradução de Ângela Leite Lopes. São Paulo: Editora 34, 1996.

RANCIÈRE, Jacques. *A Partilha do Sensível:* estética e política. Rio de Janeiro: Editora 34, 2005. 72p.

ROLNIK, Suely. *Cartografia Sentimental:* transformações contemporâneas do desejo. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

ROLNIK, Suely. *Cartografia Sentimental:* transformações contemporâneas do desejo. 1.ed. São Paulo: Ed. Sulina, 1989.

SAUVAGNARGUES, Anne. *Écologie des images et machines d'art*. Pourparlers entre art et philosophie. Paris: ÉPURE - Éditions et Presses universitaires de Reims, 2013.

VILELA, Eugénia. *Corpos Inabitáveis:* errância, filosofia e memória. Enrahonar: Quaderns de Filosofía, España, n.31, p. 35-52, 2000.

Capítulo 7

Caravana da Matemática (UFJF): a Matemática que vai até você!!!

Caravana da Matemática [1]

> "Ao brincar, a criança acaba por desenvolver uma ação social e cultural e a recria com o seu poder de reinvenção e de imaginação". (TARDIF, 2004, p. 382).

Pré-Introdução ou em que contexto falamos... Ou porque a Caravana da Matemática (UFJF) surgiu...

O contexto educacional brasileiro revela que sete de cada dez alunos do 3º ano do ensino médio têm nível insuficiente em Português e Matemática. Entre os estudantes desta etapa de ensino, menos de 4% têm conhecimento adequado nestas disciplinas. É o que mostram os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) 2017, divulgados pelo Ministério da Educação (MEC). O Brasil ainda não tem, oficialmente, uma definição clara do que deve ser aprendido em cada nível de ensino. Tal fato poderá ser esclarecido quando ocorrer a prática efetiva das propostas homologadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[2].

---

[1] A Caravana da Matemática (UFJF) é formada pelos Autores-Educadores desse artigo: Beatriz Casulari da Motta Ribeiro, Reginaldo Braz Batista, Marco Aurélio Kistemann Jr., Sandro Rodrigues Mazorche, Davi Eduardo Fiuza Abras de Melo, Gabriela Soares Benetello, Yohana Helena Silva da Silveira, Alexandre Guedes Amâncio Jr. (http://www.ufjf.br/caravanadamatematica/). Email: caravanadamatematica@ice.ufjf.br

[2] A **BNCC para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental** foi aprovada e homologada em dezembro de 2017. Contudo, **o documento para o Ensino Médio** foi aprovado e homologado pelo **Conselho Nacional de Educação (CNE)** e pelo **Ministério da Educação (MEC) em dezembro de 2018**.

Etapa mais problemática da educação básica, o Ensino Médio foi classificado no nível 2 de proficiência. Em Matemática, 71,67% dos alunos têm nível insuficiente de aprendizado. Desses, 23% estão no nível 0, o mais baixo da escala de proficiência. Em Português, 70,88% dos alunos têm nível insuficiente de aprendizado, sendo que 23,9% estão no nível zero, o mais baixo da escala, de acordo com o SAEB[3].

Trocando em miúdos, do ponto de vista pedagógico, os números do Ensino Médio significam que em Português a maioria dos estudantes brasileiros não consegue localizar informações explícitas em artigos de opinião ou em resumos, por exemplo. Já em Matemática, grande contingente dos estudantes não é capaz de resolver problemas básicos com operações fundamentais, envolvendo números naturais e operações ou ler informações em um gráfico. Salientamos que essas habilidades fazem parte das matrizes de referência do MEC e são esperadas em estudantes classificados em níveis proficiência superiores ao insuficiente.

O percentual de estudantes com aprendizado adequado no Brasil aumentou do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, de acordo com dados divulgados pelo movimento Todos pela Educação em 2018. Persiste, no entanto, um gargalo em Matemática, no terceiro ano do Ensino Médio. Ao deixar a escola, apenas 7,3% dos estudantes brasileiros atingem níveis satisfatórios de aprendizado. O índice é menor que o da última divulgação, em 2013, quando essa parcela era 9,3%.

O índice é ainda menor quando consideradas apenas as escolas públicas. Apenas 3,6% têm aprendizado adequado, o que significa que 96,4% não aprendem o esperado em Matemática e Português na escola. Embora tenham registrado avanços em

[3] Saeb é a avaliação utilizada pelo governo federal, a cada dois anos, para medir a aprendizagem dos alunos ao fim de cada etapa de ensino: ao 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio. O sistema é composto pelas médias de proficiências em Português e Matemática extraídas da Prova Brasil, e pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) que ainda não foi divulgado. As médias de proficiência que compõem o Saeb são extraídas da Prova Brasil.

relação ao último Saeb, a maioria dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ainda estão no patamar insuficiente de aprendizado. A alfabetização precária é, ao mesmo tempo, causa e consequência de desigualdade social, no país e no mundo. Embora ainda pareça grave, no Brasil esse cenário já foi bem pior (LIMA; RIBEIRO; CATELLI JR., 2016).

O diretor do Instituto Ayrton Senna, Mozart Neves Ramos, afirma que o Brasil está aumentando a escolaridade, mas sem aprendizagem. De acordo com Ramos, os ganhos dos anos iniciais não são aproveitados nas etapas seguintes, não há uma aprendizagem associada. Nos anos iniciais os alunos têm no máximo dois professores por turma, quando ingressa nos finais começa a ter o vínculo diversificado com professores divididos por disciplina. Ramos ainda reitera que o processo se torna mais complexo, há uma exigência maior da formação do professor que precisa dialogar com o chão da escola.

Os dados estatísticos denunciam, mas não explicam sozinho o quadro educacional atual que já se prolonga há décadas. A falta de incentivo para que estudantes cursem licenciaturas, devido à crescente desvalorização na profissão de professor no Brasil tem reflexos no ensino e na aprendizagem. Muitas escolas ainda apresentam espaços inadequados, salas de aulas medievais, pouca inovação e ações interdisciplinares, disciplinas engessadas e compartimentadas que não se comunicam. Tudo isso alinhavado à desmotivação discente que vivencia um mundo tecnológico na sociedade e no interior das escolas e não pode usufruir de internet de qualidade para realizar pesquisas mediadas pelos professores.

Tal contexto nos convidou em 2018 a buscar nossa contribuição para a área educacional brasileira. Reconhecemos que há ações isoladas ou individuais de sucesso realizadas por professores em suas salas de aula pelo Brasil. Contudo, enfatizamos que a Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e o seu Departamento de Matemática poderiam dar efetivamente a sua contribuição de modo a promover a divulgação científica e, sobretudo, a divulgação de conhecimentos matemáticos, sabendo que as escolas já possibilitam a proficiência matemática.

A proposta era/é contribuir levando “Matemáticas” em contextos lúdicos, por meio de palestras dinâmicas, teatro, música, poesias, *quiz* e jogos. E foi assim, buscando contribuir de alguma forma que a Caravana da Matemática tornou-se uma proposta de Projeto de Extensão na UFJF. De proposta virou realidade, pois o Projeto foi aprovado em dois editais e agregou bolsistas para desenvolverem as atividades sob a mediação dos quatro docentes do Departamento de Matemática.

Nesse sentido, nesse capítulo apresentamos em linhas gerais o Projeto que tem proporcionado as ações da Caravana da Matemática (UFJF) em suas inserções nas escolas públicas e particulares em Juiz de Fora (MG) e região e em outro estado brasileiro, como no Mato Grosso, em Barra do Bugres, em janeiro de 2019 num evento para 500 professores desse estado.

Entendemos que ao descrevermos o que vem sendo realizados, podemos inspirar outros educadores a criarem seus projetos, as suas caravanas, possibilitando o acesso a temas da Matemática que nem sempre são contemplados nas práticas curriculares do ensino fundamental e médio.

Inspiramo-nos no fato de que o *brincar* é o caminho que possibilita a flexibilidade, a recriação, as relações e a comunicação entre os homens (Bateson, 1977).

De acordo com Santos (1999),

> O brincar está sendo cada vez mais utilizado na educação construindo-se numa peça importantíssima nos domínios da inteligência, na evolução do pensamento e de todas as funções superiores, transformando-se num meio viável para a construção do conhecimento (SANTOS, 1999, p. 115).

Vamos começar então... Boa Viagem com a Caravana da Matemática (UFJF)!

1. Introdução

A Caravana da Matemática (UFJF) é um projeto de extensão universitária realizado por um grupo de professores do Departamento de Matemática e bolsistas selecionados para participar das ações do projeto. Nesse projeto, as atividades matemáticas que são realizadas junto aos estudantes nas escolas, busca extrapolar os limites do espaço acadêmico, promovendo iteração de docentes/estudantes/pesquisadores da UFJF com a comunidade escolar, levando ao público geral conhecimentos, muitas vezes, restritos ao ambiente acadêmico.

Nesse projeto, foram oferecidas, em 2018, um leque de palestras, oficinas e outras atividades sobre temas gerais da Matemática para estudantes dos Anos Finais do Ensinos Fundamental e Ensino Médio em suas respectivas escolas ou em visitas previamente agendadas junto ao Centro de Ciências (UFJF)[4]. O objetivo central do Projeto é disseminar o conhecimento matemático para ambientes distintos do contexto universitário, de modo a promover a alfabetização matemática dos envolvidos e despertar o interesse pelo conhecimento científico.

Destacamos que o Projeto, em sua primeira versão, ambicionava apresentar temas da matemática trabalhada no ensino superior, aos estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio a partir de temas mais avançados estudados nas licenciaturas e bacharelados. Tal ambição tem sido gradativamente estruturada para que futuramente a equipe envolvida possa levar para esses segmentos escolares temas que raramente são abordados no cotidiano da sala de aula de Matemática.

Gatti (2009) afirma que "é necessário que a universidade e as demais instituições formadoras se esforcem por buscar canais

[4] O Centro de Ciências (UFJF) é um órgão suplementar da Reitoria da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), tendo como meta atender o público acadêmico de todos os níveis de ensino, bem como a sociedade em geral. Está aberto para visitas agendadas e espontâneas com a participação da Caravana em visitas agendadas.

institucionais de interação com as escolas, em uma parceria na formação dos futuros professores, pois isto não é realizado na maioria dos cursos" (GATTI, 2009, p. 48).

Ressalta-se, nesse caso, que a Matemática Escolar trata de temas relativos ao currículo que deve ser praticado nas escolas e os conteúdos matemáticos, nesse caso, muitas vezes têm sido direcionados para os exames e concursos. Um olhar diferente para temas da Matemática, contextos históricos, principais personagens que fizeram a história das ideias e descobertas matemáticas, temas que muitas vezes não têm espaço nos contextos da sala de aula são trabalhados de forma lúdica nas ações da Caravana da Matemática (UFJF).

Entendemos que a Matemática é uma ciência que se destaca por sua abrangência estando por um lado na base de avanços científicos e tecnológicos e, por outro lado, sendo ferramenta essencial ao exercício da cidadania, já que habilidades e competências próprias do conhecimento matemático auxiliam indivíduos na leitura crítica de contextos sociais, econômicos e políticos. Entretanto, o Brasil apresenta um quadro paradoxal em que expressivas pesquisas em Matemática contrastam com o baixo desempenho de estudantes em habilidades básicas nesta ciência. Como evidenciado pelo pesquisador Marcelo Viana (Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA), o país que recentemente ingressou no grupo de elite da pesquisa Matemática mundial tem apenas 4% dos estudantes dominando conteúdos de Matemática.

Contribuir para mudar este quadro paradoxal, localmente, em Juiz de Fora (MG) e região, constitui-se como uma das responsabilidades sociais da UFJF, em nosso entendimento, como centro de produção de conhecimento e formação de educadores em Matemática e Ciências.

É nesse contexto, que nasce a Caravana da Matemática (UFJF), um projeto de extensão que tem se caracterizado pela divulgação do conhecimento matemático por educadores matemáticos e pesquisadores em Matemática para estudantes e professores de escolas públicas e particulares. Nossa prática no projeto tem evidenciado que uma atividade de extensão dessa natureza, possa ser de grande contribuição para promover a alfabetização matemática, ajudando ainda na formação de educadores e revelando jovens talentos com potencial para seguir carreiras de professores ou pesquisadores em Matemática.

De acordo com Nacarato (2006),

> o conteúdo matemático específico, desconsiderando que o saber disciplinar é apenas uma das dimensões do saber docente e que esse saber disciplinar, se desprovido de uma abordagem pedagógica e curricular, não oferece ao futuro professor as condições mínimas para o exercício da profissão docente na escola básica (NACARATO, 2006, p. 144).

Reforça nossa crença na adequação e potencialidades da proposta, as constatações de membros proponentes envolvidos desde 2006 em projetos como as Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas (OBMEP) e o Programa de Iniciação Científica Jr. da OBMEP (PIC). Ambos os projetos de abrangência nacional de sucesso que, há mais de 13 anos, vem revelando talentos, divulgando a Matemática e contribuindo para a formação cidadã dos estudantes participantes.

Em suas atividades com a OBMEP[5] e PIC[6] desde 2006, alguns dos membros proponentes puderam constatar *in loco* que a nossa proposta vem ao encontro à demanda atual da população, em especial de segmentos tradicionalmente excluídos do ambiente acadêmico, que têm agora a universidade como perspectiva, depois

---

[5] A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP criada em 2005 é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

[6] Destinado aos alunos medalhistas da OBMEP, o PIC é realizado por meio de uma rede nacional de professores em polos espalhados pelo país. Tem como objetivo despertar nos alunos o gosto pela Matemática e pela ciência em geral. Visite a página do PIC e conheça o material preparado para o programa: www.obmep.org.br/pic.htm.

da recente expansão do acesso ao ensino superior ocorrida nos últimos 15 anos.

Em geral, foi constatada uma carência, tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores, de uma relação mais próxima e um diálogo aberto com a Universidade e seus pesquisadores. O contato entre os professores da UFJF e os das escolas públicas se revelou muito proveitoso para ambas as partes, impulsionando iniciativas de professores de escolas públicas, na busca de projetos de ensino alternativos, além de motivá-los a exercitar sua formação continuada.

Sendo assim, a Caravana a Matemática (UFJF) busca colaborar para uma maior aproximação da UFJF com a comunidade abrangida pela UFJF, ao oferecer atividades que incluem palestras, minicursos e oficinas de professores pesquisadores e bolsistas pesquisadores (Licenciandos em Matemática) do Departamento de Matemática.

A Caravana ainda tem tido contado com uma parceria firmada com o Centro de Ciências (CC), um espaço natural de divulgação científica na UFJF. Apresenta-se ainda nas visitas agendadas de escolas ao CC com palestras de divulgação de conhecimento matemático/científico, oportunizando aos estudantes de escolas públicas um momento de entretenimento. Tal empreendimento consiste em um primeiro contato da comunidade com a UFJF e constitui-se como uma relevante oportunidade de aprendizado que proporciona uma experiência diferente e fora da rotina escolar dos estudantes.

Em suma, o público atendido pela Caravana da Matemática (UFJF) têm sido os alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio (Regular e Educação de Jovens e Adultos) das escolas públicas e particulares de Juiz de Fora (MG) e região, bem como seus professores, seus familiares e os gestores escolares.

O Projeto em andamento tem ainda beneficiários internos na UFJF. Além dos professores envolvidos no projeto, inferimos que todos os professores do Departamento de Matemática podem se beneficiar da conexão com a realidade escolar e a experiência na elaboração de produtos educacionais. Os graduandos (bolsistas ou voluntários) envolvidos diretamente no projeto serão também beneficiados da mesma forma, além de se adequarem à recomendação do MEC de terem experiência em projetos de extensão.

É notório que a UFJF tem movido esforços no sentido de atender à meta 12.7 do Plano Nacional de Educação (PNE) que prevê a curricularização de atividades de extensão. Ainda, os estudantes, tanto da graduação quanto da pós-graduação podem se beneficiar em suas vidas profissionais da experiência de atuar como palestrantes e mediadores de oficinas e outras atividades lúdicas desenvolvidas na Caravana da Matemática (UFJF).

2. Embasamentos Teóricos que guiam as ações da Caravana da Matemática (UFJF)

Inicialmente, é preciso esclarecer que, como defendia Ausubel (ano), o conhecimento prévio do estudante ou do aprendiz é a chave para a Aprendizagem Significativa. Nesse contexto, entendemos que um dos papéis da Caravana da Matemática (UFJF) se coaduna com estas propostas de Ausubel na medida em que inicia suas ações reconhecendo o conhecimento prévio, mesmo que tácito do estudante e busca coroar esse conhecimento com outros conhecimentos matemáticos ou não-matemáticos.

Nesse contexto, como teorizou Ausubel, para que uma aprendizagem significativa (matemática, no nosso caso, e científica) ocorra é necessário reconhecer o *background* dos estudantes, conforme enfatizado pelo educador matemático dinamarquês Ole Skovsmose.

Embasando-nos em Ausubel (ano) e em Skovsmose (ano), objetivamos ir além do *background* (histórico de vida social e estudantil) e avançarmos rumo ao *foreground* dos estudantes, ou seja, contemplar seus desejos, seus sonhos, suas esperanças e perspectivas futuras, para que o que possa ser oferecido na/pela

Caravana da Matemática extrapole propostas *behavioristas*, que embora pareçam inovadoras, acabam pecando, porque ao longo de seu desenvolvimento ignoram ou secundarizam a importância do conhecimento prévio e o *foreground* dos estudantes envolvidos no processo de construção do conhecimento matemático.

Segundo Moreira e David (2005)

> frequentemente os licenciados se veem diante do problema de desenvolver sua ação pedagógica em sala de aula a partir de uma formação que não lhes proporcionou acesso à discussão de uma série de questões fundamentais da prática escolar. Nessas condições, qualquer solução que se adote incorporará, de alguma forma, essa falha de formação, ainda que ela não implique necessariamente uma dificuldade incontornável. [...] uma apresentação do conhecimento matemático absolutizado em sua forma compacta, abstrata e formal pode reforçar certos tipos de dificuldades que o professor vai eventualmente encontrar em sua prática efetiva (Moreira; David, 2005, p. 102).

Assim a partir da citação anterior, a Caravana da Matemática (UFJF) também utiliza-se de um conceito de Skovsmose (2000) denominado *Cenários para Investigação*. Nestes cenários de acordo com o educador dinamarquês, com a mediação docente é possível, gradativamente, por meio do Diálogo, promover os denominados ambientes de aprendizagem.

No caso da Caravana da Matemática, ambientes em que os estudantes possam iniciar suas investigações, sejam apresentados a temas pouco usuais da Matemática e se sintam convidados a aprofundar com a mediação do professor. Nas palavras de Skovsmose (2000, p. 3), "estabelecer um cenário para investigação, um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação".

Reiteramos que, embora a Caravana, na ação de seus pesquisadores, tenha a iniciativa de levar o conhecimento matemático às escolas, sabe-se que nos ambientes em que a Caravana passou/passar, há potencial para ampliação dos conhecimentos matemáticos e científicos dos estudantes, bem como do incremento do conhecimento dos pesquisadores envolvidos. Tal fato se dá devido ao Diálogo que pode proporcionar um compartilhar de experiências e conhecimentos estabelecendo ambientes de aprendizagem mútua.

Destacamos ainda que as atividades da Caravana da Matemática (UFJF) podem ir além do que salienta Skovsmose (2000), qual seja de superarmos as práticas escolares embasadas na repetição e no paradigma do exercício. Nesse sentido, as atividades utilizadas nas ações do projeto buscam problematizar conhecimentos matemáticos por meio de apresentações teatrais, poesias, jogos e *quiz*, conforme detalharemos mais à frente.

Os conhecimentos problematizados buscam convidar os agentes escolares (professores e estudantes) a investigar, desenvolver outras habilidades e competências, em geral, não promovidas pelo paradigma do exercício. Skovsmose (2000) define essas habilidades e competências como Materacia.

De acordo com Skovsmose (2000, p. 2), "Materacia não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática". Assim, mais do que problematizar as habilidades matemáticas, as ações da Caravana buscam despertar o interesse nos estudantes em ler os cenários sociais em que se inserem de forma crítica e amparados pelas lentas cunhadas pelos conhecimentos matemáticos escolares e não-escolares.

Em sua etimologia, a palavra lúdico origina-se de *ludus* que tem como significado brincar associado à ideia de jogo (ALMEIDA, 2008). Entretanto, mediante estudos, o lúdico deixou de possuir apenas essa conotação e passou a ser reconhecido como traço essencial do comportamento humano que traz além do divertimento a possibilidade de aprendizagem em diversos campos do conhecimento. A brincadeira é uma ação natural da vida infantil. No momento em que brinca, a criança trabalha com diversos fatores como físico, motor, emocional, social e cognitivo.

Assim sempre fez parte das preocupações das ações da Caravana, fazer suas apresentações embasadas em aspectos lúdicos e artísticos, envolvendo as crianças, os jovens e os adultos nas atividades. De acordo com Marin (2010),

> crianças e adultos, quando brincam e jogam, penetram no mundo das relações sociais, desenvolvendo senso de iniciativa e auxílio mútuo. A metodologia, de forma lúdica e prazerosa, proporcionará, com a aprendizagem, à criança estabelecer relações cognitivas junto às experiências vivenciadas. Isso se deve ao fato de que, no ato de brincar, com certeza não se aprende somente os conteúdos escolares, se aprende sobre a vida, e se adquire experiências para lidar com situações de enfrentamento quando necessário. Brincando, a criança se diverte, faz exercícios, constrói seu conhecimento e aprende a conviver com outras crianças (MARIN, 2010, p. 8).

Marin (2010) ainda salienta que,

> As Relações e Inter-relações do Lúdico é de extrema relevância pois determina a relação que o jogo, a brincadeira e o brinquedo desenvolvem na criança, assumindo um valor educativo e trabalhando com aspectos psíquicos; e, por fim, A perspectiva do Lúdico na Construção do Conhecimento, o qual salienta o papel do educador em sua performance de encantamento, não sendo somente um mero transmissor, mas sim um transformador de conhecimentos, utilizando a ludicidade como aliada nesse processo de ensino aprendizagem (MARIN, 2010, p. 10).

Marin (2010, p. 21) ainda complementa reforçando que "O lúdico é garantia de vivências alternativas, uma contribuição para reconstrução significativa dos saberes e uma prazerosa oportunidade de integração".

Não podemos nos desvencilhar de, por meio da Caravana, reconhecer na divulgação de conhecimentos matemáticos por meio de performances e brincadeiras, a relevância da abordagem etnomatemática na construção do conhecimento científico e matemático. O alinhamento e a sintonia entre as propostas da

Caravana da Matemática e os peculiares contextos sociais e culturais, em que se inserem as escolas que podem acolher as ações do projeto constituem-se de suma importância para o respeito e a alteridade ao público que participará das ações do projeto.

Para Wajskop (1995, p. 28), "a brincadeira é uma atividade humana na qual as crianças são introduzidas constituindo um mundo de assimilar e recriar as experiências sócio-culturais, pois garante a interação e construção de conhecimentos da realidade delas".

Os estudos de Piaget e Vygotsky, na área da psicologia, trouxeram a vertente do brincar como algo inerente à natureza humana que também colabora para o aprendizado, de modo que a definição ultrapassou o simples sinônimo de jogo. Para estes estudiosos, a brincadeira e as suas implicações ultrapassam o universo do brincar espontâneo, um ato de simples prazer, possuindo também interferências nos âmbitos pedagógico e social.

Para Piaget (1976), deverá ser sempre através do lúdico a maneira viável de a criança assimilar, transformar o meio para que este se adapte as suas necessidades. Ao brincar a criança se relaciona com outras crianças, sendo capaz de perceber-se com um "ser" no mundo numa relação entre o que é pessoal e o que permite o ingresso no mundo das regras. Brincando as crianças constroem seu próprio mundo; o mundo que querem e gostam. Desse modo, os brinquedos são ferramentas que contribuem para esta construção, pois proporcionam à criança demonstrar e criar fantasias de suas vivências e experiências.

De acordo com Santos (1999, p. 13), "as atividades lúdicas possibilitam o desenvolvimento integral da criança, já que através destas atividades a criança se desenvolve efetivamente, convive socialmente e opera mentalmente" isso porque os espaços lúdicos e as atividades lúdicas motivam a curiosidade, experimentação e verbalização de conceitos e sentimentos, possibilitando uma formação prazerosa.

Nesse comenos, o foco principal do projeto tem sido a divulgação científica para a comunidade escolar em Juiz de Fora

(MG) e região. Com as atividades propostas objetiva-se de forma geral que a Caravana da Matemática (UFJF) estabeleça oportunidades de inclusão social, cultural e didática, cumprindo entre outros objetivos:

- Proporcionar a aproximação entre os estudantes e a Matemática;
- Promover inclusão social e científica por meio da difusão do conhecimento científico;
- Desenvolver a Alfabetização Matemática;
- Romper com mitos e paradigmas sobre a Matemática e as Ciências em geral;
- Aproximar a Comunidade e a UFJF e Divulgar para esta Comunidade o conhecimento científico produzido na UFJF;
- Estabelecer novos vínculos entre a UFJF, as escolas, os professores e gestores escolares;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica em Juiz de Fora (MG) e região.

É notório o gradativo afastamento dos estudantes em relação à Matemática e seus conteúdos conforme avançam no Ensino Fundamental e mesmo no Ensino Médio. Conteúdos desvinculados do cotidiano dos estudantes, salas de aulas em que o ensino ocorre, mas a aprendizagem nem sempre, pouco uso de tecnologias que os estudantes utilizam nos demais contextos extra-escolares, tornam os conteúdos problematizados, muitas vezes, desinteressantes para boa parte dos estudantes.

Entendemos assim que ao não possuir a Materacia sinalizada por Skovsmose (2000) os estudantes estão sofrendo uma significativa exclusão social. O enfraquecimento da materacia discente, ou seja, o enfraquecimento das habilidades e competências necessárias para ler cenários em que a Matemática se faz presente, e nos quais os estudantes podem e devem tomar decisões envolvendo seus conhecimentos matemáticos pode levar a exclusão social na medida em que os conhecimentos necessários para que a cidadania se consolide não estão sedimentados.

Um outro ponto que nos demanda a atenção é relativo à descaracterização de certos mitos e crenças com relação à Matemática e ao professor dessa disciplina. É ainda vigente a visão de muitas pessoas de que para se aprender Matemática é necessário um dom especial ou habilidades que poucos detêm. Nesse sentido, tem sido também um dos papéis das ações do projeto, superar paradigmas já cristalizados de que a Matemática é para poucos eleitos e que ter apenas notas boas nas avaliações escolares elege estudantes para seguir na área de ciências exatas.

Um ponto complementar diz respeito aos estereótipos vinculados aos estudantes e professores que gostam de estudar e se aprofundar em Matemática. Ainda prevalecem estereótipos de que quem se aproxima e se aprofunda no estudo de Matemática e Ciências é superdotado ou mesmo tem o rótulo de um cientista maluco que vive no mundo dos números e ignora a realidade que o cerca ou, em geral só os meninos devem estar envolvidos.

É imprescindível ainda atentarmos para a aproximação Universidade-Comunidade. Em muitos contextos brasileiros as instituições universitárias ainda constituem-se de forma independente do entorno social e cultural que as cerca, pouco contribuindo com os saberes científicos que são produzidos em seu interior com relação ao núcleo social em que se insere. De forma equivalente, as ricas contribuições que a comunidades que rodeiam as instituições universitárias dificilmente têm adentrado os *campi* brasileiros.

Ainda há poucas ações de extensão no cenário nacional, em particular nas Ciências Exatas, que aproximem os conhecimentos produzidos no núcleo acadêmico, com os saberes e conhecimentos produzidos nos núcleos sociais. Essa lacuna, de certa forma, tem sido desfeita localmente na UFJF. Na medida em que as ações da Caravana da Matemática em suas inserções nas escolas e as visitas das escolas no Centro de Ciências (UFJF) propiciam aos estudantes e à comunidade escolar e dos municípios vizinhos conhecer as ações de pesquisa na universidade e, simultaneamente, trazem para a universidade seus saberes e conhecimentos. O contato com a universidade ajuda no processo de transição do estudante que sai do Ensino Médio e entra na universidade. E em muitos casos inclui a universidade como perspectiva para estes estudantes.

Por fim, não podemos nos desvencilhar da possibilidade de contribuir por meio das ações da Caravana com a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem matemática junto às escolas que participam do projeto. O intercâmbio com os agentes escolares tem propiciado um conhecimento maior sobre a realidade das escolas. Dessa forma, o projeto pode ser regulado e orientado de modo a auxiliar com suas atividades o aprendizado dos estudantes, na medida em que problematiza temas que já são didatizados nas aulas, mas com uma linguagem lúdica e com metodologias distintas das já utilizadas pelos educadores na escola.

3. Metodologia

Em sintonia com os objetivos e as fundamentações teóricas do projeto, desejamos, por meio de uma abordagem qualitativa de pesquisa, produzir dados que comprovem a relevância do projeto.

Nesse caso, ao optarmos por essa abordagem, os dados produzidos serão obtidos com o uso dos seguintes instrumentos metodológicos: entrevistas semi-estruturadas, depoimentos dos participantes, produção de materiais por parte dos participantes em oficinas e minicursos ministrados no projeto, vídeos de curta duração para ampliar a divulgação dos conhecimentos matemáticos elencados a partir das demandas dos estudantes em seus diversos contextos sociais. A opção pela abordagem qualitativa justifica-se por ser esta mais apropriada para revelar aspectos e realidades educacionais que podem guiar as futuras ações do projeto.

Ao longo de 2018, nas incursões da Caravana da Matemática (UFJF) nas escolas e no Centro de Ciências na UFJF revelaram que as atividades propostas para divulgação científica de conhecimentos matemáticos têm servido de complemento aos que os professores já lecionam. O diferencial situa-se nas propostas lúdicas com apresentação de poesias matemáticas, *quiz* matemático com temas relativos aos conhecimentos básicos de Matemática, com inserção de personagens que fizeram a História da Matemática.

Há ainda as apresentações teatrais que abordam a obra "O homem que calculava" de Malba Tahan com adaptações e linguagens adaptadas para o contexto atual, bem como encontros no túnel do tempo com personagens como Malba Tahan e Hypátia de Alexandria e as apresentações envolvendo os super-heróis da Caravana da Matemática, licenciandos que teatralizam temas relativos à Matemática e se travestem de super-heróis. Por fim há palestras educativas que buscam abordar temas que muitas vezes não chegam às salas de aula como: "Criptografia" e "Onde está a Matemática?".

4. Preocupações do Projeto

Desde o início do projeto houve preocupações referentes à divulgação científica que se pautasse pela ludicidade e ao mesmo tempo pelo rigor em apresentar as ideias corretas que possibilitassem a aprendizagem significativa já citada. O fortalecimento da criticidade e da materacia dos estudantes é o principal foco nas ações do projeto, pois empoderam os envolvidos e auxilia-os a consolidar a sua cidadania.

Nesses termos, a formação continuada dos envolvidos no projeto também é foco. Espera-se que os discentes envolvidos no Projeto Caravana da Matemática (UFJF) desenvolvam-se em termos de conhecimentos de Matemática e História da Matemática, bem como desenvolvam suas habilidades e competências relativas à condução de ambientes de aprendizagem como proposto por Skovsmose (2000).

Experiências que antes poderiam ser vivenciadas no estágio supervisionado na licenciatura, em projetos como o PIBID, têm sido oportunizadas aos bolsistas do projeto na medida em que os mesmos devem produzir materiais pedagógicos, oficinas para professores e atuar nas performances da Caravana, sempre sob a mediação dos professores mediadores que coordenam o projeto.

Sendo também um dos escopos do projeto fomentar o estudo da Matemática, é esperado que os bolsistas licenciandos estejam cientes das suas contribuições para a melhoria da qualidade da Educação Básica por meio da divulgação científica e aproximação entre Escola e Universidade. Essa integração tem propiciado aos bolsistas constituir-se como um agente de inclusão social por meio da difusão do conhecimento, obtendo experiência no ambiente escolar, porém distinta da oferecida pelo estágio obrigatório, por exemplo.

O Projeto Pedagógico de Curso (PPC) do curso de Licenciatura em Matemática (UFJF) apresenta o licenciado como um profissional, com sólida formação em Matemática, dominando tanto seus aspectos conceituais como históricos e epistemológicos fundamentais, sendo capaz de compreender como se desenvolve a investigação de problemas novos ou tradicionais em Matemática. Além disso, enfatiza que o licenciando seja capaz de utilizar sua linguagem e resultados para o desenvolvimento de pesquisas, técnicas e instrumentos que tenham como tema central o ensino e a aprendizagem da Matemática, em nível da Educação Básica.

Assim, o desafio atual das licenciaturas é colocar os objetivos explicitados de seus PPC's em prática. É possível encontrar em diversos cursos estudantes que têm se formado em Matemática, mas se sentem inseguros em utilizar metodologias alternativas em sua prática de sala de aula, pouco ousam no uso de novas tecnologias ou desconhecem instrumentos avaliativos além das provas e testes. Em projetos de extensão pode-se propiciar experiências aos licenciandos, oportunizando aos mesmos cenários para investigação de sua própria prática de ensinar e aprender os conteúdos matemáticos.

No cotidiano da preparação dos licenciandos para atuar nas ações da Caravana da Matemática (UFJF), esses sujeitos têm se aprofundado na literatura referente à História da Matemática na sala de aula, Resolução de Problemas e uso de tecnologias e jogos para a aprendizagem significativa de Matemática. No PCC do curso enfatiza-se que cada licenciado deve ter a habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema.

Acrescentamos que, além do rigor, deve-se agregar às práticas pedagógicas, cenários marcados pela ludicidade. Lúdico, palavra de origem latina derivada de “ludere”, cujo sentido denota “ilusão, simulação”, atos que envolvem a imaginação, o sonho e as capacidades de compreensão e desenvolvimento da criança. Salientamos que conforme nos orienta Antunes (1998, p. 36), “jamais pensar em usar jogos pedagógicos sem um rigoroso e cuidadoso planejamento”.

Assim, propiciar ambientes de aprendizagem marcados pela ludicidade é o que a Caravana da Matemática (UFJF) tem realizado, na medida em que, por meio de suas atividades busca promover a aprendizagem com a imaginação sugerida numa poesia, numa apresentação teatral ou numa breve palestra sobre temas matemáticos. Em suma, brincar aprendendo e aprender brincando, ou de acordo com Chateau (1987, p. 14): “(...) pelo jogo, pelo brinquedo que crescem a alma e a inteligência (...) uma criança que não sabe brincar, uma miniatura de velho, será um adulto que não saberá pensar”.

5. Projeto integrando Pesquisa e Extensão na UFJF

A Caravana da Matemática (UFJF) não só apresenta uma integração entre a Pesquisa e a Extensão como, claramente, propõe uma relação entre o Ensino e a Aprendizagem Significativa, com o envolvimento dos estudantes da Escola Básica e da Educação Superior fortalecendo um viés educacional importante. Além disso, a produção e promoção de palestras e materiais de divulgação científica, a serem levados às escolas, constituem-se em uma prestação de serviço à comunidade escolar, por vezes, excluída do conhecimento produzido na Universidade. Ainda, por meio da produção de dados pós-palestras e oficinas, faz-se possível avaliar a aprendizagem matemática e científica dos participantes do projeto.

É imprescindível o desenvolvimento de projetos, no contexto acadêmico, ligados a pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem matemática e científica e o envolvimento com a comunidade escolar. Em geral, essa aproximação não se dá porque subestimam-se as contribuições que cada contexto pode oferecer ao outro. Contudo, com a aproximação, amplia-se o escopo da Universidade na divulgação científica e ampliam-se as possibilidades dos ambientes escolares em promover cenários para a investigação com a consolidação de ambientes de aprendizagem.

Tais ampliações coadunam-se com as propostas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na medida em que, com as ações da Caravana da Matemática, outros elos poderão ser fortalecidos em ações interdisciplinares. Com o fortalecimento dessas ações oportunizam-se cenários de inclusão e justiça social com a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem matemática com propostas lúdicas que considerem a diversidade cultural e social dos envolvidos, bem como seus *background* e *foreground*.

É mister ainda enfatizar os indicadores de acompanhamento e avaliação do projeto. As taxas de analfabetismo e analfabetismo funcional ainda são, de acordo com o IBGE, altas e preocupantes no Brasil. Muitos estudantes, de acordo com o INEP e com dados das avaliações em larga escala, apresentam ainda uma baixa alfabetização científica e uma baixa alfabetização matemática.

Isso requer acompanhamentos constantes com uso de instrumentos que revelem o avanço ou a estagnação da aprendizagem escolar. Desse modo, para o ano de 2019, o projeto, utilizará relatórios sobre o público participante e as instituições frequentadas pela Caravana da Matemática (UFJF) buscando aferir indicadores como: (i) média de alunos por turma; (ii) qualificação docente; (iii) gestão escolar; (iv) frequência às aulas; (v) desenvolvimento de metodologias alternativas em sala de aula de

Matemática; (vi) uso do livro didático e (vii) contexto socioeconômico. Tais indicadores poderão auxiliar na regulação do projeto em suas futuras versões, de modo a compartilhar a tabulação de dados e seus significados com a gestão escolar para que ajustes sejam realizados nas práticas de ensino e de aprendizagem escolar.

6. A Caravana da Matemática e suas atividades e performances nas escolas

De acordo com Gadanidis e Scucuglia (2010), a utilização das artes e das mídias digitais pode contribuir para que estudantes e professores desconstruam estereótipos sobre a Matemática e sobre os matemáticos e construam imagens alternativas. Na proposta desse educadores, engajar a comunidade escolar (estudantes, pais, professores) na produção de performances matemáticas digitais oferece meios para que a imagem pública da Matemática adquira complexidade matemática, pluralidade filosófica, relevância social e diversidade cultural.

A noção de performance matemática digital (PMD) foi originalmente proposta em um projeto de pesquisa voltado à inovação tecnológica e educacional. Uma concepção inicial sobre PMD pode ser descrita como: a comunicação de ideias matemática através das artes (performáticas) e das mídias digitais (GADANIDIS; BORBA, 2008).

Inspirados também nessas performances a Caravana da Matemática (UFJF) teceu seu rol de apresentação com diversas opções de jogos, brincadeiras, palestras e teatro buscando a divulgação da Matemática com tematização de conhecimentos matemáticos e suas aplicações e propostas lúdicas para divulgar personagens que fizeram e fazem a História da Matemática brasileira e internacional.

Para Brougere (1998), a brincadeira é uma mutação do sentido da realidade, nela as coisas transformam-se em outras. É um espaço à margem da vida cotidiana que obedece a regras criadas pela circunstância. No século XX, os jogos e os brinquedos foram mais usados nas escolas e no ambiente familiar. Os jogos se expandiram tanto que chegaram até as empresas como fator de integração ou de relacionamento inter-pessoal entre funcionários. Às vezes, são apenas jogos para desenvolver capacidades como a concentração, memória, atenção. Em outras ocasiões os jogos visam atingir o lado afetivo, psicológico, social, ou todos estes aspectos, são os denominados jogos educativos.

As palestras que compõem as apresentações nas escolas e no Centro de Ciências (UFJF) têm abordado temas como: “Onde está a Matemática?”, “Curvas Elípiticas e suas conexões com o cotidiano” e “Criptografia e aplicações”. Em 2019, as escolas receberão materiais para aprofundamento sobre os temas abordados em todas as performances.

Além das palestras, encena-se em todas as apresentações o Teatro dos Números, com temáticas relativas à obra de Malba Tahan[7]. A encenação “O homem que calculava e suas aventuras no Brasil” aborda os problemas enfrentados por Beremiz, com uma linguagem atual e atrativa para os jovens e adultos. A vasta obra de Júlio César de Mello e Souza, o Malba Tahan, ainda é pouco divulgada e contextualizada nos contextos escolares, o que motivou a inserção do teatro com os problemas clássicos da obra “O homem que calculava”.

Foi criado também uma performance teatral com encontro inusitados e fantásticos entre personagens que fizeram a História da Matemática. Nesse sentido, Malba Tahan e Hypátia de Alexandria encontram-se por meio de uma fenda do tempo e descrevem os contextos científicos, culturais, sociais e políticos em que viveram e revolucionaram a sociedade em que estavam inseridos.

[7] Júlio César de Mello e Souza (Rio de Janeiro, 6 de maio de 1895 — Recife, 18 de junho de 1974), mais conhecido como *Malba Tahan*, foi um professor, educador, pedagogo, conferencista, matemático e escritor do modernismo brasileiro, e, através de seus romances infanto-juvenis, foi um dos maiores divulgadores da m do Brasil.

O *Quiz* Matemático consiste em mais uma das atrações do projeto promovendo um jogo com questões relativas às Ciências e à Matemática, abordando conteúdos básicos de Matemática e da História da Matemática. Esse tipo de jogo tem instigado os participantes a aprender e competir de uma forma sadia e colaborativa, na medida em que ao jogar também aprende-se os conteúdos básicos elencados no Quiz.

Além do *Quiz*, tem sido incorporado às performances com os estudantes Mágicas com números e as Charadas com explicações lógicas. É mister detalhar que além das Mágicas e as Charadas há a explicação dos fundamentos matemáticos que estão alicerçando as performances. As poesias também têm sua presença nas performances, poesias como a de Millôr Fernandes, "Poesia Matemática" ou poesias autorais abordando termos, significados, propriedades e temáticas matemáticas e científicas. Por fim, criou-se também os Super-Heróis da Caravana da Matemática, cada um deles é um professor, ou seja, uma forma de homenagear os profissionais da educação que muitas vezes lecionam em condições deploráveis e sem o devido reconhecimento em pleno século XXI.

Em 2018, seu primeiro ano de existência, a Caravana da Matemática (UFJF) esteve em 16 escolas e atendeu mais de 5000 alunos, com agendamentos em http://www.ufjf.br/caravanadamatematica/.

As performances foram realizadas nas seguintes instituições escolares:

1. Colégio dos Jesuítas (Juiz de Fora)
2. Stella Matutina (Juiz de Fora)
3. EE Teodoro Coelho (Juiz de Fora)
4. João XVIII (Juiz de Fora)
5. Vianna Jr. (Juiz de Fora)
6. Escola Estadual Alberto Pacheco (Guarani)
7. Escola Estadual José Alvarez Filho (Guarani)
8. EM Cosette de Alencar (Juiz de Fora)
9. EM São Geraldo (Juiz de Fora)
10. EE Prof Quesnel (Juiz de Fora)

11. EE Padre Frederico (Juiz de Fora)
12. EM Santa Cândida (Juiz de Fora)
13. EE Maria das Dores de Souza (Juiz de Fora)
14. EE Duarte de Abreu (Juiz de Fora)
15. EM Cor Joaquim Souza (Bicas)
16. EE Prof Mario Junqueira Ferraz (São Lourenço)

Além disso, a Caravana da Matemática recebeu 8 escolas no Centro de Ciências (UFJF) em 2018:

1. Instituto Estadual de Educação (Juiz de Fora)
2. EE Adalgisa de Paula Duque (Lima Duarte)
3. EE Delfim Moreira (Juiz de Fora)
4. EE Raulino Pacheco (Rio Novo)
5. EE Prof João Anastácio (Barbacena)
6. EM Prof Walter Trezza (Maripá de Minas)
7. EE Teodoro Coelho (Juiz de Fora)
8. EE Joaquim Delgado de Paiva (Lima Duarte)

No primeiro semestre de 2019, a agenda da Caravana já foi preenchida com as seguintes datas e escolas cadastradas:

18 de março – EE Maria de Magalhães Pinto – Juiz de Fora, MG
25 de março – EE Mercedes Nery Machado – Juiz de Fora, MG
26 de março – EE Antônio Macedo – Ewbank da Câmara, MG
28 de março – EE Olympio Araújo – Rio Novo, MG
01 de abril – EE Engenheiro Henrique Dumont – Santos Dumont, MG
01 de abril – EM Anita Soares Dulci – Santos Dumont, MG
01 de abril – EE Presidente João Pinheiro – Santos Dumont, MG
08 de abril – EE Adalgisa de Paula Duque – Lima Duarte, MG
11 de abril – EE de Mar de Espanha – Mar de Espanha, MG
13 de abril – Colégio Vianna Jr – Juiz de Fora, MG
6 de maio – EE Almirante Barroso – Juiz de Fora, MG
13 de maio – EM Prefeito Dilermando Cruz Filho – Juiz de Fora, MG
15 de maio – EE de Belmiro Braga – Porto das Flores, MG
20 de maio – EE Padre Frederico Vienken – Juiz de Fora, MG
27 de maio – EM Santa Terezinha – Petrópolis, RJ
03 de junho – EM Olinda de Paula Magalhães – Juiz de Fora, MG
10 de junho – EE Fernando Lobo – Juiz de Fora, MG
24 de junho – EE Santo Antônio – Miraí, MG

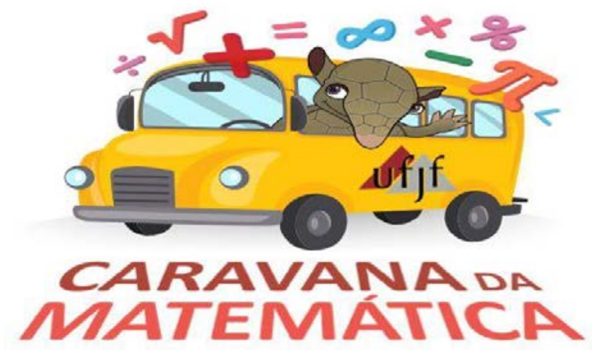
No primeiro semestre de 2019 a agenda da Caravana no Centro de Ciências também já foi preenchida com as seguintes datas e escolas cadastradas:

- 9 de abril – EM Lucy de Castro Cabral – Matias Barbosa, MG
- 23 de abril – EM Dr Custódio Junqueira – Argirita, MG
- 9 de maio – EE Governador Juscelino Kubitschek – Juiz de Fora, MG
- 23 de maio – EE de Mar de Espanha – Mar de Espanha, MG
- 6 de junho – EE Presidente João Pinheiro – Santos Dumont, MG

27 de junho – IF Sudeste MG – Campus Santos Dumont, MG.

Nas Figuras 1 e 2 a seguir apresentamos a equipe do projeto e o cartaz utilizado para divulgação nas mídias sociais

Figura 1. LOGOTIPO-CARAVANA DA MATEMÁTICA (UFJF)



Fonte: Arquivo dos Autores

Figura 2. EQUIPE-CARAVANA DA MATEMÁTICA (UFJF)

Fonte: Arquivo dos Autores

7. Alguns depoimentos dos bolsistas e o impacto na formação dos licenciandos

Neste tópico, apresentamos algumas percepções por meio dos depoimentos de três bolsistas, e como o projeto tem contribuído para a formação inicial dos bolsistas. À princípio a coordenação não imaginava o quanto o projeto faria diferença no cotidiano escolar e nos próprios bolsistas envolvidos no projeto. As narrativas, a seguir, revelam que a Caravana da Matemática (UFJF) está iniciando a sua caminhada de modo a contribuir com a aprendizagem matemática significativa e os professores e os estudantes são nossos parceiros nessa trajetória.

Yohana

A disciplina de matemática é temida pelos alunos e vista como uma coisa chata. Isso porque, na maioria das vezes, a matemática é ensinada nas escolas de uma forma robótica e mecânica, fazendo com que o aluno apenas decore o conteúdo e não aprenda. Por isso, a implementação de jogos e outras formas diferentes de ensinar matemática na educação básica, se faz tão importante, pois aproxima o aluno do conhecimento matemático de forma que ele possa interagir e aprender com o que lhe foi apresentado, proporcionando um entendimento melhor do conteúdo.

Neste contexto, há muitos professores dispostos a mudar o rumo da ideia de que matemática não pode ser divertida e agradável. E esse é um dos objetivos do projeto desenvolvido pelo Departamento de Matemática da UFJF, A Caravana da Matemática.

A primeira participação nas escolas que tive foi nas escolas da cidade de Guarani (MG). Estava muito entusiasmada e ao mesmo tempo nervosa com ter que me apresentar para muitas pessoas. O fato é que, essa primeira experiência fez com que houvesse uma superação dos meus medos e inseguranças em relação a falar e estar em frente a um público. E, além disso, aproximei-me dos alunos de uma forma que nunca vivenciei. O contato direto com eles, me mostrou a diferença com o contato vivenciado no estágio, pois no estágio não temos a interação com os alunos, apenas a observação. Nessa mesma escola, estreei o meu personagem do teatro de super-heróis, Incógnita X, uma vilã que odeia a matemática e que vive desafiando os outros super-heróis. Essa experiência me fez perceber que eu posso e devo levar a Matemática de formas diversas para meus futuros alunos, fazendo com que a relação professor-aluno e aluno-disciplina seja a melhor possível.

Algumas outras experiências nas escolas me marcaram muito. Como foi o caso de uma escola de Juiz de Fora, em que nos apresentamos apenas para crianças do ensino fundamental 1. O curioso é que, esses alunos adoraram participar de tudo o que era perguntado. Essas crianças, logo após as apresentações, nos abraçaram e ficaram encantadas com tudo o que levamos para essa escola. Poder trabalhar com crianças da idade desses alunos foi uma experiência incrível e diferente. Mesmo que não seja para essa idade que vou lecionar, é importante retirar desde cedo, a ideia de que matemática não pode ser divertida.

Outra escola que me chamou bastante atenção foi uma escola de Juiz de Fora voltada para alunos com necessidades especiais. Nela, pude ter contato com pessoas deficientes visuais, deficientes intelectuais, entre outros. O interessante dessa escola, era que os alunos gostavam de aprender e demonstrar o que eles sabem. Um aluno cego em particular me chamou atenção, ele respondeu tudo o que perguntamos e recitou duas poesias surpreendentemente. Tivemos que nos adaptar a essa nova realidade, trazendo para essa escola, os teatros, a poesia e, além disso, para os deficientes visuais, trouxemos letras e números para que pudessem analisar e nos dizer o que era cada letra ou número, e para os demais, trouxemos o tapete mágico.

Participei também em outubro de 2018 da Semana da Matemática no ICE na UFJF com a Caravana, e recebemos diversas escolas para explorar jogos e atividades lúdicas propostas por toda a equipe da Caravana para esse dia. Vieram muitos alunos, inclusive um aluno surdo, o qual tive a oportunidade de ajudar em uma das atividades. Também contamos com a presença de alguns outros professores e alunos da graduação, que depois de tentarem por várias vezes, conseguiram desvendar e resolver o Tapete Mágico.

Tive a oportunidade de estar perto de realidades completamente diferentes das que eu vivo e presencio no cotidiano, enxergando que podemos auxiliar nos pensamentos dos alunos e fazer com que a vontade de estudar e aprender aumente cada vez mais. Como ainda, o único contato que tive com a escola foi nos estágios, poder estar frente aos alunos e poder interagir com eles, foi muito gratificante e importante para minha vida. A incerteza de sair da graduação sem ter tido contato com a realidade escolar, iria me deixar insegura futuramente ao assumir uma sala de aula.

A Caravana da Matemática (UFJF) me proporcionou experiências fundamentais para minha formação profissional, fazendo com que pudesse aprimorar e consolidar os conhecimentos adquiridos durante toda a minha trajetória acadêmica. Foi uma ótima oportunidade para poder conhecer melhor o ambiente escolar.

Davi

Oportunidade, palavra que se resume toda a Caravana da Matemática (UFJF). Projeto que se enraíza em conceitos básicos como a desmistificação da matemática, vista como algo sem explicação e nada agradável, e a divulgação de uma ciência que abraça o mundo com seus teoremas e perspectivas. A oportunidade que se denomina, abrange a várias áreas como as da criatividade, desafio, conhecimento, trabalho e experiência.

A criatividade ascende quando se fala em Caravana, os neurônios fervem ao ver e pensar em histórias que podem ser contadas de forma diferente, ou com uma pitada de didática. A representação de um professor marcado na história da educação matemática, de forma interessante e um pouco desengonçada é um dos “cargos chefes” do projeto, a história de alienígenas vindo dos reinos dos números, do planeta da preguiça e até que os pais são o X e o Y, não ficam por fora desse grande espetáculo de aventura. Além disso, há muito mais, mas por hora a explicação desses cabe a mim.

Interpretar um querido amigo chamado Malba Tahan no teatro foi o primeiro desafio que a Caravana propôs, em uma pequena peça mostrando o árabe em uma aventura pelo Rio de Janeiro e um problema envolvendo bicicletas. Porém queriam mais e a Caravana tinha que crescer e consequentemente maiores desafios vieram. Pensar em algo novo era o desafio, e o grande encontro então, foi arquitetado, imagina o professor Júlio Cesar de Melo e Souza sua morte, voltar ao mundo e se deparar com as novas tecnologias e até mesmo se encontrar com a primeira mulher matemática do mundo, Hypatia de Alexandria, falando sobre educação e sobre seus respectivos feitos, pois então um encontro de imaginação, virou real.

Dando continuidade aos desafios, em busca de novas atrações, voltamos nossas atenções ao que fazia sucesso no mundo, e então a ideia de super-heróis veio à mente de um dos nossos coordenadores, Marco Aurélio Kisteman Jr., e logo foi transmitida aos bolsistas. Criei então as histórias dos grandes super-heróis, Algebrina, Geométricus e Mr. Pi, mas para existirem heróis, também tinha que existir um vilão e veio a história de Incógnita X, entretanto um grande mentor estava por trás dos heróis e surge Oráculos. Nesses nomes vieram então suas personalidades e biografias.

Com isso surge Algebrina que tem como seus pais X e Y, seu melhor amigo o igual e sempre brica com o maior e o menor. Geometricus, um dos seus companheiros de aventuras é filho da Hipotenusa com Bhaskara, tem como seu destino o reino dos números, e por lá o chamam de príncipe da divisão e sempre se aventura com o Mr. Pi, esse é o filho da circunferência e do perímetro e sempre fica um pouco nervoso quando não sabem o significado do seu nome. Não poderia faltar IncógnitaX, mais que rainha da preguiça, rainha de tudo que afasta a matemática da cabeça de qualquer um, sempre pregando peças nos heróis, como o roubo do o e do triângulo, deixando qualquer sistema de tecnologia, aritmética e geometria em colapso, porém Oráculos e os telespectadores dessa aventura de outa dimensão ajudam os heróis a recuperarem esses bens tão valiosos.

O conhecimento perante todas essas articulações de outras dimensões se faz e a pesquisa fica mais presente ainda, sempre à procura do que pode se conectar com o nosso público, do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, procurando conceitos em que se podem acoplar a todas as falas, realizando sempre nosso objetivo principal. E nos deparamos com dificuldades em achar algo que puxe a atenção dos envolvidos em tais apresentações e de passar as ideias da divulgação da matemática, então sempre na ideia de inovar, mostramos nos pequenos atos, com jogos de pergunta e respostas, que a matemática está em todo lugar.

O trabalho é um caminho desde o pensar no que vamos propor de inovador e como alcançar nossos objetivos, pegar o ônibus, carro até a escola que vamos nos apresentar, chegar e fazer nossa apresentação. Um trabalho intensivo, que trabalhamos todos os músculos, da cabeça ao pé, tudo em movimento pronto para fazer tudo com padrão de excelência e exemplo.

Por fim a experiência, chegamos em escolas e conhecemos suas verdadeiras situações, tanto de infraestrutura quanto do corpo docente. Nos deparamos com diversas formas de espaços locais, percebendo muitas vezes que há algumas limitações de se desenvolver projetos, limitações como o espaço para fazer apresentações, para desenvolver oficinas fora de sala de aula, sendo assim tivemos que adaptar a Caravana para cada colégio que visitássemos. Com isso a primeira parte da experiência se baseia nisso, se adaptar a diferentes espaços para fazer algo novo e didático.

Outro segmento que a experiência da Caravana nos traz é o reconhecimento de diversas personalidades de alunos e de turmas. A cada visita, a cada escola, nos surpreendemos como turmas do mesmo colégio, podem ser totalmente diferentes umas das outras, e como temos que nos se posicionar a cada turma, criando experiência então na adequação da fala aos gestos para cada segmento em questão, nos preparando para sermos professores antenados e que possam cada vez mais estabelecer uma comunicação digna com seus alunos.

Ao se tratar de alunos, personalidades chamam a atenção de toda a Caravana quando encontramos. Em uma escola de Juiz de Fora, nos deparamos com o Igor, um aluno muito animado que respondia todas as perguntas propostas, com seus métodos de fazer conta "de cabeça". Nesse momento me chamou a atenção e logo fui conversar com a professora da série que o Igor estava inserido, na conversa ela me relatou que ele tinha problemas em relação ao comportamento dentro de sala de aula, tendo ele como um aluno que não realizasse todo o seu aproveitamento. Tal fato nos mostra como o contexto da sala de aula não é suficiente para caracterizar a excelência do aluno, trazendo então mais uma bagagem a nossa experiência, mostrando que temos que desenvolver multiáreas do saber para desenvolver tanto o aluno quanto a turma.

E como fechamento de toda essa criatividade, desafio, conhecimento, trabalho e experiência, podemos falar e proclamar que a Caravana da Matemática vem como o novo, igual ao que a juventude dos anos 1980 pedia, o novo, as diretas já! Nós da Caravana, gritamos pelo aprender de um jeito diferente, com e sem carteiras, para além das provas, sala de aula em diversos contextos. Pensamos no que podemos ensinar brincando, conversando, atuando ou apresentando. De peça em peça, brincadeira a brincadeira, encontros, super-heróis, fomos constituindo nossa tão sonhada Caravana da Matemática, um mundo para desmistificar todo aquele conceito de loucura, de difícil, de sem entendimento! Podemos relaciona-la com o Iluminismo, expressão usada para ilustrar o novo, o que há raciocínio, o que pensa! Terça, quinta, sábado, de manhã, á noite, estávamos lá, como verdadeiros vigilantes da nossa pátria, da nossa bandeira, se desdobrando, dobrando, se arquitetando, para defender a nossa Caravana da Matemática.

Gabi

O modo como trabalhar matemática no Ensino Fundamental é um dos desafios diários vivenciado pelos professores diante das diversas dificuldades no que diz respeito à sala de aula. Diante dessa problemática, faz-se necessário o uso de novas metodologias para potencializar o ensino da Matemática. Assim, surgiu o projeto da Caravana da Matemática, que vem desconstruindo a imagem que os alunos possuem dessa matemática difícil, chata e complicada ensinada nas salas de aula.

Ao discutir sobre os obstáculos nos quais os estudantes possuem em relação à aprendizagem matemática, percebe-se um grande silenciamento dos mesmos que estão acostumados com o método de ensino tradicional de uma sala de aula e, assim, os impedindo de participar e compreender o processo de ensino e de aprendizagem. A Caravana da Matemática tem por um de seus objetivos “dessilenciar” os estudantes na sala de aula, promovendo sua participação, inserindo-os em um ambiente mais leve, proporcionando-os uma oportunidade de estudar matemática de uma forma não mecânica, diferentemente de uma aula tradicional. Já parou para pensar que dá para aprender matemática através de jogos, poesias, teatros, esportes, super-heróis, mágicas, charadas, quiz e oficinas? Tudo isso faz parte de um vasto cardápio de atividades que o projeto oferece.

A cada escola visitada, um aprendizado, um ganho novo, uma surpresa, uma novidade e uma expectativa a superar. O projeto tem visitado escolas com diferentes realidades, estruturas distintas. Como se adaptar a tudo isso é uma das principais e importantes competências que os professores do século XXI precisam ter. Diante dessa necessidade, o projeto já percorreu diversas escolas públicas municipais e estaduais do município de Juiz de Fora e região (como, por exemplo, a cidade de Bicas-MG e Guarani- MG), além de algumas escolas da rede privada, acrescentando positivamente na formação acadêmica dos participantes do projeto.

O retorno dos estudantes e de todos os envolvidos na escola é muito gratificante, contribuindo para que todos os envolvidos nos projetos (professores, bolsistas e voluntários) pesquisem cada vez mais sobre esses novos rumos que a educação matemática tem percorrido. O projeto vem ganhando cada vez mais destaque por ser algo inovador e proporcionou também a participação dos integrantes no evento "II Jornada Pedagógica Municipal de Barra do Bugres", que aconteceu em Mato Grosso em Janeiro de 2019, sendo uma oportunidade incrível para divulgação e discussão das práticas vivenciadas em sala de aula ao longo do projeto e as implicações que se decorreram ao longo das atividades.

Apresentar a matemática de uma forma descontraída, criativa e desafiadora é um dos pilares do projeto. E que tal apresentar essa matemática de forma harmônica e bela com algumas poesias que apresentam conceitos e objetos matemáticos como, por exemplo, a "Poesia Matemática" de Millôr Fernandes? E que tal explorar poesias que abrangem também outras áreas do conhecimento, como a História e a Literatura?

Já pensou na possibilidade de haver uma competição saudável no ambiente escolar, em que todos saem ganhando? Esse é um dos objetivos do jogo de perguntas e respostas “Quiz Matemático” e de algumas charadas de matemática, que vêm despertando cada vez mais o interesse dos alunos em participarem de forma significativa e construtiva. E você? Conhece a participação das mulheres ao longo da história da matemática? Tem ideia de um importante educador matemático do Brasil?

A Caravana da Matemática possui uma “máquina do tempo”, que permite os alunos conhecerem a filósofa e matemática “Hypátia de Alexandria” e o professor-educador Júlio César de Melo e Souza, mais conhecido como “Malba Tahan”, por meio de um encontro bem inusitado. Consegue perceber como a matemática está presente no seu dia a dia, nas coisas que você gosta como, por exemplo, nos esportes ou no teatro?

O projeto apresenta ainda uma peça de teatro adaptada “A nova era do Homem que calculava”, adaptada por Lucas Barbiere, baseada na obra de Malba Tahan, “O homem que calculava”. Como apresentar a matemática de uma forma mais palpável, prática e interativa? A Caravana utiliza jogos, oficinas e mágicas para chamar atenção e despertar o interesse dos estudantes promovendo um espaço para a tentativa e o erro. Pensando numa forma divertida de atrair os alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental, a Caravana da Matemática traz os Super-heróis da matemática (“Algebrina”, “Geométricos”, “Mister Pi”, “Oráculos” e a malvada “Incógnita X”) para solucionar alguns problemas que vêm acontecendo no Brasil e proteger alguns “objetos matemáticos” que correm o risco de desaparecer gerando um caos no mundo.

O projeto tem permitido aos bolsistas e aos voluntários um contato maior com a sala de aula e com alunos de diferentes faixas etárias, superando desafios de desconstruir a imagem estabelecida historicamente sobre a matemática e preparando-os para as novas tendências na educação matemática. O projeto agrega à formação acadêmica e profissional, preparando-os para o futuro ambiente de trabalho que é a sala de aula.

9. À guisa de uma conclusão

Essa é a breve história da Caravana da Matemática (UFJF), um projeto de extensão inovador que respeita o cotidiano escolar, reconhece as dificuldades porque passam os professores com uma desvalorização salarial e profissional, e mesmo assim comparecem nas escolas e fazem suas aulas acontecer, fazem educação matemática na escola, na prática..

Um grande desafio agora é atender as escolas em 2019, criar novas performances, continuar buscando atingir os objetivos propostos, qual seja de promover a divulgação matemática com rigor, mas, sobretudo, com criatividades, cientes de que a riqueza está na diversidade cultural e social em que se inserem os estudantes nos variados contexto escolares.

Inferimos que tais ações da Caravana da Matemática (UFJF) possam incentivar a criação de outras Caravanas pelo Brasil, inspirando professores e estudantes a alinhavarem a arte com os conhecimentos matemáticos e que daí surjam performances que promovam a aprendizagem significativa real e inclusiva.

Referências

ALMEIDA, Anne. *Ludicidade como instrumento pedagógico*. 2008. Disponível em: http://www.cdof.com.br/recrea22.htm. Acesso em março de 2014.

ASUBEL, David P., NOVAK, Joseph D., HANESIAN, Helen. *Psicologia educacional*. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Lisboa, Portugal; Edições 70, LDA, 2009.

BATESON, G. *Vers une écologie de l'esprit. Trad.* Ferial Drosso, Laurencine Lot et Eugène Simion. Paris, Éditions du Seuil,1977. v.1.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. *Investigação qualitativa em educação*. Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994

BORBA, M.; SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em Educação Matemática. In: SKOVSMOSE, O. (Org.). *Educação Matemática Crítica*. Campinas: Editora Papirus, 2001, p. 127- 148

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais* - Matemática: Introdução. 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base nacional comum curricular*. Brasília, DF, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: março de 2019.

BROUGERE, Gilles. *Jogo e Educação*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

CHATEAU, Jean. *O jogo e a Criança*. São Paulo: Summer, 1987.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Elo entre as tradições e a modernidade*. Autêntica: São Paulo, 2001.

G1-*Ensino médio e anos finais do fundamental ficam abaixo da meta do Ideb*. Site: https://g1.globo.com/educacao/noticia/ideb-no-ensino-medio-fica-abaixo-da-meta-nas-escolas-do-brasil.ghtml. Acessado em: 10-02-2019.

GATTI, B. A. (coord.) e BARRETO, E. S. S.. *Professores do Brasil:* impasses e desafios. Brasília: UNESCO, 2009.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar*. Rio de Janeiro: Record, 1997.

INEP-Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. *Saeb*. 2017. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/web/guest/ educacao-basica/saeb>. Acesso em 01 de março de 2019.

LIMA, A.; RIBEIRO, V.M.; CATELLI JR., R. (Coord.). *Indicador de Alfabetismo Funcional* – Inaf: estudo especial sobre alfabetismo e mundo do trabalho. São Paulo: Instituto Paulo Montenegro e Ação Educativa, maio de 2016.

MARIN, M.J.S, et al. Aspectos das fortalezas e fragilidades no uso das metodologias ativas de aprendizagem. *Rev Bras Educ Méd* [serial on the internet]. 2010;34(1):13-20. Available from: http://www.scielo.br/pdf/ rbem/v34n1/a03v34n1.pdf.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor :* licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 120p. (Tendências em Educação Matemática, 11).

NACARATO, A. M. A *Formação do Professor de Matemática:* pesquisa x políticas públicas. Revista Contexto e Educação, 2006, v. 21, n. 75.

PIAGET, Jean. *Psicologia e Pedagogia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1976.

POZO et at, *A solução de problemas:* aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SANTOS, S.C. *A importância do lúdico no processo ensino-aprendizagem*. Monografia apresentada ao Curso de Pós-Graduação a Distância Especialização Lato-Sensu em Gestão Educacional, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS). Santa Maria, 2010.

SANTOS, S. M. P. dos (org.). *Brinquedo e Infância:* um guia para pais e educadores. Rio de Janeiro: Vozes, 1999.

SCHÖN, D. *Educando o Profissional Reflexivo:* um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SILVA, R. S. R. *Narrativas Multimodais:* a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais. Bolema [Online]. 2014, vol.28, n.49, pp.950-973.

SKOVSMOSE, O. *Cenários para Investigação.* Bolema. Ano 13,n.14, 2000. p. 66 a 91

SKOVSMOSE, O. *Desafios da reflexão em educação matemática crítica*. Campinas, SP: Papirus, 2008.

TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2004.

TEIXEIRA, C. E. J. *A Ludicidade na Escola*. São Paulo: Loyola, 1995.

YIN, R. K. *Estudo de caso:* planejamento e métodos. 3ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

VIANA, M. *Nem 4% de nossos jovens dominam a matemática*. Folha de São Paulo. Disponível em http://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2018/01/1948546-nem-4-de- nossos-jovens-dominam-a-matematica.shtml

VIANA, M. *Brasil sobre da 5a divisão a elite da pesquisa matemática*. Folha de São Paulo.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins fontes, 1984.

VYGOTSKY, L. S.. *Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar*. In: LÚRIA, LEONTIEV, VYGOTSKY et al. Psicologia e Pedagogia. Lisboa: Estampa, 1991.

WAJSKOP, Gisela. *Brincar na Pré-Escola*. São Paulo: Cortez, 1995.

Capítulo 8

Música e Matemática na Sala de Aula

Carlos Eduardo de Souza Campos Granja [1]

O objetivo principal deste capitulo é apresentar algumas possibilidades de articulação entre Música e Matemática que possam ser aplicadas em sala de aula pelos professores dessas disciplinas, seja em conjunto ou na sua própria disciplina.

A relação entre a Música e a Matemática não é tão óbvia para a maioria das pessoas. Ainda que possamos relacionar a lógica da escrita numa partitura com uma certa lógica geométrica e aritmética (localização das notas, valores rítmicos das figuras, estrutura de compassos, etc), a aproximação entre o pensamento matemático e o pensamento musical vai muito além disso.

É possível explorar relações mais profundas entre as notas musicais e as frações de uma corda vibrante, envolvendo os princípios da construção de instrumentos musicais, construção de escalas, percepção de consonância e dissonância etc.

Apresentamos, a seguir, duas atividades que exploram a relação entre Música e Matemática: a primeira refere-se à descoberta de Pitágoras sobre os princípios matemáticos subjacentes à construção de uma escala musical; a segunda explora a relação entre as frequências das notas musicais e o comprimento de tubos sonoras, baseado em princípios da física ondulatória.

---

[1] Professor de Matemática no Colégio Santa Cruz, mestre em Educação Matemática pela FE-USP.

1. Sons e frações: o monocórdio de pitágoras

Uma das primeiras tentativas de se estabelecer uma escala musical matematicamente determinada ocorreu na Grécia Antiga por volta do século VI a.c. . Atribui-se a Pitágoras, filósofo grego famoso pelo teorema sobre os lados dos triângulos retângulos[2], a realização de um experimento fundamental para a construção de uma escala musical.

Usando um instrumento de uma única corda, chamado Monocórdio (da família dos instrumentos de corda, como a lira e o violão), Pitágoras investigou os sons produzidos por este ao se pressionar a corda em diferentes pontos do seu corpo.

Comparando os sons obtidos com o som produzido pela corda solta, Pitágoras percebeu que em alguns casos, a sensação sonora obtida era mais agradável ao ouvido do que outros. Isso aconteceu, principalmente, ao se dividir a corda em razões simples entre os números inteiros 1, 2, 3 e 4.

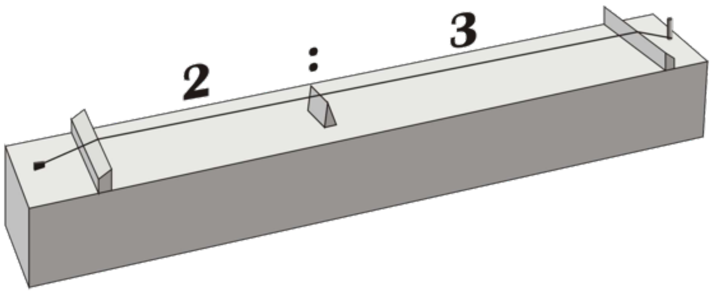


Figura 1: Monocórdio (Fonte:http://www.hermode.com/history_en.html 1)

O monocórdio é constituído por uma única corda esticada ao longo de dois cavaletes fixos sobre uma caixa de ressonância e por um cavalete móvel que se desloca abaixo da corda, modificando o seu comprimento e a porção da corda a ser percutida.

[2] O Teorema de Pitágoras afirma que, em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de seus catetos.

A primeira consonância[3] percebida foi obtida na divisão da corda na razão de 1 para 2. Esse intervalo musical[4], denominado em grego como *Diapason*, é conhecido atualmente por oitava justa. A nota produzida é considerada equivalente à nota original, porém mais aguda. Em termos atuais, seria o mesmo que tocar duas notas Dó (C) [5], no piano, uma mais grave e a outra aguda.

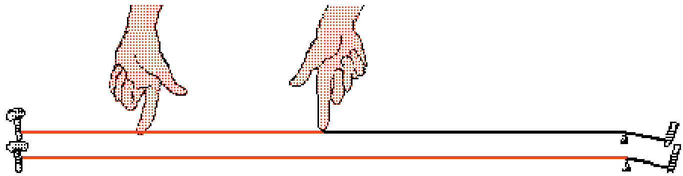


Figura 2 – Divisão da corda na metade de seu comprimento, gerando o intervalo de uma oitava justa quando comparado com o som produzido pela corda inteira (Diapason) - Fonte: Boyd-Brent, 2002

Em termos físicos, podemos afirmar que a corda percutida em sua metade gera um som com o dobro da frequência da nota original, ou seja, com o dobro do número de vibrações. Este intervalo sonoro é considerado uma consonância na maioria das culturas musicais no mundo.

Pitágoras também percebeu consonâncias musicais ao dividir a corda do monocórdio na razão de 2 : 3 e de 3 : 4, obtendo os intervalos chamados *Diapente* (quinta justa) e *Diatessaron* (quarta justa), respectivamente. Veja na tabela abaixo:

---

[3] Consonância e dissonância são sensações subjetivas associadas a dois ou mais sons soando simultaneamente. (ROEDERER)

[4] Intervalo musical ou simplesmente intervalo, é a distância que separa dois sons afinados no campo das alturas. O nome do intervalo é dado em função do número de notas da escala diatônica que ele engloba. Assim, o intervalo de C para G é chamado de quinta, pois engloba cinco notas (C-D-E-F-G). Um intervalo de terça engloba três notas da escala (C-D-E), por exemplo. Na escala diatônica de Dó (C), temos que D é um intervalo de 2ª maior, E de terça maior, F de quarta justa, G de quinta justa, A de sexta maior, B de sétima maior e C de oitava justa. Para este capítulo, não entraremos em detalhes na qualificação dos intervalos em maiores, menores ou justos.

[5] Neste capítulo utilizaremos o sistema de notação musical alfabético, que usa letras de A a G, em ordem alfabética, para representar as notas musicais de Lá até Sol (A – lá, B – Si, C – Dó, D – Ré, E – Mi, F – Fá, G – Sol)

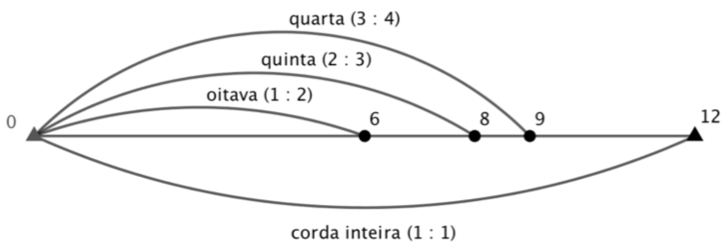
Nome das consonâncias	Intervalo - Nome Atual	Razão
Diapason	Oitava Justa	1 : 2
Diapente	Quinta Justa	2 : 3
Diatessaron	Quarta Justa	3 : 4

A construção da escala pitagórica

Para facilitar a compreensão do experimento com o Monocórdio, vamos supor que o comprimento da corda esticada entre os cavaletes seja de 12 unidades. A escala, portanto, fica limitada a uma oitava, ou seja, entre os comprimentos de 6 e 12 unidades (razão de 1 : 2).

Para obter as demais consonâncias musicais, calculam-se as médias aritmética e harmônica entre os dois extremos da escala. A média harmônica gera um comprimento de $m_h = \frac{2.6.12}{6+12} = 8$ unidades, correspondendo a razão de 8 : 12, ou seja, 2 : 3 (intervalo de quinta justa). A média aritmética resulta em $m_a = \frac{6+12}{2} = 9$ unidades, gerando a razão 9 : 12, ou seja, 3 : 4 (intervalo de quarta justa).

Por meio dessas duas médias, obtemos o princípio fundamental da harmonia pitagórica, representada pela proporção: 6 : 8 : : 9 : 12. Além disso, a composição de uma quinta justa com uma quarta justa equivale ao intervalo de oitava justa, pois $\frac{2}{3} . \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, e a distância entre eles forma o tom inteiro, que corresponde à razão de 8 para 9 $\left(\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}\right)$.



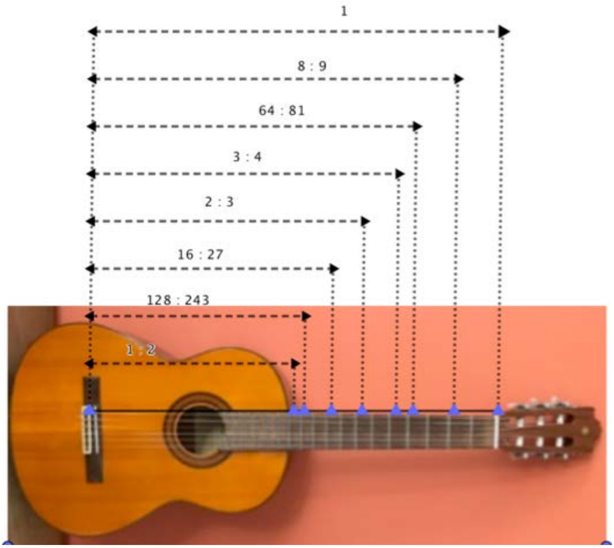
Considerando a nota C como referência (correspondente à razão 1 : 1) e as consonâncias correspondentes aos intervalos de oitava justa (1 : 2), quinta justa (2 : 3) e quarta juta (3 : 4) já determinados, obteremos as demais notas da escala usando o tom inteiro (8 : 9) como unidade. De C para D aplica-se a razão correspondente a um tom, ou seja, 8 : 9. O mesmo se aplica de D para E, chegando na razão de 64 : 81. Contudo, se aplicarmos novamente a razão de 8 : 9, ultrapassaremos a nota F, já determinada anteriormente. Assim, a razão correspondente entre E e F será de 243 : 256 $\left(\frac{3}{4}:\frac{64}{81}=\frac{243}{256}\right)$, chamada pelos gregos de coma pitagórica, correspondente ao que chamamos atualmente de semitom. De F para G, de G para A e de A para B usa-se a razão correspondente a um tom inteiro (8 : 9). E, novamente, de B para C' termos novamente a coma pitagórica de razão 243 : 256 para obter a oitava justa.

Esse processo resulta na escala pitagórica composta por sete notas distintas, como podemos ver na tabela abaixo.

Intervalo	Tônica	2 M	3 M	4 J	5 J	6 M	7 M	8 J
Nota	C	D	E	F	G	A	B	C'
Fração da corda	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}x\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}x\frac{243}{256}$	$\frac{3}{4}x\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}x\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}x\frac{8}{9}$	$\frac{128}{243}x\frac{243}{256}$
Razão	1 : 1	8 : 9	64 : 81	3 : 4	2 : 3	16 : 27	128 : 243	1 : 2
Comprimento Aproximado	12	10,7	9,5	9	8	7,1	6,3	6

Na imagem a seguir podemos ver o equivalente da escala pitagórica representado num instrumento moderno - no caso, o violão - desconsiderando as pequenas diferenças de afinação decorrentes do processo de temperamento[6].

[6] Diferentemente da escala pitagórica, onde a composição de dois semitons não gera um tom inteiro $\left(\frac{243}{256}.\frac{243}{256}\neq\frac{8}{9}\right)$, a escala temperada (igual temperamento) foi concebida de tal forma que as razões entre as frequências entre os 12 semitons da escala são iguais. Ou seja, a razão entre cada semitom corresponde à raiz décima segunda de dois, que é a frequência correspondente a uma oitava ($\sqrt[12]{2}$).



A tabela abaixo mostra as diferenças em cada intervalo entre a escala pitagórica e a escala temperada usada na construção dos violões.

VIOLÃO		ESCALA PITAGÓRICA			ESCALA TEMPERADA[7]
Traste do violão	Intervalo	Razão	Decimal	Distância em relação à pestana - cm	Distância em relação à pestana - cm
2	Segunda Maior	8 : 9	0,89	7,22	7,09
4	Terça Maior	64 : 81	0,79	13,64	13,41
5	Quarta Justa	3 : 4	0,75	16,25	16,30
7	Quinta Justa	2 : 3	0,67	21,67	21,62
9	Sexta Maior	16 : 27	0,59	26,48	26,35
11	Sétima Maior	128 : 243	0,53	30,76	30,57
12	Oitava	1 : 2	0,5	32,50	32,50
Total				65,00	65,00

Em termos sonoros, isso significa que os intervalos da escala pitagórica e da escala temperada são ligeiramente distintos.

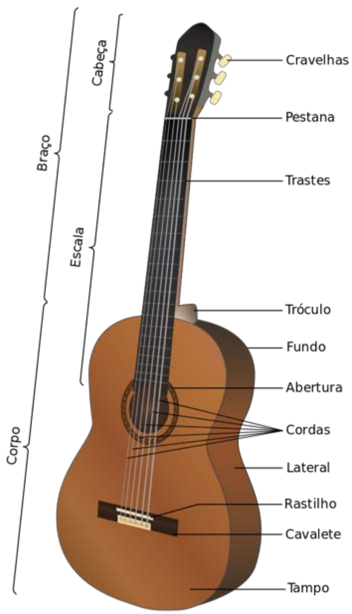
[7] As medidas desta coluna se referem à distância entre o traste e a pestana num braço de violão com 65 cm de comprimento (Fonte: Garcia, 2011), usando a escala de temperamento igual.

Atividade: ouvindo frações

O princípio básico do experimento com o monocórdio pode ser demonstrado em sala de aula usando um violão. Embora este instrumento tenha diferenças consideráveis em relação ao Monocórdio de Pitágoras, seu funcionamento é basicamente o mesmo, ou seja, uma corda vibrante esticada entre dois cavaletes fixos. Tal atividade pode ser conduzida numa parceria entre o professor de Matemática e o professor de Música.

Usando um lápis de formato sextavado (ou qualquer objeto que possa ser inserido entre o braço e as cordas do violão) para servir de cavalete móvel, pode-se demonstrar a relação entre frações da corda e as consonâncias musicais de modo bem simples.

As figuras a seguir mostram os nomes dos principais componentes de um violão clássico que serão mencionados nesta atividade (braço, traste, pestana, cordas) e o nome das notas em cada uma das cordas.



https://wikioso.org/nome-das-cordas-do-v 1

https://commons.wikimedia.org/w/index.ph 1

Escolhendo a corda mais grave (Mi ou E) como referência, posicione o lápis exatamente na metade da corda solta, colocando-o em cima do traste e por baixo da corda do 12ª traste a partir da pestana. Percutindo a corda de um lado e do outro, o som obtido será o mesmo, uma vez que o comprimento da corda (32,5 cm) de um lado e do outro é igual[8].

Em seguida, posicione o lápis em cima do 7º traste a partir da pestana (21,62 cm), dividindo a corda na razão de 1 : 2 (1 terço para um lado e 2 terços para o outro). Neste caso, o intervalo musical obtido ao se tocar ambos os lados da corda será de uma oitava justa.

[8] Neste caso, haverá uma diferença de volume sensível ao se tocar os dois lados, pois o lado direito da corda estará logo acima da caixa de ressonância do violão.

Agora, posicione o lápis em cima do 5º traste a partir da pestana (16,30 cm), dividindo a corda na razão de 1 : 3 - um quarto para um lado e três quartos para o outro. Neste caso, o intervalo obtido será de uma quinta justa, uma oitava acima $\left(\frac{1}{3} \times\ 2 = \frac{2}{3}\right)$.

Por fim, posicione o lápis ao lado do 9º traste, de modo que a distância a partir da pestana fique próxima a 26 cm, como mostra a figura a seguir.

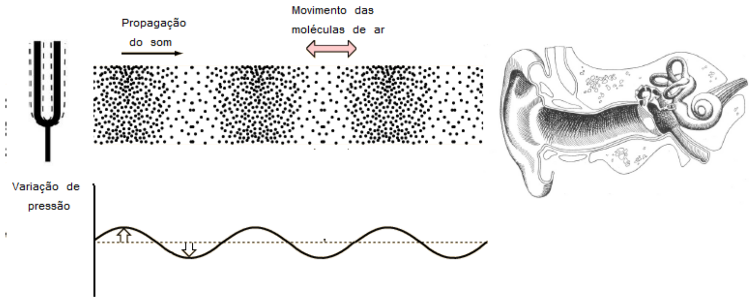
Neste caso, a corda ficará dividida em duas partes correspondentes a dois quintos e três quintos do comprimento total. Assim, a razão entre as duas partes será de 2 : 3, gerando novamente o intervalo de quinta justa.

Esse procedimento pode ser estendido para diversos outros intervalos, consonantes ou não. Contudo, há um limite físico para se colocar o lápis em cima do traste à medida em que este se aproxima da pestana, desafinando as notas obtidas.

2. Ondas sonoras e matemática

A relação entre música e matemática aparece também quando nos atentamos ao fenômeno sonoro que proporciona o que chamamos de nota musical.

O som nada mais é do que a propagação, através do ar, de uma energia mecânica resultante da vibração de um objeto. Essa propagação é chamada de onda sonora e resulta de uma série de compressões e descompressões no ar que, ao atingirem nossos ouvidos, provocam vibrações que são interpretadas por nosso cérebro como sensações sonoras. As oscilações de pressão deslocam as moléculas de ar longitudinalmente para frente e para trás numa determinada frequência.



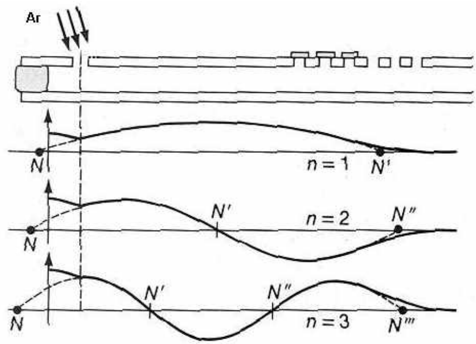
Por exemplo, ao percutirmos a nota A em um piano, estamos gerando uma onda sonora cuja frequência de vibração é equivalente a 440 hertz, isto é, 440 vibrações por segundo. Por ser extremamente rápida para a percebermos como um ritmo, nosso cérebro interpreta essa onda como uma nota musical.

Muitos instrumentos musicais são construídos a partir de um sistema mecânico que gera ondas sonoras que se propagam na mesma direção mas em sentidos opostos – como acontece num instrumento de corda com as extremidades fixas. Se a corda estiver tensionada entre dois extremos fixos, a energia produzida ao percurtí-la irá se manter por um tempo, fazendo com que a onda seja continuamente refletida nas extremidades da corda e volte no sentido contrário. Isso vai gerar um movimento de ida e volta até que a energia seja totalmente dissipada. A vibração em qualquer ponto da corda será o resultado da passagem, naquele ponto, de uma série de ondas refletidas nas extremidades, fazendo com que ele se movimente para cima e para baixo com a chegada de cada onda. Como o tempo de ida e volta de cada onda é constante, o padrão de vibração gerado terá uma frequência fixa.

Este tipo de vibração, gerado pela propagação de ondas em sentidos opostos, é chamado de "ondas estacionárias"[9] e ocorre em

[9]Ondas estacionárias tem esse nome por que, na configuração final, parece não haver deslocamento das ondas. A maioria dos pontos da corda executa apenas um movimento de subida e descida. Alguns pontos da corda não vibram (nós), pois a interferência das ondas é destrutiva e a amplitude zero. Outros, chamados de ventre, a interferência é construtiva e máxima.

instrumentos de corda, como o violão, ou em instrumentos de sopro, como a flauta. Esse é o caso do tubo sonoro, onde existe uma coluna de ar que vibra a partir de um estímulo externo.



A onda sonora gerada numa extremidade percorre o comprimento total do tubo e é refletida no final, gerando um vai e vem contínuo e periódico. Esse movimento ocorre devido à diferença de pressão do ar existente entre as extremidades do mesmo (baixa pressão) e seu interior (alta pressão). Se o tubo for aberto em ambas as extremidades, a viagem de ida e volta da onda no tubo constitui um ciclo de vibração (ou comprimento de onda, representado pela letra grega λ). Quanto mais longo for o tubo, maior será o período e, consequentemente, menor a frequência das vibrações.

Se um tubo de largura L produz um som com frequência f, então o tubo com largura 2L produzirá um som com frequência ½ f – portanto, mais grave -, pois a velocidade de propagação do som se mantém constante.

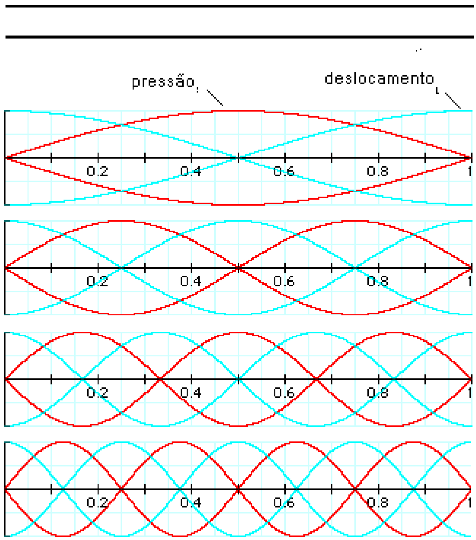


Figura 1Tubo Aberto

No caso dos tubos fechados em uma extremidade, a viagem de ida e volta corresponderá a ½ ciclo de vibração. Assim, para completar um ciclo, o som terá que percorrer o equivalente a 4 vezes o comprimento total do tubo ($\lambda = 4L$).

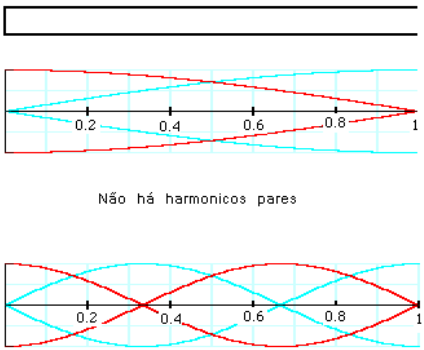


Figura 2 - Tubo fechado

Assim, podemos determinar o comprimento do tubo L para uma determinada frequência f (considerando a velocidade v de propagação do som no ar constante) da seguinte maneira:

1. A velocidade de propagação da onda é dada por $v = \frac{\lambda}{t}$, sendo λ o comprimento de onda e t o tempo de propagação.
2. Como o tempo é o inverso da frequência $t = \frac{1}{f}$, podemos escrever que a velocidade é $v = \lambda \, . \, f$;
3. Como nos tubos fechados o comprimento de onda equivale a 4 vezes o comprimento total do tubo ($\lambda = 4. L$), então a velocidade é $v = 4. L. f$;
4. Logo, o comprimento do tubo é dado pela expressão $L = \frac{v}{4.f}$
5. Como a velocidade de propagação do som no ar vale 340 m/s, então para obtermos o comprimento do tubo fazemos $L = \frac{340}{4.f}$

Assim, para obtermos a nota A1, de frequência igual a 55 Hz, basta substituirmos esse valor na fórmula: $L = \frac{340}{4.55} = 1{,}54\ m$. Ou seja, para que um tubo fechado em uma extremidade produza um som equivalente a nota A 1, ele deve ter 1,54 metros de comprimento.

Atividade de construção de tubos sonorous

Confesso que a primeira vez que eu vi algo parecido, não achei que se tratava de um instrumento musical. Era o show do grupo de música minimalista mineiro, chamado Uakti[10], de quem eu sabia apenas que produziam um som bem diferente. Pois em cima do palco havia vários tubos de PVC, iguais àqueles que se usam em construções para levar água e esgoto, alguns ligados a caixas de madeira, outros ligados entre si, formando diversas conexões.

Quando o show começou percebi que estava diante de um instrumento novo, cujo som me lembrava o de um baixo acústico. Como vim a saber depois, o princípio de funcionamento dos tubos é bastante simples e pode-se construir instrumentos semelhantes dispondo-se de poucos recursos.

Os tubos sonoros funcionam com um princípio similar ao do funcionamento de uma flauta, com a diferença de que a fonte sonora não é gerada pelo sopro, mas pela percussão do tubo. A semelhança vem do fato de que a nota musical resultante de um tubo sonoro depende de sua extensão, assim como na flauta.

Tendo como base a relação apresentada anteriormente entre o comprimento de um tubo fechado e a frequência da nota produzida, podemos construir instrumentos musicais de forma simples e didática a partir de tubos de PVC.

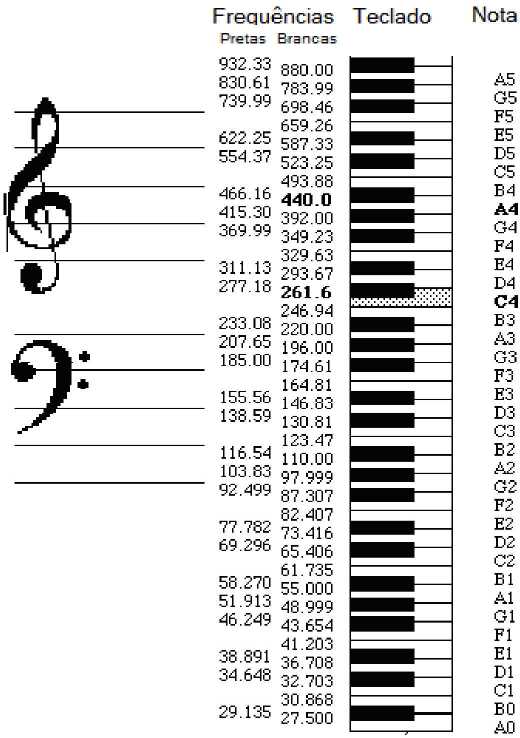
Material necessário:

- 12 metros de tubos de PVC 73 mm de diâmetro;
- 12 caps (terminações) de PVC de mesmo diâmetro
- 2m² de carpete velho; 2 tubos de cola para PVC
- serra para cortar tubos de PVC; trena; lixa

[10] Mais informações a respeito do grupo Uakti, acesse o site http://www.uakti.com.br ou veja o video https://youtu.be/MPYgs_c-3nQ

O primeiro passo é determinar o comprimento de cada tubo a partir das frequências das notas desejadas, usando a fórmula $L = \frac{v}{4f}$ deduzida anteriormente.

Para obter as frequências de vibração das notas musicais, consulte a imagem a seguir:



As frequências que constam da imagem acima correspondem às notas musicais de 5 oitavas do piano. Assim, podemos ver que o A4 (Lá na quarta oitava) tem frequência de 440 Hz, enquanto que a frequência do A3 (Lá na terceira oitava) é exatamente a metade, ou seja, 220 Hz.

Dessa forma, é possível determinar o comprimento dos tubos sonoros para uma determinada faixa de frequências. Por exemplo, de Lá 1 (A1) até Lá 2 (A2), conforme tabela abaixo.

Notas musicais	Intervalos	Comprimento (em cm)
Lá 1	T	152,0
Si 1	2M	135,1
Dó 1	3m	126,7
Ré 1	4J	114,0
Mi 1	5J	101,3
Fá 1	6m	95,0
Sol 1	7m	84,4
Lá 2	8J	76,0

Agora, é só seguir as etapas abaixo para construir os tubos sonoros (com uma extremidade fechada) na escala desejada.

Etapa		
1	Fazer o cálculo do tamanho do tubo a partir da fração da tabela e marcar na tabela	
2		Usando a trena, marcar a medida correspondente à nota escolhida no tubo, usando para isso um gabarito
3	Usando a serra apropriada, cortar na medida indicada, deixando uma margem de 0,1 cm a mais	
4		Usar a lixa para deixar as extremidades do tubo bem lisas.
5	Colocar o Caps na extremidade do tubo, lixar a superfície e passar cola para fixar o carpete	
6		Cortar um pedaço circular de carpete para colar na extremidade fechada do tubo
7	Aguardar um tempo para a cola secar. Em seguida, verificar se o tom do tubo está correto usando o afinador de instrumentos.	

Pronto, seu tubo sonoro está pronto. Para utilizá-lo, basta percurti-lo no chão (de preferência de pedra) ou usando um objeto de borracha (como uma sandália por exemplo).

Cada pessoa pode tocar até dois tubos por vez, num ritmo próprio.

O mais legal, contudo, é fazer os sons com várias pessoas, cada uma segurando um ou dois tubos e seguindo determinado ritmo, de preferência intercalado.

Referências

ABDOUNUR, Oscar João. *Matemática e música:* pensamento analógico na construção de significados. São Paulo, Escrituras Editora, 1999.

GARCIA, J.N. *Manual de fabricação de violão de Eucalipto*. Piracicaba, 2011 (não publicado)

GRANJA, Carlos Eduardo de S.C. *Musicalizando a escola:* músicas, conhecimento e educação. São Paulo, Escrituras Editora. 2006

GUTHRIE, Keneth S. *The Pythagorean source book and library*. Michigan, Phanes Press, 1987

GORMAN, Peter. *Pitágoras: uma vida*. São Paulo: Circulo do livro, 1979.

HOPKIN, B. Musical *Instrument Design.* Tucson: See Sharp Press, 1996.

IAMBLICHUS. *Life of Pythagoras.* Translated from the Greek by TAYLOR, T. London, J.M.WATKINS, 1818.

ROEDERER, Juan G. *Introdução à física e psicofísica da música.* São Paulo, EDUSP, 1998.

RIBEIRO, A. Andrés. *Uakti:* um estudo sobre a construção de novos instrumentos musicais acústicos. C/Arte, Belo Horizonte, 2004.

SOARES, M.A. *Produção de um violão clássico em madeira de Teca*.

SHILOV, G.E. *Gama Simple*. Moscou, Editora MIR, 1978.

WISNIK, José Miguel. *O som e o sentido*: Uma outra história das músicas. 2ª edição. São Paulo, Companhia das Letras, 1989.

Capítulo 9

Reta e Curva:
Mondrian, Niemeyer, Matemática e a Cidade

Dirceu Zaleski Filho [1]

1. Introdução

"O Reta e Curva" apresenta concepções e reflexões sobre as obras do pintor Piet Mondrian, o "poeta da reta", que fez parte do grupo holandês "O Estilo" (De Stjil) - formado por pintores, arquitetos, atores, músicos, e bailarinos -, e Oscar Niemeyer, "o poeta da curva", arquiteto brasileiro. As Reflexões são sobre a Arte, a Matemática, a Arquitetura e a cidade contemporânea. Com elas, se faz uma análise de como a Matemática presente nas pinturas e na arquitetura de Piet Mondrian, representando o Grupo De Stjil, e na arquitetura de Oscar Niemeyer, respectivamente, contribuíram para concepções sobre a cidade contemporânea e sua constituição. Esta síntese é o resultado da pesquisa que resultou na minha tese de doutoramento apresentada a UNIAN – Universidade Anhanguera – de São Paulo, orientada pelo professor Ubiratan D´Ambrosio em 2018.

2. Um pouco de Mondrian e de Niemeyer

Mondrian é um dos principais representantes da arte abstrata que surge em oposição à arte figurativa nas primeiras

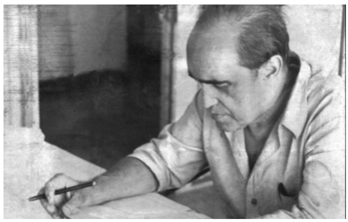
[1] Universidade Cidade de São Paulo – dirceu.zaleski@unicid.edu.br

décadas do século XX. Sua vanguarda denominada Neoplasticista pelo grupo *De Stijl* juntamente com o construtivismo soviético e a Bauhaus influenciaram as artes e a arquitetura nas cidades modernas. Foi a época da "reta e do ângulo reto" que nas cidades foi representada pelas vigas de ferro e do concreto na arquitetura, dando uma forma "retangular" às cidades. Por volta dos anos 1940, surge Oscar Niemeyer que, entendendo as construções dessa forma extremamente rígidas, propõe a "curva" por meio do concreto armado para dar outra opção à arquitetura e às cidades.

Mondrian e Niemeyer em seus ambientes de trabalho: A reta e a curva

Piet Mondrian (1872 – 1944)

Oscar Niemeyer (1907 – 2012)



Fonte: Zaleski Filho (2018)

É de Niemeyer, apud Zaleski Filho (2018), o seguinte depoimento:

> A Arquitetura Contemporânea começou com a Revolução Industrial com os vãos enormes, com as estruturas de ferro e concreto armado. É a época do Styl, da Bauhaus e do construtivismo soviético. De Van De Velde e Gropius, de Mies Van Der Rohe, Frank Lloyd Wright e Le Corbusier. Uns como Gropius, pediam a **estandardização**[2] (grifo nosso), o trabalho em equipe, etc.; outros como Van De Velde, consideravam o artista um individualista apaixonado, impossível de aceitar regras e tabus.

[2] Estandardização = padronização, uniformização.

> Mas a ideia da beleza, a importância do problema plástico, a todos unia. Até Gropius se denunciava, ao dizer: "Integrar arte e técnica, pintura e escultura.(AUTOR, 1978, 4ª capa).

3. As motivações deste trabalho

Unir em uma pesquisa de Educação Matemática, a Arte, a Arquitetura, a História da cidade a partir do século XIX, a obra e as ideias de Piet Mondrian e do grupo De Stijl e a obra e as ideias de Oscar Niemeyer.

E mostrar no que, e como a "Matemática", utilizada por eles para servir a vida e a dignidade humana, participa dessa união. A Matemática que existe por "trás" de Mondrian e Niemeyer.

Sobre Niemeyer, Underwood, apud Zaleski Filho (2018), escreve:

> Sua última obra prima, O Memorial da América Latina em São Paulo (1989) deve ser vista como expressão da persistência desse impulso utópico na moderna arquitetura brasileira. [...] O Memorial ilustra seu esforço de reconstruir a cultura latino-americana por meio de uma estética dinâmica e escultural que é tão livre na sua forma quanto unificada em sua concepção e composição. (ZALESKI FILHO, 2003, p. 121).

De acordo com o autor, o objetivo do Memorial é expressar concretamente a ideia de integração latino-americana, começando assim a dar forma a esse ambicioso projeto social. Esse programa de unidade cultural nasceu de reflexões de Darcy Ribeiro, nas quais lamentava a fragmentação política da América Latina e o isolamento histórico do Brasil em relação a seus vizinhos.

Underwood (2003, p. 132), apud Zaleski Filho (2018), escreve que "Darcy Ribeiro e Niemeyer veem a integração de todas as artes em um conjunto unificado como **metáfora** (grifo nosso) para a integração das culturas latino-americanas.

Memorial da América Latina - São Paulo

fonte: http://www.saopauloinfoco.com.br/memorial-da-america-latina/
Acesso em 1 jan 18.

A inscrição na base do monumento é "O sentimento da unidade latino-americana é o limiar de um novo tempo. O esforço de organização para eliminar a opressão dos poderosos e construir um destino maior e mais justo é o compromisso solene de todo nós". Essa inscrição segundo Niemeyer deveria ser "Sangue, suor e pobreza marcaram a história de opressão da América Latina."

Esse fato registra uma das marcas de Niemeyer, que foi utilizar a arquitetura e a Matemática como uma forma de denúncia contra as injustiças, principalmente contra as camadas mais pobres da população. Niemeyer como será mostrado nessa pesquisa, usa o que chamamos de "silêncio geométrico"[3], raramente referindo-se a conceitos matemáticos que acompanham suas obras ou estão em seus projetos, em suas reflexões.

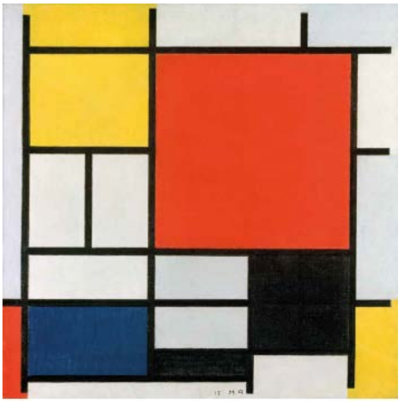
Um exemplo são os dedos da mão espalmada no Memorial da América Latina em forma de tronco de pirâmide, aos quais Niemeyer, nunca se referiu. Já Mondrian é mais explícito. Sobre ele, Zaleski Filho (2013) cita um artigo datado de 1942, intitulado "Rumo a verdadeira visão realidade", quando Mondrian utiliza conceitos de Geometria para apresentar, novamente, os fundamentos do Neoplasticismo. São eles:

---

[3] *Expressão sugerida pelo professor Joaquim Giménez Rodríguez da Universidade de Barcelona em conversa sobre esta pesquisa por ocasião de sua visita a Universidade Anhanguera em 2015 – SP.*

> [...] Concluí que o [ângulo reto] é a única relação constante e que, por meio das proporções da dimensão, se podia dar movimento a sua expressão constante, quer dizer dar-lhe vida [...] Excluí cada vez mais das minhas pinturas as [linhas curvas], até que finalmente minhas composições consistiram unicamente em [linhas horizontais e verticais] que formavam [cruzes], cada uma separada e destacada das outras. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 106).

PIET MONDRIAN
Composição com grande plano
vermelho, amarelo, preto,
cinza e azul- 1921
Óleo sobre tela
59,5 x 59,5 cm
Coleção Gemeentemuseum DenHaag, Holanda



Fonte: Zaleski Filho (2018)

4. Alguns dos fundamentos teóricos da pesquisa

4.1. A Etnomatemática

Ubiratan D'Ambrosio no artigo "O Programa Etnomatemática: uma síntese", publicado pela revista Acta Scientiae da Ulbra - Universidade Luterana do Brasil – discorre sobre a etimologia do conceito Etnomatemática assim, apud Zaleski Filho (2018):

> A definição de etnomatemática é muito difícil, por isso uso uma explicação de caráter etimológico. A palavra etnomatemática, como eu a concebo, é composta de três raízes: etno, e por etno entendo os diversos ambientes (o social, o cultural, a natureza, e todo mais); matema significando explicar, entender, ensinar, lidar com; tica, que lembra a palavra grega *tecné*, que se refere a artes, técnicas, maneiras. Portanto, sintetizando essas três raízes, temos etno+matema+tica, ou etnomatemática, que, portanto, significa o conjunto de artes, técnicas de explicar e de entender, de lidar com o ambiente social, cultural e natural, desenvolvido por distintos grupos culturais. (ZALESKI FILHO, 2008, p. 8).

4.1. A sobrevivência e a transcendência

No artigo "Ciências" do livro *Pensamento Inquieto*, apud Zaleski Filho (2018), refletindo sobre o termo "matema" D'Ambrosio escreve:

> [...]a migração do qual somos descendentes se deu muito recentemente, questão de duzentos e cinquenta mil anos aproximadamente e vem, do coração da África onde situa-se, hoje o Quênia a das proximidades. [...] O homem se espalha por todo o planeta e vai construindo seu conhecimento.
> [...] Esse conhecimento é gerado por informações que a realidade lhe dá, e obviamente esse conhecimento vai atendendo a duas grandes forças. Uma delas é o nosso componente animal, é a força da sobrevivência. O homem enquanto caçador e coletor, vai procurando nos lugares onde ele possa encontrar elementos para a sua sobrevivência. E ao mesmo tempo, uma característica muito peculiar a nossa espécie é a busca de explicações, de entendimento, de compreensão. (ZALESKI FILHO, 1993, pp. 53-60).

E continua suas reflexões explanando sobre o conceito de matema:

> Uma busca de explicações de procurar entender o que é, de saber o que é, procurar fazer de uma maneira planejada, seguindo estratégias. E muito interessante que essa palavra, essa noção, seja usada no grego com o nome de **matema** (grifo nosso). Quer dizer, as duas grandes forças, a sobrevivência e a busca de explicações, de entendimentos, são os grandes motores da produção do conhecimento [...]. Nessa procura de ir para o antes e para o depois, o homem desenvolve a noção de tempo. Desenvolve história, passado e futuro. (Ibid, pp. 53-60).

Conclui sua reflexão assim:

> Nessa construção de conhecimento, que é absolutamente mesclado, que hoje a gente chama de ciência e religião, um ato de filosofia é a mesma coisa, é tudo uma busca pela **sobrevivência e transcendência** (grifo nosso). Mas não separadas, por que a nossa própria busca pela sobrevivência, está mesclada também por esta busca pela transcendência.(Ibid, pp. 53 a 60).

Transcender pode ser entendido como trilhar um caminho para além da nossa individualidade, conhecer outras realidades, descobrir o desconhecido.

D'Ambrosio liga a Transcendência por meio da Transdisciplinaridade e da Transculturalidade como agentes para se buscar a Paz Total, que é um tema sempre presente em sua trajetória de educador matemático e livre pensador.

4.2. Matemática Visual

No artigo "Cultura Visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares" Claúdia Flores, apud Zaleski Filho (2018), escreve que a pesquisa em Matemática Visual englobando visualização e visualidade é uma área de conhecimentos que deve ser explorada pela Educação Matemática em geral e, em particular, em nosso país. A autora sugere temas de pesquisa, e dentre eles, dois chamaram-me mais a atenção:

> -Ler imagens criticamente, percebendo aí formas de dominação, de passividade, rotina, vigilância, relacionando saberes matemáticos na constituição dos sujeitos. Isso pode ajudar a perceber formas de subjetivação, de racionalização, de controle, de estética que induzem formas específicas de olhar.
> -Analisar formas de representação do espaço da cidade, da escola, das fortificações militares. Isso permite ver não só os modos diferentes de ver, como suas técnicas de olhar, mas também concepções de espaço e de geometria.(ZALESKI FILHO, 2010, p. 292).

Vamos discorrer sobre os termos de visualidade e visualização.

Segundo Flores (2016):

> Cultura visual é um novo campo interdisciplinar que combina arte, filosofia, antropologia, e estudos culturais, cujo foco é o visual e a imagem (BRENNAN & JAY, 1996; STURKEN & CARTWRIGHT, 2001; DIKOVITSKAYA, 2005). O termo visualidade é uma importante palavra neste campo de estudos, pois, envolve tanto técnicas construídas historicamente, quanto as determinações discursivas, tornando-se mais apropriado do que o termo visualização.(FLORES, 2016, p. 1).

Visualização e Visualidade

Visualização	**Visualidade**
Processo de construção e transformação de imagens mentais	É a soma dos discursos que informam como vemos
Aprendizagem de conceitos e desenvolvimento de habilidades visuais	Discute práticas visuais no contexto da história e da cultura

O conjunto visualidade e visualização por meio da Matemática e em particular da Geometria é chamado de *Técnica de conhecimento matemático por meio da imagem* chamaremos aqui de Matemática Visual. Por meio dela, podemos analisar as trajetórias do pintor holandês Piet Mondrian e do grupo *De Stijl* "O estilo" e do arquiteto Oscar Niemeyer. Mondrian e o *De Stijl* foram os criadores do movimento de vanguarda neoplasticismo que tem como principal símbolo na pintura e na arquitetura a linha reta e o ângulo reto e foram influenciados pela Teosofia e pelas ideias do matemático holandês Mathieu Schoenmaekers (1875-1944). Oscar Niemeyer tem como símbolo de sua obra a curva, e as influências mais significativas foram arquiteto Le Corbusier e do urbanista Lúcio Costa. Analisar como em suas obras fizeram uso da Matemática para embasar ideias e também influências desses dois artistas a partir do século XX na Arte e na Arquitetura das cidades, e fornecer sugestões para atividades pedagógicas são objetivos desse trabalho.

5. A cidade a partir do século XIX

Algumas reflexões sobre a História das cidades a partir do século XIX são apresentadas para servir de cenário para as criações de Mondrian e Niemeyer

O que é a cidade? Um local de encontro, refúgio, identidade, ou uma utopia.

Com relação a cidade, Benevolo, apud Zaleski Filho (2018), afirma que:

> A palavra cidade emprega-se em dois sentidos: para indicar uma organização da sociedade concentrada e integrada, que começa há cinco mil anos no Oriente Próximo e que então se identifica com a sociedade civil; ou para indicar a situação física desta sociedade. A distinção é importante pelo motivo prático de que a situação física de uma sociedade é mais durável do que a própria sociedade e pode ainda ser constatada – reduzida a ruínas ou funcionando – quando a sociedade que a produziu já desapareceu há muito tempo. (ZALESKI FILHO, 2010, p,13).

Etimologicamente “cidade” se origina do latim “civitas”, originalmente “condição ou direito do cidadão” e de “cives”, homem que vive em cidade, e de acordo com Aristóteles apud Palen (1975, p.26), apud Zaleski Filho (2018), “Os homens se reúnem nas cidades por causa da segurança; permanecem juntos por causa da vida boa".

Riccardo Campa no capítulo cujo título é "A reta e a curva" no qual escreve sobre Oscar Niemeyer inicia seu texto fazendo uma reflexão sobre a cidade, apud Zaleski Filho (2018):

> A cidade é uma Utopia viva ela constitui muito mais uma categoria mental do que do que uma realidade. E enquanto abstração, a utopia tem direito de cidadania num contexto convencional, como é a cidade, na qual a relação entre a imaginação e o real atinge uma sistemática, representa-se nos volumes dos fatos, dos movimentos, dos propósitos de seus habitantes. A passagem da caverna à cidade é concretizada pelo critério (e depois pelo sistema) de organização: no circuito urbano, com efeito, as atmosferas recônditas e reais consideram-se evidentes e obrigadas num certo sentido, a manifestar-se em sua incidência. A cidade é o reino do artifício, é forja do homem, que se subtrai aos pesadelos noturnos da natureza para afirmar sua vocação à criatividade.
>
> A cidade emancipa seus habitantes das sugestões da natureza sem alterar suas características e asperezas. Ela permite empregar a geometria, enquanto instrumento de mensuração do particular, na construção de um mundo em miniatura, de dimensões comensuráveis. Na cidade, não somente os espaços, mas também os tempos assumem uma função, adquirem um significado mais correspondente ás pulsões e aos desejos do homem. (ZALESKI FILHO, 1986, pp. 67-68).

E como surge a cidade? Podemos dizer que seu embrião foi o aumento do sistema agrícola que quando começou a produzir excedentes uma parte da mão de obra foi deslocada para a produção de outros bens. Por volta de 8.000 a.C. no Oriente Médio quando alguns homens adquiriram conhecimentos a respeito da relação entre as estações e o ciclo de crescimento das plantas e fixaram nesses lugares formando as aldeias agrícolas onde também eram domesticados animais. Por volta de 5.500 a.C. essas aldeias se espalharam nas planícies dos vales dos rios Tigre e Eufrates sendo que um processo semelhante ocorreu nos vales do Nilo, do Indo e do rio Hwang Ho.

O desenvolvimento físico, populacional e econômico da cidade vai seguindo seu curso histórico até que a Revolução Industrial ocorrida aproximadamente entre a segunda metade do século XIII e o início século XIX é um divisor de águas no cotidiano das pessoas e consequentemente da cidade. Com ela houve a transição de métodos artesanais para a produção por máquinas, criação novos produtos químicos e de fabricação de ferro, melhor aproveitamento da energia da água, utilização da energia a vapor, uso do carvão como combustível entre outros. A revolução industrial tem seu começo na Inglaterra chegando num tempo não muito extenso à Europa Ocidental e aos Estados Unidos.

O Capitalismo entra com a Revolução Industrial na segunda fase, já que a primeira foi o período colonial. A Revolução tornou possível o aumento da produção de bens, multiplicando o lucro, mas não obrigatoriamente a divisão da renda entre patrões e empregados.

Houve um aumento na circulação de pessoas e de mercadorias que só se tornou possível graças ao aumento do transporte com o trem e o barco a vapor. Isso tem grande influência na cidade do século XIX que passa a ser vista como sendo uma instituição autônoma com descrição e história.

Representação cartográfica, análise estatística, urbanização, linhas de interligação, gás e outros serviços em rede, bairro de negócios, bairros industriais, bairros de casas e subúrbios fazem parte desse novo cenário juntamente com novos equipamentos urbanos como teatros, hospitais, escolas entre outros.

Paris é o melhor exemplo da reurbanização, coordenada por Haussmann. Zucconi, apud Zaleski Filho (2018), relata assim:

> O astro de Paris brilha sobre todas as outras *world city* do século XIX e muitos a identificam com a ideia de cidade-capital e de metrópole.

> Concorrem diversos fatores para definir a estrutura urbana: os ritmos excepcionais de crescimento econômico, junto com as ambições neoimperialistas de Napoleão III. A isso se acrescenta a extraordinária capacidade tecno-administrativa de um grupo de funcionários, de modo particular do barão Eugène Haussmann, prefeito da Sena de 1853 a 1870.
> O papel que lhe foi dado inicialmente foi o de circundar Paris com uma malha de percursos que interligasse os lugares mais importantes: as estações de frente, os pontos cardeais consagrados pela tradição (o Louvre, o Hôtel de Ville, a Île da la Cité, a Sorbonne), e os novos marcos funcionais da capital (o Opéra, os Halles).Todos os pontos principais e todos os trechos de união foram englobados depois de uma esquema de escala maior que obedece a uma estratégia de grandes fluxos. (ZALESKI FILHO, 2016, p. 45).

Zucconi (2016) comenta em seguida que a prioridade foi o sistema viário para em seguida começarem as demolições e o planejamento dos quarteirões e redes hídricas, esgoto e iluminação. Esse projeto foi dividido em três fases denominadas redes que sempre enfatizavam os problemas ligados de natureza circulatória. Paris foi dividida em vinte distritos. No centro de Paris foi criada uma estrela em torno do arco do triunfo com doze avenidas em torno da qual mansões foram erguidas. O plano de Haussmann foi o de criar uma cidade ideal.

Arco do Triunfo, a estrela e as doze avenidas – Paris

fonte: http://parissempreparis.com.br/curiosidadeso-arco-do-triunfo/

Essa chamada urbanística moderna ocorreu entre 1830 e 1850 em meio a uma classe operária descontente e desigualdades sociais. No fim do século XIX começaram a surgir as primeiras teorias do urbanismo moderno: quatro caminhos foram propostos: a progressista; a naturalista; a culturalista e a humanista

A Teoria Progressista caracterizada pela ciência e técnica na resolução de problemas. Esse modelo teve como principais representantes Le Corbusier e Walter Gropius.

Walter Gropius (1883 – 1969)

Le Corbusier (1887 – 1965)

https://en.wikipedia.org/wiki/Walter_Gropius
fonte:https://en.wikipedia.org/wiki/Le_Corbusier

Foi dada ênfase a Teoria Progressista que está mais ligada tanto a Mondrian quanto a Niemeyer. Todo processo ocorrido desde a Revolução Industrial até a primeira década do século XX resultaram na arquitetura moderna na qual a arquitetura e engenharia adequaram-se ao ritmo da produção industrial e utilizando ferro, vidro e um dos mais importantes elementos da arquitetura do século XX, o concreto armado, trata-se de um material de construção civil usado nas estruturas dos edifícios. A diferença entre concreto armado e o concreto existente até então deve-se ao fato de receber uma armadura metálica responsável por resistir aos esforços de tração, enquanto o concreto resiste somente a compressão. O concreto armado é uma mistura compacta de vários componentes entre os quais pedras britadas, seixos rolados, cimento, água, sílica, aceleradores e retardadores.

Essa nova técnica permitiu que fossem feitas construções sem ornamentações. Isso causou um forte impacto na época.

Em 1926, Le Corbusier publica um documento definindo as características da arquitetura moderna no qual fixa os cinco pontos da nova arquitetura que estão exemplificados na Vila Savoye, um projeto de 1928.

Vila Savoye – Poissy, França

Fonte: https://slideplayer.com/slide/8595104/acesso em 15 jan 18.

A casa foi pensada como uma residência de veraneio para uma família nos arredores da cidade francesa de Poissy. A *Vila* expõe em si mesma os cinco pontos da nova arquitetura, propostos na obra teórica de Le Corbusier a respeito da arquitetura moderna. Tais características são:

1. *Planta livre da estrutura*. A divisão dos cômodos internos é feita independentemente da configuração estrutural, de forma que as paredes divisórias não possuem função importante na sustentação do edifício.
2. *Construção sobre* pilotis. O pilotis é um sistema, proposto por Corbusier, no qual o térreo das construções fica livre, de forma a transformá-lo em uma extensão do espaço externo e elevando a residência do solo.
3. *Terraço-jardim*. Evitando a cobertura tradicional em telhado, Le Corbusier propõe a ocupação das últimas lajes das edificações com jardins, liberando do solo usos particulares.
4. *Fachada livre*. A disposição das aberturas na fachada é independente da configuração estrutural do edifício, visto que os pilares e vigas são projetados internamente ao edifício, e não mais junto à fachada.
5. *Janela em fita*. Le Corbusier evita a solução tradicional de propor aberturas limitadas, ou muito verticais, buscando iluminação constante e homogênea, da mesma forma que o resultado estético na fachada evita a ornamentação excessiva da arquitetura anterior.

Tudo isso visando a funcionalidade das construções.

A arquitetura moderna busca um novo modelo de cidade que seja alternativo a cidade tradicional quando artistas e técnicos que colaboraram com a gestão dessa nova cidade, tornam-se capazes de propor um novo método de trabalho liberto das anteriores divisões institucionais.

Eles são os primeiros a reagir contra a o cenário que se via e começam a atacar os mecanismos que o produzem. Van de Velde é um dos arquitetos insatisfeitos com ter que escolher entre estilos passados e usa a liberdade que lhe é concedida para procurar um estilo novo, original e independente dos modelos tradicionais.

Pintores independentes deixam de aceitar a realidade externa e começam a desmontar o espetáculo do mundo cotidiano:

Benevolo, apud Zaleski Filho (2018), comentando sobre o procedimento dos artistas comenta que:

> Os impressionistas – Manet, Monet, Pissarro – extraem da realidade as combinações das formas e das cores, separando-as dos

> significados tradicionais; os pós-impressionistas – Cézanne, Van Gogh, Gauguin exploram a estrutura oculta (os contornos lineares, os volumes, as cores) das aparências visíveis; os fauves e os cubistas – Matisse, Picasso, Braque – decompõe definitivamente a imagem de uma realidade dada, e põe um fim à tarefa secular da pintura, de estabelecer uma regra constante para conhecer e interpretar o mundo exterior. Assim, em meio século, os artistas de vanguarda põem em dúvida todas as regras afirmadas de organização de cenário físico (os estilos extraídos dos períodos históricos passados, e o princípio da correspondência entre imagem e realidade) com suas consequências culturais e organizativas. (ZALESKI FILHO, 2011, p. 615).

A invenção do dínamo (1869) permitiu usar a eletricidade nos telefones (1876), na lâmpada elétrica (1887), no elevador (1887). A invenção do motor a explosão (1885) permite usar o petróleo para mover navios, automóveis e mais tarde os aviões.

Esses acontecimentos são comentados assim por ele, apud Zaleski Filho (2018):

> Os novos sistemas de construções tornam cada vez mais difícil ajustar separadamente a aparência dos novos edifícios (com os estilos históricos ou com os novos inventados pelos arquitetos de vanguarda). O trânsito mais intenso e as novas instalações urbanas – o gás, a eletricidade, o telefone, os transportes públicos sobre trilhos, na superfície ou subterrâneos – devem ser comprimidos nos espaços públicos de cidade pós-liberal. Estas mudanças enfraquecem as formas de gestão tradicionais e fazem nascer também as camadas inferiores a procura de uma renovação do ambiente construído. (ZALESKI FILHO, 2011, p.616).

Nos anos 1920 essas experiências separadas se encontram num movimento unitário. O fim da pintura como representação de um mundo estabelecido deixa aberta a possibilidade de um novo trabalho: a projeção de um mundo diferente, independente dos modelos tradicionais mais conforme as pesquisas objetivas dos técnicos e dos cientistas. Então o autor refletindo sobre a cidade moderna escreve sobre Mondrian e o De Stijl:

> Os artistas que nos anos vinte participam do movimento neoplástico – Van Doesburg e Mondrian – explicaram exatamente os caracteres desta projeção, que deve superar a divisão tradicional entre arte e técnica:
> -*O ambiente e a vida cotidiana são falhos, em seu estado imperfeito e em sua árida necessidade. Assim, a arte se torna um refúgio. Na arte, procura-se a beleza, a harmonia, que falta ou que ou que se perseguem em vão na vida e no ambiente. Assim, beleza e harmonias e tornaram um ideal irrealizável: colocadas na arte foram excluídas da vida e do ambiente.*
> *-Amanhã ao contrário, a realização do equilíbrio plástico na realidade concreta de nosso ambiente substituirá a obra de arte. Então não teremos mais a necessidade de pinturas e esculturas, porque iremos viver na arte realizada. A arte é somente um sucedâneo, ao passo que a beleza da vida é insuficiente; irá desaparecer á medida que a vida ganhar em equilíbrio (Mondrian)*. (ZALESKI FILHO, 2011, p. 618).

E Benevolo continua falando sobre a importância de Mondrian e o De Stijl para a as artes para a cidade e para a arquitetura moderna:

> Esta definição do objetivo a alcançar – o equilíbrio do ambiente construído – faz desaparecer a diversidade entre o método objetivo de trabalho científico e o método subjetivo do trabalho artístico. "A arte e a técnica são indivisíveis, e a invenção plástica pura anda sempre de acordo com as exigências práticas por que ambas são questões de equilíbrio. Nosso tempo (o Porvir!) exige este equilíbrio e não pode encontrá-lo senão por um só caminho" (Mondrian). É preciso, ao contrário, abandonar a divisão setorial da técnica e a dispersão arbitrária das escolhas artísticas; a nova arquitetura aceita o método objetivo, experimental e coletivo da pesquisa científica moderna, mas deseja permanecer independente das instituições dominantes, e já está em guarda contra o uso instrumental da ciência e da técnica para as finalidades do poder, que será imposto tragicamente no período seguinte. (Ibid, p. 618).

Segue parte da trajetória de Mondrian, do Grupo de Stijl (o Estilo) que estão ligados por oposição à obra de Niemeyer.

6. A reta: Mondrian, de Stijl e a Matemática

6.1. Piet Cornelius Mondrian e o começo da abstração

Sua obra é uma das mais revolucionárias contribuições à pintura moderna. Integrante da vanguarda artística chamada Neoplasticismo – A nova imagem da Arte – teve, juntamente com o grupo De Stijl – O Estilo - uma grande oposição ao seu ideal. Mondrian teve a sua primeira exposição individual só em 1942, quando já conta

Aos poucos, foi se libertando para encontrar o seu caminho. Nessa busca, produziu muitas aquarelas e pinturas.

Mas na representação de árvores, foi que ele encontrou assunto para extremos de simplificação, Zaleski Filho (2013) escreve que:

> Perseguindo uma árvore arquétipo, abstrata, geométrica, Mondrian iniciou um outro tipo de Arte Abstrata, que apresentava a forma essencial da natureza. Na criação de suas obras, ele queria atingir uma Arte de relações puras. Tal como os grandes matemáticos gregos, que acreditavam se aproximar da perfeição dos deuses se compreendessem a matemática da natureza, Mondrian considerava a pintura como uma atividade filosófica e espiritual, um meio para a revelação de uma realidade oculta atrás das formas da natureza. Para ele a pintura figurativa mascarava as relações fundamento da harmonia estética. (2013, p. 76).

Pode-se observar nas três pinturas que seguem a transição da pintura figurativa de Mondrian a caminho das formas retilíneas, horizontais e verticais, definidas e simples.

Marcando linhas horizontais e verticais pretas em fundo branco, formando retângulos, que foram pintados com as cores primárias (amarelo, azul e vermelho) nunca admitindo diagonais em seu trabalho, nas primeiras décadas do século XX, Mondrian, Piet. *A árvore vermelha* . 1909/10.

Óleo sobre Tela, 70 x 99 cm. Gemeentemuseum, Haia.
fonte: Zaleski Filho (2013, p.77)

MONDRIAN, Piet. *A árvore cinza*, 1911. Óleo sobre tela.

78.5 x 107.5 cm. Gemeentemuseum, Haia.
fonte: Zaleski Filho (2013, p.78)

MONDRIAN, Piet. *Árvore em flor*, 1912. Óleo sobre tela.

Galeria G. J. NieuwenhuizenSegaar. Haia.
fonte: Zaleski Filho (2013, p.78)

Mondrian é iniciado na doutrina teosófica e filia-se à Sociedade Teosófica da Holanda em 1909.

Na pintura *O bosque perto de Oele*, o conceito da Teosofia sobre opostos é representado pelos símbolos, sendo os masculinos representados pelas árvores e os femininos pelos planos horizontais.

Mondrian, Piet. *O bosque perto de Oele*,1908. Óleo sobre tela, 128 x 158cm. Gemeentemuseum, Haia

fonte: Zaleski Filho (2005, p.8)

Zaleski Filho (2013) escreve que:

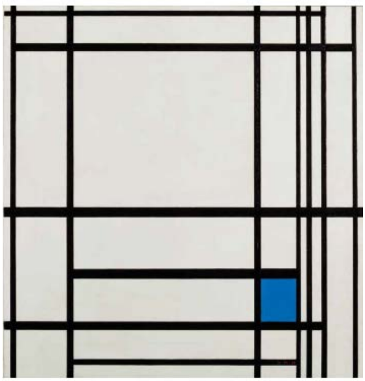
> Por meio da abstração geométrica, o grande objetivo de Mondrian foi conciliar o novo ao homem e à sua realidade – já não necessariamente à natureza – sem renunciar ao dualismo material/espiritual. Para isso, utilizou o neoplástico como ferramenta para envolver o homem de uma realidade caracterizada pela dualidade que domina nosso interior. Rizolli (2005) afirma que Mondrian, implicado em uma atividade intelectual especulativa, define os princípios gerais do Neoplasticismo:
> 1) plano;
> 2) cores primárias e não-cor: branco, preto, cinza;
> 3) equivalência dos meios plásticos/equilíbrio e harmonia;
> 4) relação de opostos/composição – cheio (forma) e vazio (espaço) / plano no plano;
> 5) linha reta/ vertical e horizontal;
> 6) ângulo reto;
> 7) assimetria;
> 8) pintura: por séculos, a pintura expressou plasticamente as relações entre forma e a cor antes de chegar aos nossos dias, a plástica somente das relações;
> 9) equilíbrio entre individual e universal;
> 10) equilíbrio entre matéria e linguagem;
> 11) equilíbrio entre arte e vida;
> 12) unidade. (ZALESKI FILHO, 2013, p.91).

As pinturas a seguir ilustram construção dessa estrutura e forma abstrata em Mondrian.

Mondrian, Piet.
Composição em grelha 7. 1919.
Óleo sobre tela, 48,5 x 48,5 cm. Kunstmuseum,
OffentlicheKunstsammlung, Basileia

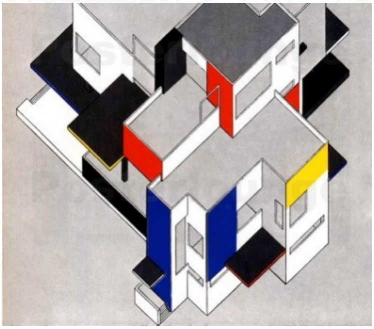
fonte: Zaleski Filho (2013, p.93)

Mondrian, Piet. *Composição de linha e cor III*.
*Óleo sobre tela 80x77cm.*Gemeentemuseum. DenHaag.
Holanda



http://culturabancodobrasil.com.br/portal/wpcontent/uploads/2017/11/Mondrian_catalogo_para-CCBB.pdf

Criações de arquitetos que compuseram o grupo De Stjil:
Theo van Doesburg – mansão particular – 1922/1923



fonte: https://medium.com/designscience/1922-aaaa128a692 acesso 16 jan

Casa Schröder com formas geométricas, assimétricas – 1924

fonte: http://tipografos.net/design/rietveld.html

No artigo de 1942, intitulado “Rumo à verdadeira visão da realidade”, Mondrian (1957) utiliza, em alguns momentos, conceitos de Geometria para apresentar, novamente, os fundamentos do Neoplasticismo, em Zaleski Filho (2013), e escreve que:

> [...] Conclui que o [ângulo reto] é única relação constante e que, por meio das proporções da dimensão, se podia dar movimento a sua expressão constante, quer dizer dar-lhe vida. [...] Excluí cada vez mais das minhas pinturas as [linhas curvas], até que finalmente minhas composições consistiram unicamente em linhas [horizontais e verticais] que formavam [cruzes], cada uma separada e destacada das outras. Observando o mar, o céu e as estrelas busquei definir a função plástica por meio de uma [multiplicidade] de [verticais e horizontais] que se [cruzavam]. [...]Comecei a determinar [formas]: as verticais e horizontais se

> converteram em [retângulos].[...] Era evidente que os retângulos como todas formas, tratam de prevalecer uma sobre as outras e devem ser neutralizadas por meio da composição. Em definitivo, os retângulos nunca são um fim em si mesmo, mas uma consequência lógica de suas [linhas] determinantes que são [contínuas] no [espaço] e aparecem espontaneamente ao efetuar-se a cruz de linhas verticais e horizontais. [...] Mais tarde, a fim de suprimir as manifestações de [planos] como retângulos reduzi a cor e acentuei as linhas que os limitavam cruzando-as. (ZALESKI FILHO, 2013, p.106).

Na sequência temos a obra de Niemeyer com reflexões sobre a curva, o concreto armado e Matemática que a acompanha.

7. A curva: Niemeyer, Le Corbusier, o concreto armado e a Matemática

Oscar Niemeyer (1907-2012) é sem dúvida um dos principais arquitetos da arquitetura moderna da história. Criou vários prédios em Brasília e possui mais de 600 projetos em todo o mundo.

Sua marca é o uso da linha curva na arquitetura que foi viabilizada graças ao concreto armado o que tornou seu estilo inconfundível.

Nasceu no Rio de Janeiro no bairro de Laranjeiras, em 15 de dezembro, filho de Oscar Niemeyer Soares e Delfina Ribeiro de Almeida.

É interessante o comentário que Niemeyer faz sobre seu nome, associando-o com a nossa diversidade cultural:

> Vou começar dizendo que o meu nome deveria ser Oscar Ribeiro de Almeida de Niemeyer Soares. Ribeiro e Soares nomes portugueses, Almeida árabe e Niemeyer alemão. Sou, portanto, com satisfação um mestiço, como mestiços são a maioria dos meus irmãos brasileiros. (NIEMEYER, 2000, p. 7).

Gostava de desenhar e o desenho o levou à arquitetura. Quando pequeno, ficava com o dedo no ar desenhando e quando a mãe lhe perguntava o que estava fazendo, respondia com a maior naturalidade:

- Desenhando mãe!

Concluiu em 1934, o curso de arquitetura na Escola Nacional de Belas Artes e começa a trabalhar, sem remuneração, no escritório dos arquitetos Lúcio Costa e Carlos Leão. À época comentou, Pop&Arte (2012), apud Zaleski Filho (2018): "Resisti, não queria, como a maioria dos meus colegas, me adaptar a essa arquitetura comercial que vemos por aí. Preferi trabalhar, gratuitamente, no escritório onde esperava encontrar as respostas para minhas dúvidas de estudante de arquitetura."

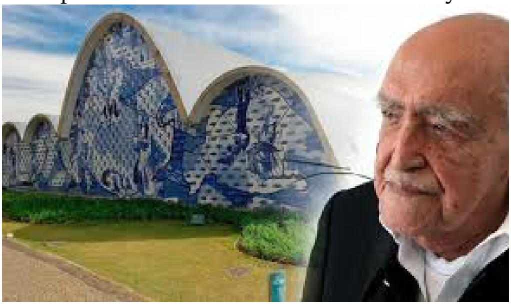
Em 1936, foi designado para colaborar com o arquiteto suíço, Le Corbusier, que participava do projeto do Ministério da Educação do Rio de Janeiro.

Palácio Capanema – Ministério da Educação e Cultura – Rio de Janeiro 1936

fonte: http://g1.globo.com/oscar-niemeyer/platb/ acesso 1 fev 18

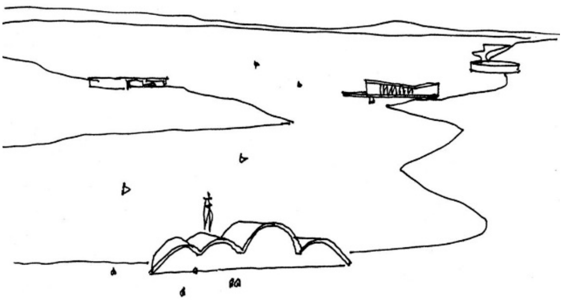
Em 1940, Niemeyer conhece o prefeito de Belo Horizonte, Juscelino Kubitschek, que o convida a realizar seu primeiro grande projeto, o Conjunto da Pampulha, formado por um Cassino, a Casa de Baile, o Clube e a Igreja de São Francisco de Assis ou Igreja da Pampulha. Sobre esse projeto declara: "Era um protesto que eu levava como arquiteto, de cobrir a igreja da Pampulha de curvas, das curvas mais variadas, essa intenção de contestar a arquitetura retilínea que então predominava." apud Zaleski Filho (2018), Pop&Arte (2012). Aí a curva invade definitivamente a vida e obra de Niemeyer.

Igreja de São Francisco de Assis 1940
Pampulha – Belo Horizonte e Oscar Niemeyer –



fonte: https://www.brasil247.com

Croqui do Complexo da Pampulha 1940 -



fonte: http://g1.globo.com/oscar-niemeyer/platb/ acesso 1 fev 18.

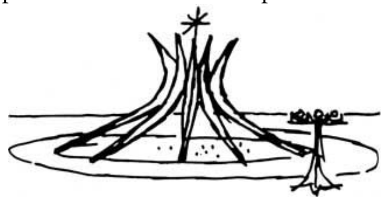
Oscar ingressa no Partido Comunista brasileiro e declara:

> Fui sempre um revoltado. Da família católica eu esquecera os velhos preconceitos, e o mundo parecia-me injusto, inaceitável. Entrei para o partido comunista, abraçado pelo pensamento de Marx que sigo até hoje. Pop&Arte (POP&ARTE, 2012).

Em 1956, convidado pelo Presidente da República Juscelino Kubitschek realizou vários projetos para a cidade de Brasília, a nova capital do Brasil. Entre eles, o Palácio da Alvorada, o Palácio do Planalto, o Itamaraty, o Congresso Nacional, a Catedral, a Praça dos Três Poderes, o Superior Tribunal Federal e o Teatro Nacional. Brasília foi inaugurada no dia 21 de abril de 1960.

Uma reflexão de Niemeyer sobre esse período: “Desse período guardo as melhores recordações, desde Darcy Ribeiro, que criou a Universidade de Brasília, superando todos os obstáculos, até os professores que o seguiram e com ele colaboraram com a mesma dedicação e idealismo”. Pop&Arte (2012), apud Zaleski Filho (2018).

Catedral metropolitana Nossa Senhora Aparecida – Brasília – esboço

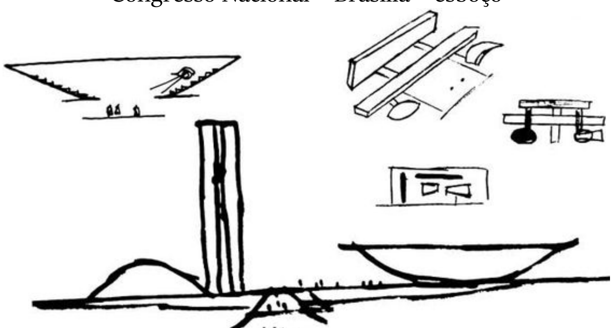


Fonte: http://g1.globo.com/oscar-niemeyer/platb/ acesso 1 fev 18

Catedral metropolitana Nossa Senhora Aparecida – Brasília

fonte:http://g1.globo.com/oscar-niemeyer/platb/ acesso 1 fev 1

Congresso Nacional – Brasília – esboço



Fonte: http://g1.globo.com/oscar-niemeyer/platb/ acesso 1 fev 18

Congresso Nacional – Brasília

Fonte: http://g1.globo.com/oscar-niemeyer/platb/ acesso 1 fev 18

Ainda sobre Brasília Niemeyer comenta:

> Os caminhões de operários vinham de toda parte querendo colaborar, pensando que iam encontrar a terra da promissão. E estão lá nas cidades satélites, tão pobres quanto antes. “Não basta fazer uma cidade moderna; é preciso mudar a sociedade.” Pop&Arte (2012), apud Zaleski Filho (2018).

O poema da curva: Não é o ângulo reto que me atrai, nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual. A curva que encontro nas montanhas do meu país, na mulher preferida, nas nuvens do céu e nas ondas do mar. De curvas é feito todo o universo, o universo curvo de Einstein.

É assim que aparece na segunda página o poema do livro “As curvas do tempo: memórias” de Oscar Niemeyer (1998). Na realidade vem de uma entrevista dada por Niemeyer, fala que se transformou em um texto famoso e nesse livro recebeu o nome de poema da curva. É talvez um dos únicos momentos em que o arquiteto se refere formalmente a conceitos matemáticos. Vale-se das metáforas para se referir as linhas curvas, como por exemplo, utilizando o corpo da mulher preferida ou as montanhas para se referir a elas.

Niemeyer sempre mostrou o “silêncio matemático” ou geométrico. Esse “silêncio” não era o único.

Pereira, apud Zaleski Filho (2018), escreve sobre isso, assim: “O discurso de Oscar Niemeyer, como todo discurso ideológico, é um discurso lacunar, isto é, omite, consciente ou inconscientemente, os argumentos ou explicações complementares ou contraditórias”. (ZALESKI FILHO, 1997, p. 114)

Continua comentando que um trabalho está ligado à ideologia não tanto pelo que diz, mas pelo que deixa de dizer e que no silêncio significativo de um texto, nos seus intervalos e ausências, que a presença da ideologia se faz sentir mais positivamente. Nesses silêncios que o crítico ou o pesquisador deve obrigar o pesquisado a “falar”.

Sobre como dar uma das interpretações sobre esse discurso lacunar ou silêncio geométrico, Pereira diz, apud Zaleski Filho (2018):

> As curvas de Oscar são parentes próximas das curvas que se fecham, invocando a beleza dos círculos da geometria de Platão, do tempo curvo de Hawking, da obsessão sensível de Paulo Valéry com sua serpente mordendo a própria cauda. (Ibid,p.124).

Por meio de metáforas, Pereira interpreta o silêncio geométrico de Niemeyer e a Matemática que o acompanha: a geometria de Platão limitava-se às figuras perfeitas que só existiriam na imaginação e assim também o círculo; Valéry tinha como ícone a serpente mordendo a própria cauda, cuja uma das interpretações dadas a ela é de simbolizar a sabedoria, além do interesse que ele tinha por matemática e da curiosidade intelectual que deixou registrada em duzentos e sessenta e um cadernos; Stephen Hawking tem ligadas a si ideias de um espaço-tempo curvo.

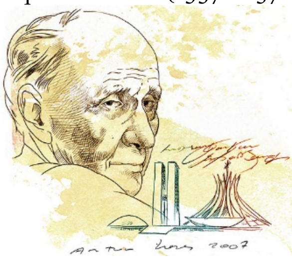
Niemeyer sempre teve junto a si um engenheiro calculista responsável pelo setor de cálculo nas estruturas das construções como, esforços e deformações. E em seguida dimensionar estruturas e materiais necessários para que a edificação não fique comprometida. Joaquim Cardozo, homem da ciência, homem das artes, de espírito inquieto e alma brasileira, foi o calculista de Niemeyer durante a construção de Brasília. Sobre ele, Niemeyer declarou, apud Zaleski Filho (2018):

> ... Quando o engenheiro especializado em cálculos atualiza seus conhecimentos profissionais, quando está a par de todos os avanços da técnica da construção, quando ele abandona as regras e as normas limitativas para especular somente sobre os problemas colocados pelo concreto armado, porque descobriu que é a melhor maneira de evoluir; quando ele conhece não só a profissão, mas também as artes visuais e a verdadeira arquitetura - o que, aliás, é raro -, enfim, quando ele consegue se entusiasmar não só pelo problema técnico a solucionar, mas também pelo sentido artístico e criador da obra para a qual colabora, então sua associação com o arquiteto torna-se fecunda e positiva". "Ao longo da minha vida profissional, tive o privilégio de encontrar esse complemento essencial na colaboração amiga e superior de Joaquim Cardozo. Ele está sempre decidido a encontrar a solução justa para cada problema. Uma solução que preserva a forma plástica sob todos os seus aspectos, quaisquer que sejam as dificuldades possíveis, porque ele tem, como eu, a certeza de que para se transformar em uma obra de arte, a arquitetura deve, antes de mais nada, ser bela e marcada de um espírito criador. (ZALESKI FILHO, 1986, pp.52-53).

Se foi Niemeyer quem criou essa proposta arquitetônica, quem a materializou foi Cardozo por meio da Matemática, entre outras. É dele esse depoimento no qual procuraria, tal como Lúcio Costa, uma explicação para esse cenário imaginado por Niemeyer, quando em 1962, no discurso como paraninfo, na solenidade de colação de grau dos concluintes da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Recife. O tema foi "Algumas ideias novas sobre arquitetura", pensando sobre a arquitetura que se fazia, discursou, e Pereira, apud Zaleski Filho (2018), relatou:

Presente-se, (...), uma tendência para a fuga, para o abandono dos antigos compromissos com as curvas e superfícies algébricas, para se situar no campo da geometria finita – (...) - para se voltar á intuição de uma geometria natural, valendo pelas qualidades imanentes e não por dispositivos sobre elas constituídos. Não mais uma geometria cartesiana – mas uma outra mais moderna... [São](...)superfícies imaginárias e sentidas como simples e originais expressões estéticas," (AUTOR, 1997, p. 1)

Joaquim Cardozo (1997 – 1978)



fonte:http://au17.pini.com.br/arquitetura-urbanismo/165/a-historia-do-engenheiro-e-calculista-joaquim-cardozo-67588- .aspx

Em outra fala sobre a construção do Congresso Nacional em Brasília, no texto "Curvas, Superfícies e Arquitetura", temos trechos de Joaquim Cardozo refletindo sobre a Matemática que acompanha Niemeyer:

Cidade: Brasília, Brasil
Ano: 1960
Curvas no Projeto: Elipsóide (Câmara), Parabolóide de revolução (Senado)
Descrição e Motivação: O edifício do Congresso Nacional em Brasília é composto por duas cúpulas, uma para o Senado Federal e outra para a Câmara dos Deputados. A primeira, cuja concavidade aponta para baixo, possui a forma de um paraboloide de revolução. A segunda, que Niemeyer queria que parecesse pousada na laje, apresentou um desafio mais robusto para o engenheiro Joaquim Cardozo. A primeira ideia foi utilizar um paraboloide de revolução gerado por uma parábola de 5º grau, mas com uma tangência de segunda ordem sobre a laje, mas as equações resultantes se mostraram excessivamente

> complexas. A opção, então, foi segmentar a cúpula em três trechos, de baixo para cima: elipsoide de revolução, calota esférica e tronco de cone. Joaquim Cardozo destaca que as superfícies possuem em comum a métrica da superfície de Liouville, $ds2=[\sigma(u)+\tau(v)].(du2+dv2)$, pois são superfícies de revolução. Ver Figura 66. (CARDOZO, 2012. p.1).

8. Sugestões didáticas

As obras de Mondrian e Niemeyer possibilitam a elaboração de atividades em sala de aula, tais como:

-pesquisas sobre a vida e obra de cada um;
-releitura das obras;
-explorar conceitos de geometria plana e espacial na Arquitetura do De Stjil, de Simetria nas colunas do Palácio da Alvorada e de Superfícies Regradas na Catedral de Brasília.

9. Reflexões Finais

Mondrian e Niemeyer fizeram Matemática? A estranheza é grande, pois a maioria desconhece o Matema – sobreviver e transcender -.

O mais importante, é que além dessa e de outras situações quaisquer, existe algo chamado "vida" e essa sim é que valerá a pena sempre e deverá ser exaltada.

A cidade é uma utopia, e só existirá a cidade do futuro quando nela seus habitantes, todos diferentes entre si, sejam tratados com respeito. Na cidade de hoje não existe o caos e sim a ordem possível construídas por seres humanos que lutam contra todo tipo de adversidade.

Para a maioria dos habitantes da cidade não existem nem Mondrian nem Niemeyer nem sua "Matemática". Esses habitantes não tiveram oportunidade de se preocupar com a transcendência, pois, mal conseguem lutar pela sobrevivência.

É interessante saber que, por exemplo, a Catedral de Brasília está acompanhada das *superfícies regradas* e que o Congresso Nacional recebe o acompanhamento da *métrica da superfície de Liouville*.

Também saber que um quadro de Mondrian foi criado pensando em um ambiente tão puro e tão simples que é um atributo da estética da Matemática, a simplicidade.

Esse trabalho foi baseado nas ideias de um teosofista que gostava muito de jazz e o outro comunista que gostava de estudar filosofia e cosmologia e que tinham em comum a paixão pelas mulheres e a utopia de um mundo mais igual. O poeta da reta e o poeta da curva.

Referências

ZALESKI FILHO, Dirceu. *Sistema Sigma de Ensino*. 7º ano – Ensino Fundamental – 2º bimestre – Matemática. São Paulo: Suplegraf, 2005.

______*Matemática e Arte*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

______ Reta e Curva: *Mondrian, Niemeyer, Matemática e a cidade*. Tese de Doutorado. São Paulo: Universidade Anhanguera, 2018. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com.br/bitstream/123456789/21794/1/DIRCEU%20ZALESKI%20-%202018.pdf

Capítulo 10

Performance Matemática Digital e a Literatura de Cordel: possibilidade de encontro da arte com a Matemática

Geciara da Silva Carvalho [1]
Hercules Gimenez [2]
Marcelo de Carvalho Borba [3]

1. Introdução

O que o Teatro Didático, a Literatura de Cordel e as Tecnologias Digitais (TD) têm a ver com a Educação Matemática? Essa é uma das perguntas que se busca responder ao longo desse capítulo e, para tanto se analisa um trabalho desenvolvido, no ano de 2017, por um grupo de bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) – *Campus* de Sinop. O referido trabalho consiste da produção de um vídeo digital para participação no I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática[4] promovido pelo Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática

---

[1] Professora da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS/BA. Doutoranda em Educação Matemática pela UNESP, *campus* de Rio Claro.

[2] Professor na Rede Estadual de Ensino do Estado de Mato Grosso – SEDUC/MT. Doutorando em Educação Matemática pela UNESP, *campus* de Rio Claro.

[3] Doutor em Educação Matemática pela Cornell University, livre-docente vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, campus de Rio Claro e coordenador do Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática.

[4] Disponível em: < https://www.festivalvideomat.com/videos-e-educacao>. Acesso em: 24 de mar, 2019.

(GPIMEM) da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) – *Campus* de Rio Claro.

O roteiro do vídeo baseou-se na obra literária *O Dia do Curinga* do escritor norueguês Jostein Gaarder (1996), em que descreve entre narrativas um calendário alternativo onde o tempo é baseado nas cartas de baralho. No calendário, cada estação corresponde a um naipe, cada carta simboliza uma semana do ano e cada mês equivale a um número de carta, sendo assim 13 meses ao ano com 28 dias cada. Dessa forma, somam-se 364 dias, o dia restante seria o dia do Curinga. O Curinga é a carta sem valor numérico no baralho, não pertence a nenhum naipe, e ao mesmo tempo pode assumir o papel de todas as outras. Nesse dia extra do ano, o Curinga por intermédio de um jogo resolve revelar algumas verdades às outras cartas e assim o dia fora do padrão acaba sendo aquele único dia no qual a rotina é suspensa em prol do juízo comum.

Figura 1 - Cartas do baralho

Fonte: Domínio público (2013)

Pelas singularidades e regularidades matemáticas envolvidas na obra e pelo caráter reflexivo da narrativa considerou-se no roteiro estabelecer aproximações entre a Filosofia e a Matemática, visando adequá-lo a uma *peça* teatral, usando a poesia de Cordel como narrativa e, por fim, moldar essa *peça* a uma Performance Matemática Digital (PMD). Nessa produção destaca-se o protagonismo da Peça Didática de Brecht, relacionando o conceito de efeito de distanciamento ou de estranhamento por parte do público, baseado em Magaldi (1991) e Rosenfeld (2006), com o potencial da Literatura de Cordel em produzi-lo na visão de Santos (2014) e Viana (2010).

Esta *peça* teatral, também chamada de "peça de aprendizagem", consiste de uma narrativa que estimula o senso crítico, em busca de um teatro educativo para a construção de um sujeito participante, com um olhar crítico e complexo diante da realidade. Segundo Brecht (2005, p. 65), "o palco passou a ter uma ação didática". Nos recursos da sua obra pode estar a utilização de cartazes, títulos, projeções de textos que comentam de forma narrativa as ações, "teatralizando" a literatura e também tornando a cena literária. Assim, as cenas do vídeo produzido foram pensadas incorporando a arte dramática com o traço estilístico da Literatura de Cordel visando um afastamento para despertar o público (espectador) de uma reação crítica perante os acontecimentos narrados nas cenas.

Pensar a produção do vídeo na perspectiva do teatro é explorar os variados caminhos que o mesmo pode oferecer no contexto educativo ao conectar o conhecimento e outras artes com a realidade, como por exemplo, a pesquisa desenvolvida por Lacerda (2015) que teve "a ideia de levar a Educação Matemática ao palco, para a cena, a partir do Teatro como linguagem artística" (LACERDA, 2015, p. 12). Essa performance foi investigada por esta autora que destacou nos seus resultados as potencialidades do teatro na transformação da imagem da Matemática e aproximações com as PMDs.

Por se tratar de um capítulo que busca relacionar a Arte com a Matemática ao abordar a produção de uma PMD em formato vídeo para o festival, faz-se necessário o esclarecimento de alguns termos recorrentes no texto com elementos próprios do teatro. Nesse sentido, usa-se, por exemplo, *cenário* para se referir ao contexto social em que se desenvolveu o trabalho, *público* para os alunos do Centro de Educação de Jovens e Adultos (CEJA) que assistiram ao vídeo em sala de aula e as pessoas que acessaram o vídeo na página do festival, *atores* para os bolsistas do PIBID que atuaram na *peça* e colaboraram na construção do *espetáculo*.

Figura 2 - As cartas do espetáculo

Fonte: Dados da pesquisa

A descrição dessa experiência de produção de vídeo será apresentada em *atos* no lugar de seções e os *atores* serão citados no texto pelos nomes dos seus respectivos personagens (Curinga, Ás de Copas, Rainha de Copas, Rei de Ouro, Valete de Espada e Sete de Paus), conforme figura 2. Portanto, se descreve o *cenário*, os *atores*, o *público*, a *peça* (produção literária) - e cada um dos *atos* (etapas da concepção e produção da PMD) que compõe esse *espetáculo* (vídeo estruturado na perspectiva do teatro didático).

Este estudo analítico e documental se caracteriza como um ensaio que tem como objetivo promover uma reflexão sobre as possibilidades de encontro da Arte com a Matemática sob três aspectos: a teoria da Peça Didática de Brecht, a narrativa de textos matemáticos através da Poesia de Cordel e as PMD como estratégia didática e comunicativa no processo de ensino e aprendizagem de Matemática em contextos multimodais. Espera-se desenvolver um novo cenário de pesquisa da Educação Matemática que amplia as fronteiras entre o Teatro Didático, Literatura de Cordel e Vídeos Digitais, como forma de compreensão da realidade por narrativas com elementos artísticos e lúdicos que possibilitem ressignificar a Matemática.

2. Pressupostos Teóricos e encontro de possibilidades

Atualmente a produção de vídeos digitais é uma atividade cotidiana e acessível, principalmente entre crianças e adolescentes, como se observa em sites como YouTube que permitem disponibilizar vídeos na Internet. Embora bastante utilizado no campo do entretenimento, esse artefato tem "grande potencial no campo educacional" conforme Vargas et al. (2007, p. 2).

Segundo Moran (1995), produzir vídeos é uma ferramenta que aproxima a sala de aula do cotidiano do aluno, das linguagens de aprendizagem e comunicação introduzindo novas questões no processo educacional. Para Oechsler, Fontes e Borba (2017, p. 79) esse processo favorece aos estudantes "elaborar sua própria narrativa e possibilita a eles uma reinvenção de escrita do mundo".

Nesse sentido, são inúmeras as possibilidades do uso do vídeo e suas potencialidades para os processos de ensino e aprendizagem. Almeida (2015) ao analisar o papel para a tecnologia vídeo considerou que esse artefato pode servir de repositório em que o estudante tem a possibilidade de buscar por materiais complementares que o auxilie na resolução de problemas ou no conteúdo da disciplina. Ainda nessa perspectiva, concluiu que esta mídia desempenha um papel de professor virtual onde os alunos interagem em cursos de licenciatura de Matemática.

Para Silva (2016, p. 54) a multimodalidade pode ser "entendida como o uso de diferentes fontes comunicativas, tais como: língua, imagem, som e música em textos multimodais e em eventos comunicativos". Considerando que o vídeo digital possui linguagem multimodal, Oechsler (2018) entende que quando o vídeo é explorado em todos os seus modos abre um leque de oportunidade para que os estudantes mostrem sinais de aprendizagem.

> Neste sentido, aqui não se defende que o vídeo é o melhor meio para que se promova a aprendizagem do estudante, e sim defendemos que, explorando as potencialidades dos vídeos em todos os seus modos (som, imagem, gestos, falas, escrita, entre outros), há chance de que alunos que não mostravam sinais de aprendizagem (tanto como produtores quanto como espectadores), em outros meios, o demonstrem aqui, por explorar diversos modos e atingir cada um na sua melhor forma de aprendizagem. Sabemos que algumas pessoas aprendem melhor ao verem uma imagem, outras ao lerem um texto, outras ao escreverem o que ouviram. Explorando essas potencialidades no vídeo, podemos atingir um número maior de pessoas do que se apenas utilizarmos um modo (a escrita, por exemplo) (OECHSLER, 2018, p. 91).

Diante do uso do vídeo enquanto estratégia didático-pedagógica e considerando os avanços da internet – web 2.0[5], sobretudo o seu impacto na comunicação online, é importante explicitar que a produção de vídeos digitais se inscreve na quarta fase das Tecnologias Digitais segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) ao organizarem o uso de tecnologias no cenário da Educação Matemática brasileira. Essa fase é caracterizada por diversos aspectos, a saber: multimodalidade, novos designs e interatividade, tecnologias móveis ou portáteis, performance e performance matemática digital.

Dentre os aspectos das TD, destaca-se o uso da PMD concebida como a interlocução entre a Arte, a Matemática e a Informática, como a própria sigla sugere "Performance Matemática Digital". No entanto é importante mencionar que, segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014, p. 107):

> PMD = Arte + TD é apenas uma forma introdutória e muito simplificada de descrever o sentido fundamental que atribuímos a "PMD". É relevante deixarmos claro que a noção de PMD envolve pluralidade semântica e conceitual. Por exemplo: em algumas

[5] O termo Web 2.0 foi utilizado, pela primeira vez, em 2004, pela empresa americana O'Reilly Media para designar a "Web como plataforma", que envolve wikis, blogs, ferramentas baseadas em redes sociais e tecnologias da Informação.

> situações, concebemos PMD enquanto *linha de pesquisa* (em potencial fase de consolidação em educação matemática). Em outros momentos discutimos a PMD enquanto enfoque didático e pedagógico para o ensino de Matemática.

Os autores acreditam que uma das principais concepções sobre PMD é o de texto-narrativo digital multimodal em formato de vídeo digital. Uma das formas de produzir e analisar vídeos se pauta no modelo de comunicação multimodal proposto pelo The New London Group (1996, p. 117) que se apoia na "[...] produção de significados a partir de textos impressos e digitais em contextos educacionais". Nesse sentido, esses pesquisadores criam novos cenários de investigação e/ou de ambientes multimodais de aprendizagem, utilizando as TD (computadores, celulares com acesso à internet, câmera de vídeo), artes (musicas, poesias, drama, histórias em quadrinhos, etc) e outros recursos (materiais manipulativos) para explorar ideias matemáticas.

A construção do produto digital PMD em formato vídeo que comunica e apresenta informações acerca de um ou mais objetos matemáticos, traz um enredo que pode favorecer um processo de descobertas e de diversidade cultural, especificamente uma nova leitura ou abordagem do que se deseja expressar e comunicar num cenário mais amplo e multimodal, extrapolando as salas de aula convencionais.

Um exemplo é a PMD, em formato de vídeo, intitulada Infinito[6] que reflete esta visão. Segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), nesse vídeo, alunos e professores utilizam da música para comunicar ideias sobre o infinito a partir de uma noção sobre séries infinitas e demonstrações visuais, apontando formas diferenciadas para se provar e elucidar um teorema. Identifica-se nessa PMD que a linguagem, em seus variados modos, quais sejam, falada (articulação de sons humanos), escrita (articulação de símbolos gráficos), mímica (gestos, expressões faciais e corporais), cromática (cores), musical

[6] Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=93PHCWIrVgk >. Acesso em: 05/04/2019.

(sons ou ritmos), iconográfica (imagem, desenho e ilustrações), dentre outros, possibilita a construção de significados matemáticos sobre o infinito.

Percebe-se então que o design das tecnologias e as potencialidades das mídias[7], quando associadas a cenários que possibilitam a investigação matemática, dentro da perspectiva desses autores permitem considerar a noção de que o conhecimento é produzido por coletivos de Seres-Humanos-com-Mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005) e enfatiza a ideia de realizar experimentação com tecnologia. Nesse ambiente onde o conhecimento é gerado e moldado por humanos e por tecnologias se enfoca os modos como os artefatos digitais moldam a produção de sentidos e a reorganização de pensamentos matemáticos. A produção de PMD forma coletivos pensantes como professores-estudantes-com artes-e-tecnologias digitais, especificamente professores-estudantes-teatro didático-literatura de Cordel-e-tecnologias digitais.

Assim, a PMD (Arte + TD), constitui um terreno favorável à investigação de possibilidades didático-pedagógicas diferenciadas e interdisciplinares que abarcam produção de conhecimentos e pensamento matemático mediados por Tecnologias e Arte.

3. Apresentando o espetáculo

O objeto deste estudo consiste em refletir o processo de produção de uma PMD em formato vídeo integrando o Teatro Didático e Literatura de Cordel. Nesse sentido, se descreve o processo de produção e participação do vídeo no I Festival de Vídeos e Educação Matemática, desde sua gênese até a sua premiação. Para tanto, foram utilizados os caminhos metodológicos que incluem a análise da peça teatral, a PMD em formato vídeo, trabalho publicado nos anais da 8ª Jornada Científica da UNEMAT e entrevistas. Os caminhos traçados

[7] A mídia entendida como suporte de difusão e veiculação da informação para gerar informação.

perpassam os pressupostos teóricos que nortearam todo o curso de produção da "*peça*", a escolha pela Peça Didática de Brecht modelada pela poesia de Cordel e os atos que influenciaram as cenas do vídeo, mormente as singularidades que o caracteriza como uma PMD. Esta prática de produção de vídeos alicerçada dentro dos muros da escola baseada em inter-relações dialógicas, de negociação, interlocução social e cultural, constitui um rico espaço de investigação.

Ao descrever o espetáculo enquanto cenário de investigação (SCUCUGLIA, 2018) como suporte donde brotam as interpretações, fala, a escuta, a ação e a inter-relação, vislumbram-se possibilidades de encontro entre a Arte e a Matemática. As salas de aulas baseadas em cenários envolvendo produção de vídeos com a integração *teatro didático* + *Literatura de Cordel* + *tecnologia*s podem diferir significativamente daquelas fundadas no paradigma do exercício. Para Borba, Almeida e Gracias (2018), pensar em uma pesquisa seja na Educação Básica ou Superior, deve ter por objetivo, ainda que implícito, causar um impacto na sala de aula. Esse ensaio atende a esta expectativa. Licenciandos em conjunto como um coletivo (PIBID, professores da UNEMAT e TD), a partir das vozes que ecoam nos seus processos formativos, bem como da escola, promovem por meio de vídeos/narrativas multimodais exemplos de modelos inovadores de metodologia de ensino que chegam à sala de aula.

Nesta perspectiva, buscou-se estender a compreensão dos Seres-Humanos-com-Mídias (S-H-C-M) ao relacionar a Arte com a Matemática, dentro de um formato de *texto-narrativo digital multimodal* visando à produção de significado através do vídeo em contexto educacional. Para uma melhor compreensão do espetáculo, indica-se que leitor assista a PMD produzida pelos estudantes, disponível no YouTube, que pode ser acessado com o QR code, em seguida:

Figura 3 - imagem do vídeo O dia do Curinga

Fonte: Dados da pesquisa

3.1 Os atos do teatro didático

• *Primeiro Ato: escolha da peça, construção do cenário e composição do elenco*

O elenco foi composto por seis *atores*, bolsistas do PIBID do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UNEMAT – *Campus* de Sinop. O PIBID oferece bolsas de iniciação à docência aos acadêmicos de cursos presenciais para estagiarem nas escolas públicas com o objetivo de antecipar o vínculo entre os futuros professores e as salas de aula, fazendo uma articulação entre a Educação Superior, a escola e as secretarias estaduais e municipais de Educação. Esses *atores* desempenharam um papel importante no CEJA "Benedito Sant'Ana da Silva Freire", oferecendo monitorias, cursinho preparatório para o ENEM e produziram diversos materiais didáticos para aulas de Matemática, ao longo do ano letivo de 2017. Na preparação desses materiais os bolsistas deram atenção especial ao uso de TD como softwares de matemática dinâmica, jogos matemáticos e videoaulas. Foi nesse contexto de produção de materiais didáticos utilizando tecnologias que surgiu a oportunidade de participar do I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática.

Quando a coordenadora do PIBID convidou os bolsistas a produzirem um vídeo digital para inscrever nesse Festival, imediatamente os *atores* trouxeram a proposta para o professor supervisor do PIBID no CEJA que sugeriu que fizessem uma gravação de um *drama*[8] que havia escrito para seus alunos do ensino fundamental baseado no livro *O Dia do Curinga*, mas ainda não tinham produzido o espetáculo. Pela limitação do tempo para produção do vídeo e de sua duração, o diálogo da *peça* foi transformado em narrativa pelo professor supervisor, o *Dramaturgo*[9], usando a poesia rimada e, os *atores* não seriam mais os alunos do CEJA, mas sim os próprios bolsistas.

O projeto inicial do professor supervisor era que a *peça* fosse apresentada pelo grupo de teatro formado por estudantes de duas turmas de Ensino Fundamental do período matutino, mas o mesmo não se estabeleceu. O objetivo dessa *peça* teatral, projetada para ser apresentada na noite cultural do CEJA, era contribuir com o ensino da Matemática para jovens e adultos, utilizando o teatro como ferramenta didático-pedagógica para introduzir conteúdos relacionados à Matemática contidos em um calendário, refletindo sobre a sua importância na organização da sociedade em suas múltiplas dimensões, porém com a produção do vídeo e a sua participação no Festival novos rumos foram tomados e novas perspectivas para esse trabalho criadas.

Figura 4 - O cenário

Fonte: dados da pesquisa

[8] Drama é uma história escrita com diálogo e indicações para ser representada.

[9] O professor supervisor, o dramaturgo, é o segundo autor deste capítulo e autor da peça teatral.

O cenário foi composto pelas cartas do baralho (Curinga, Ás de Copas, Rainha de Copas, Rei de Ouro, Valete de Espada e Sete de Paus), devidamente trajados e maquiados com a característica dos naipes exceto o curinga, conforme figura 4. Contam também no vídeo compondo cena, relógio, globo terrestre, cartas de baralho, espada, uma mesa com toalha detalhada com desenhos dos naipes e a estrutura da biblioteca composta de estantes e livros da Escola CEJA "Benedito Sant'Ana da Silva Freire", palco do espetáculo. Todos esses objetos foram pensados objetivando um dialogo com todos os demais elementos das cenas, e não representam meros enfeites do "palco".

Figura 5 - As relações de poder

Fonte: Domínio público (2007)

Em análise as cartas representadas na figura 5, o cenário da PMD *O Dia do Curinga* representa a luta de classes sociais com representantes do clero (copas); da burguesia (ouro); dos militares (a espada); e dos camponeses (paus). As narrativas foram montadas abordando nas cenas implicitamente as relações de poder e de decisão a partir do lugar de fala e atuação na sociedade de cada uma das cartas em busca dos mecanismos de controle do tempo para dominar a nação. O figurinista foi o Ás de Copas que acompanhou a produção dos trajes pela sua mãe que costurou cada uma das fantasias.

Do diálogo entre o *dramaturgo* e os *atores* surgiu à proposta de formatarem uma PMD em formato vídeo utilizando os três gêneros literários – *dramático*, por se tratar de uma *peça* teatral (comédia), *épico* por se tratar de uma narrativa e, *lírico* pela função poética. Segue a *peça* produzida com narrativa de cordel extraída do roteiro da PMD em formato vídeo:

Figura 6 - A peça teatral

A peça com narrativa de poesia de Cordel

E assim é que conta a história
De muito tempo atrás
Quando nem havia tempo
E ninguém se lembra mais

Numa terra tão distante
Que muitos desconheciam
Só as cartas de baralho
Naquela terra viviam

Havia reis e soldados
Cavalheiros, ases e damas
Gente de quatro naipes
Que viviam um grande drama

Silencio peço a todos
Prestem muita atenção
Que começa nesse instante
Uma grande reunião
Com a palavra o rei
O monarca trapalhão

Tempo, tempo, tempo, tempo
Como posso compreendê-lo
Se contigo me atrapalho?
Façamos um calendário
Com as cartas do baralho

Sete são as maravilhas
E as virtudes cardeais
Sete cores do arco-íris
Sete notas musicais
Sete dias da semana
E os pecados capitais

Cada carta do baralho
Representa uma semana
São cinquenta e duas cartas
Cinquenta e duas semanas
Que um ano instituiu
A Santa Igreja Romana

Se divide em quatro partes
O plano cartesiano
Quatro naipes do baralho
E quatro estações do ano
São quatro as fases da lua
E o ciclo do ser humano

Cada mês quatro semanas
Vinte e oito dias contamos
Nem trinta, nem trinta e um
No nosso mês encontramos
Não doze, mas treze meses
Que o nosso ano compomos

A terra gira o tempo todo
E pelo Universo se guia
Em torno de si: rotação
O que define um dia
Em torno do Sol translação
Um ano completaria

Então nesse calendário
Um ano ainda não finda
Treze vezes vinte e oito
Se me permite a respinga
Trezentos e sessenta e quatro
Falta o dia do coringa

Trezentos e sessenta e cinco
Mais seis horas completou
Um ciclo da translação
E em quatro anos juntou
Vinte e quatro horas a mais
Que o ano bissexto formou

Tempo, tempo, tempo, tempo
Mas que grande confusão
Como posso compreende-lo
Clareia a minha visão
Com o domínio do tempo
Na minha opinião
Podes jogar com o povo
E controlar a nação
Tempo, tempo,...

- *Segundo Ato: a proposta de produção da PMD*

Na construção da *peça* procurou-se explorar três aspectos fundamentais para a produção da PMD proposto por Boorstin

(1990), adaptados da produção de filmes para despertar a audiência a partir de três prazeres: voyeur (racional), vicário (emocional) e visceral. Ao inserir a Literatura de Cordel como narrativa dentro do estilo dramático do teatro combinados com técnicas de filmagens e/ou edição (sons, planos, cores, etc.), pode-se oferecer esses prazeres ou olhares fundamentais.

> (1) Voyeur: [...] busca-se (a) explorar ideias que proporcionem surpresas matemáticas, ou seja, ideias que busquem romper estereótipos sobre alguns conceitos, que explicite a Matemática como algo associado ao belo e maravilhoso; (b) comunicar as ideias de modo claro e objetivo, mas assumindo possíveis tensões entre a dimensão lógica do raciocínio matemático e a dimensão subjetiva emergente com as linguagens artísticas. (2) Emoções vicárias: refere-se aos momentos emocionais em que sentimos aquilo que os atores estão sentindo. [...]. (3) Sensações viscerais: refere-se aos momentos em que não sentimos exatamente o que os atores estão sentindo e passamos a sentir nossas próprias sensações. (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 120).

Quando algo de inesperado acontece, as pessoas tendem a prestar mais atenção, apreciar mais a experiência. Inusitadas ações fazem com que um turbilhão de emoções sejam disparadas! No contexto cinematográfico, a surpresa é um aspecto-chave para manter a audiência racionalmente interessada em um filme. Esta característica pode ser sentida diante de ideias e/ou caminhos lógicos que elucidam os saberes matemáticos tornando-os algo belo e maravilhoso.

Scucuglia (2012) propõe, do ponto de vista da performance e da Educação Matemática, surpresas, sentidos, emoções e sensações matemáticas como categorias para argumentar o que devem oferecer uma PMD conceitual (boa PMD). Essas foram as categorias que direcionaram as ações didáticas voltada a produção da PMD *O dia do Curinga* e o seu processo de interpretação e análise.

Ao analisar a *peça*, o número sete (7) está associado ao número de cores do arco-íris, as notas musicais, aos dias da semana e aos pecados capitais. De igual modo, o número quatro (4) está associado às partes do plano cartesiano, as virtudes cardeais, os naipes, as estações do ano, as fases da lua, e o ciclo de vida do ser humano. Fazendo 7 vezes 4 (7x4) obtém 28, o mês que equivale a cada tipo de carta do baralho (A,K,Q,J,10,9,8,7,6,5,4,3,2).

O número é um padrão que se repete em distintos contextos da vida humana. Isto mostra a natureza interdisciplinar do conhecimento matemático e as suas conexões nas áreas das Ciências da Natureza e Geografia, que tão pouco é contextualizado na sala de aula. Nesse cordel a surpresa matemática se materializa no processo de identificações de padrões, regularidades e sensações matemáticas entre os versos proferidos pelas cartas do baralho gerando sentidos nas relações estabelecidas.

Noutro giro, outros elementos surpresas são percebidos. O *Dama de Copas da* figura 7 recita que "A terra gira o tempo todo [...] Em torno de si: rotação [...] Em torno do sol translação [...]. O movimento de rotação da terra é o giro que o planeta realiza ao redor de si mesmo, ou seja, ao redor do seu próprio eixo (eixo y do plano cartesiano).

Figura 7 - O movimento da terra

Fonte: dados da pesquisa

Esse movimento se faz no sentido anti-horário, de oeste para leste, e tem duração aproximada de 24 horas, ou seja, define o dia.

Já o movimento de translação é aquele que a terra realiza ao redor do sol junto com os outros planetas. Em seu movimento de translação, a terra percorre um caminho ou órbita que tem a forma de uma elipse. A velocidade média da terra ao descrever essa órbita é de 107.000 km/ h, e o tempo necessário para completar uma volta em torno do sol é de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos… - aproximadamente 6 horas. O que fazer com essas 6 horas que sobram? Eis a "pergunta" do *Curinga*. Neste momento, as sensações e percepções matemáticas vão se eclodindo!

> 6 horas do 1º ano + 6 horas do 2º + 6 horas do 3º + 6 horas do 4º ano = 24 horas.

Obtém-se a quantidade de horas correspondente a um dia, que a cada quatro anos aparece no calendário como o dia 29 do mês de fevereiro, retrucou o *As de copa*. Assim, o ano civil, adotado por convenção, tem 365 dias. Considerando que um tempo real do movimento de translação, é de 365 dias e 6 horas, a cada quatro anos temos um ano de 366 dias, que é chamado ano bissexto.

Ainda em observação dos elementos do tempo relacionados neste calendário, e replicando padrões e regularidades, associou-se as 52 cartas do baralho às 52 semanas do ano, os 4 naipes do baralho com as 4 estações do ano. Se multiplicarmos 52 semanas por 7 dias (52x7) ou 13 meses por 28 dias (13x28), obteremos 364 e, como o ano tem 365 dias, falta então o dia do curinga, o que justifica o título do livro e da PMD.

Nesse cordel tem geometria, taxa de variação média, plano cartesiano e operações com números. Também podem ser articuladas simetrias de translação, rotação e reflexão objetivando o reconhecimento e construção de figuras com aplicação dessas simetrias, conteúdo cuja habilidade (EF07MA17) encontra-se prevista no BNCC[10] devendo ser iniciada no Ensino Fundamental e consolidada no Ensino Médio através do trabalho com transformações/movimentos do gráfico de uma função.

Observa-se que ao explorar as ideias acerca desses conteúdos matemáticos acima relatados na PMD, sensações racionais (voyeur) emergiram, ora relacionadas à natureza Matemática enquanto Ciência bela e maravilhosa, ora pelo caráter exato e preciso com que essas ideias foram comunicadas assumindo possíveis tensões entre a dimensão lógica do raciocínio matemático (objetiva) e a dimensão subjetiva das linguagens artísticas.

A PMD *O dia do Curinga*, boa PMD conforme as categorias de Scucuglia (2012), foi comunicada através de uma linguagem artística e multimodal com o objetivo de também provocar emoções vicárias, ou seja, sentir aquilo que os *atores* estão sentindo enquanto personagens, efeito da arte teatral; e, ao mesmo tempo, sensação de estranhamento, ou seja, sensações viscerais por parte do público: momento que o mesmo deixa de sentir o que o ator/personagem está vivendo em sua interpretação e passa a ter suas próprias sensações devido ao distanciamento entre ele (o público) e o ator e ao estranhamento sobre o que lhe era normal por ser familiar passando a refletir sobre o objetivo central do teatro. Afinal se vive em função do tempo e não se reflete sobre isso. Esta postura corrobora com a ideia de efeito de distanciamento preconizado por Brecht, tema abordado no *terceiro ato*.

- *Terceiro Ato: adaptação da Peça Didática*

> Necessitamos de um teatro que não nos proporcione somente as sensações, as ideias e os impulsos que são permitidos pelo respectivo contexto histórico das relações humanas (o contexto

[10] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que regulamenta quais são as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação básica para garantir o direito à aprendizagem e o desenvolvimento pleno de todos os estudantes.

> em que as ações se realizam), mas, sim, que empregue e suscite pensamentos e sentimentos que desempenhem um papel na modificação desse contexto (BRECHT, 1948, p.113).

Alguns antropólogos afirmam que o teatro surgiu com as sociedades primitivas a partir de seus rituais e, apesar de não ter as características que conhecemos hoje, já era entendido como uma linguagem e através dela é possível expressar sentimentos e comunicar produções científicas e culturais da humanidade às futuras gerações. Com o surgimento da civilização egípcia os rituais primitivos se transformaram em rituais sagrados baseados em mitos e surgiram as danças miméticas que tinham por finalidade divertir os nobres e propagar as tradições. Segundo Stanton e Banham (1996, p. 241): "o primeiro evento com diálogos registrado foi uma apresentação anual de peças sagradas no Antigo Egito do mito de Osíris e Íris, por volta de 2500 aC". Porém os primeiros textos teatrais surgiram na Grécia antiga com a evolução do ditirambo, uma procissão para homenagear Dionísio, o Deus do vinho (Baco para os romanos).

Com relação a esse ofício expomos duas visões: a do encenador russo Constantin Stanislávski (1863-1938) e do dramaturgo alemão Bertold Brecht (1898-1956). O primeiro defendia a ideia da entrega total do ator ao personagem, proporcionando ao espectador ver e ouvir a própria personagem e não o intérprete. Brecht discordava da teoria de Stanislávski, já que ele defendia a ideia do afastamento ao invés da fusão entre o ator e a personagem. Para ele, afastando da personagem o ator permite ao público desfrutar da liberdade para lembrar que o espetáculo é ficção. Assim afirma Magaldi (1991, p. 77):

> "O público liberta-se do mundo mágico da ficção, para submeter o espetáculo ao raciocínio dialético. A encenação enriquece a experiência do espectador, que apura o instrumento marxista de análise, com o objetivo de modificar a sociedade".

É nessa perspectiva que se fundamenta um dos principais conceitos desenvolvidos por Brecht: o efeito de estranhamento que diz respeito tanto aos propósitos da *peça* como da presença do público no espetáculo, buscando desmistificar a sociedade de classes. Considerando o teatro como recurso didático, na estrutura da *peça* épica, esse recurso tem por objetivo produzir no espectador um efeito de estranhamento sobre tantas coisas que, pelo hábito, se tornam familiar e por isso naturais e imutáveis. Nessa reflexão, o novo espectador se convence da necessidade de uma transformação, passando a intervir nos processos da natureza e nos processos sociais. Dentre os recursos de distanciamento utilizados por Brecht, Anatol Rosenfeld (2006) se destacam: recursos literários, recursos cênicos, recursos cênico-musicais e os recursos do ator como narrador. Sobre os recursos literários[11] destaca-se no próximo *ato* o uso da narrativa presente na rima da poesia de cordel.

A escolha feita pelos bolsistas do PIBID e professor supervisor pela Peça Didática de Brecht na concepção da PMD se justifica por se atribuir as peças uma ação didática, em que o ensino não se desvincule do prazer, favorecendo a imagem pública da Matemática.

> Neste sentido, as peças didáticas, situadas no interior do teatro épico brechtiano, se configuram como textos narrativos e descritivos que objetivam inspirar a diversão e o ensino, questionando as formas de organização dos homens em um contexto social e histórico definido, por meio do exercício do pensamento dialético (GONÇALVES, 2016, p. 12).

Diante do exposto, uma produção de vídeos com características da *peça* Brechtiana com narrativa que objetiva o ensino de forma lúdica e crítico, corroborando com Scucuglia

---

[11] Segundo Rosenfeld (2006), os recursos literários tratam principalmente da comicidade, já que um dos recursos mais importantes de Brecht, no âmbito literário, é o cômico, muitas vezes levado ao paradoxal, e se inserem aí a paródia e a sátira enquanto processos que possuem a função cômica.

(2014), constitui um ambiente multimodal de aprendizagem no qual existem recursos e processos específicos disponíveis, dentre eles, a narrativa em poesia de Cordel. Nesse sentido, há um contexto e uma proposta social e pedagógica como pano de fundo.

• *Quarto Ato: a escolha pela Literatura de Cordel*

> O cordel contém ciência, matemática, astrologia, noções de física, gramática, de história e geografia. Em linguagem popular, o cordel pode narrar tudo isso em poesia (VIANA, 2010, p. 10).

Nesse ato, é contada, de forma sucinta, a história da Literatura de Cordel segundo Santos (2014), uma vez que aborda o tema e por ser o CEJA o seu cenário de pesquisa, donde investigou a cultura do medo no ambiente escolar através de produções dos alunos em versos rimados sobre suas histórias de vida.

Este gênero literário nasceu em Portugal no século XVI, no período do Renascimento. Eram versos rimados impressos em papel rústico, com figuras xilogravadas, comercializados ao ar livre em mercados e feiras pelos próprios autores. Os impressos ficavam pendurados por um prendedor em barbantes, chamados de cordel, daí o nome desse gênero poético. Portanto foram os portugueses que trouxeram o cordel para o Brasil no início da colonização. Santos (2014, p. 200) nos conta:

> Pelo século dezesseis
> Época do renascimento
> Surge um gênero literário
> Próprio ao divertimento
> Veio em folheto impresso
> Era a arte do momento
>
> Em Portugal, os folhetos
> Feitos em rústico papel
> Estavam sempre a venda
> Ao relento, à luz do céu
> E ficavam pendurados

Em barbante de cordel

No século XIX, com o início das impressões desses folhetos no Brasil, o cordel começou a tomar características próprias, narrando fatos do cotidiano, episódios históricos, crenças e lendas, temas religiosos, dentre outros. O cordel é uma produção típica do Nordeste, principalmente nos Estados do Ceará, Pernambuco, Paraíba e Rio Grande do Norte, no entanto se faz presente em outros Estados, como Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo. Novamente é Santos (2014, p. 200) quem nos conta:

Por onde passava gente
O cordel estava lá
Nas ruas, em frente às lojas
No mercado popular
Narrando a vida diária
Era fácil encontrar

Duzentos anos depois
Chega ao Brasil o cordel
Expandiu-se no Nordeste
Em folheto de papel
Pois encontrou terra fértil
No nordestino fiel

Por sua grande abrangência de temas, por sua crítica político-social e por constituírem textos de opinião, o cordel passou a exercer um importante papel didático e educativo. Essa foi a proposta escolhida pelo professor supervisor e *atores*: utilizar a poesia de cordel para narrar um tema matemático, encenado na perspectiva da *peça* didática de Brecht, e por meio do uso de TD, produzir uma PMD. Sobre esse vídeo produzido (*O Dia do Curinga*), no próximo *ato* será apresentado alguns dados importantes que poderão auxiliar o leitor a responder a questão inicial de pesquisa.

• *Quinto Ato: produção do vídeo e sua validação no I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática*

Nesse momento se descreve a trajetória final do trabalho desenvolvido, desde o processo da gravação e edição do vídeo, até a participação do I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática.

O roteiro do vídeo *O dia do Curinga* foi produzido pelo professor supervisor em conjunto com os *atores*, o figurino pelo Ás de Copas e a edição foi feita pelo próprio *Curinga*. Contou-se com o apoio do coordenador do curso, das coordenadoras do PIBID e da equipe gestora do CEJA e a contribuição de um professor da UNEMAT na filmagem. A câmara de gravação, o microfone de lapela, dentre outras tecnologias necessárias para gravação foram cedidas pelo professor da UNEMAT. O cenário do vídeo encontra-se em harmonia com *peça* teatral desenvolvida e com os *atores* acompanhados dos seus respectivos trajes. Foram aproximadamente 8 horas para gravação das cenas na biblioteca, cenas gravadas por partes para depois serem montadas em um único arquivo e editadas no Movie Maker. Como o Curinga não tinha domínio técnico de edição, mas dominava outras tecnologias, foi mais fácil se apropriar do Movie Maker a partir de orientações dadas pelo professor da UNEMAT e informações na internet.

O Festival ocorre, inicialmente, de forma online, durante quatro meses. Por meio de um edital, participantes submetem vídeos produzidos por eles ou em colaboração com professores e colegas. Estes vídeos devem apresentar ideias matemáticas e estarem de acordo com as normas do Edital. Se selecionados para etapa final deveriam participar de um evento presencial para exibição, discussão e premiação dos vídeos. Segundo Domingues e Borba (2018), os critérios de avaliação foram: 1) Natureza da ideia matemática; 2) Criatividade e Imaginação; e 3) Qualidade artística-tecnológica. Estes critérios foram avaliados por jurados, previamente mencionados no site, composto por artistas, cineastas, matemáticos e educadores matemáticos. Outra categoria de jurados consiste no júri popular que contabiliza os “likes” do YouTube, No caso, o vídeo *dia do Curinga* obteve o maior número de likes demostrando a audiência obtida. Assim recebeu quatro premiações: júri popular, melhor figurino, roteiro adaptado e poético.

Como finalistas os *atores* e o professor supervisor compareceram na Cerimônia de Premiação do I Festival de Vídeos. A participação presencial do supervisor, do Ás de Copas e do Curinga no Festival de Vídeos foi de fundamental importância para seus trabalhos futuros. Nessa oportunidade concederam entrevista à um doutorando do GPIMEM, contribuindo com o pesquisador na produção de dados. Também conheceram outros participantes e trabalhos importantes na área de Educação Matemática e no meio Artístico e, retornando à Sinop/MT, participaram da 8ª Jornada Científica da UNEMAT com o trabalho: *Teatro e cordel em vídeo: uma possibilidade para o ensino da Matemática*[12] sobre o qual será citado na análise do espetáculo, abordando a opinião desses *atores* quanto à importância da experiência de produção de um vídeo pautado no Teatro Didático de Brecht com texto de narrativa em Cordel.

4. Uma Análise do Espetáculo

Além da participação no I Festival de Vídeos, *atores* e professor supervisor participaram da 8ª Jornada Científica da UNEMAT. Segundo Santos, *et al* (2017), a experiência de produzir um vídeo de Matemática a partir de uma *peça* teatral com narrativa de poesia de Cordel possibilitou contextualizar alguns conteúdos matemáticos de uma forma lúdica, cujo impacto extrapola os muros da escola e favorece que a aprendizagem

[12] Disponível em: <http://siec.unemat.br/anais/!default/impressao-pdf.php?r=OTIwNA==&i=NTQwMTM=&p=0&y=MA==&v=MA==&d=SQ==&cache=1550972773>. Acesso em: 23/02/2019.

aconteça fora dos seus limites, permitindo levar a atividade matemática para contextos não escolares, diante da abrangência e rapidez que a internet possui na circulação de informações.

Ainda afirmam ter desenvolvido habilidades como se posicionar e expressar em frente às câmeras com mais naturalidade, além da aquisição de conhecimentos técnicos relacionados à gravação e edição de vídeos consolidados a partir da internet. Neste caso, a internet pode ser considerada ora um objeto de aprendizagem, ora uma parte de um contexto que circunda aquele que aprende constituindo um meio sobre o qual o aluno desenvolve conhecimento. Também relatou que toda a dinâmica de gravação permitiu ajudá-los a superar dificuldades relacionadas com a timidez, comunicação e memorização, além de possibilitar maior aproximação entre os membros do PIBID fazendo-os perceber a importância do trabalho em equipe no contexto escolar.

Outro aspecto relevante observado referente à produção do vídeo *O dia do Curinga* diz respeito à contribuição na melhoria da imagem pública da Matemática. Para Santos, *et al* (2017), o conjunto vídeo digital + teatro pode ser um aliado para reverter a imagem negativa, que geralmente se tem expressa da matemática escolar. Isso se justifica dado ao enfoque didático e pedagógico da PMD para o ensino de Matemática, que no caso desse processo contribuiu significativamente para a formação dos *atores*, licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática da UNEMAT.

Percebe-se então que o processo de produção de vídeo configura-se como uma proposta exitosa e prazerosa onde o contato com as mídias, alterou a forma dos *atores* se portarem diante das câmeras resultando em melhorias das suas capacidades de comunicação e memorização. Neste caso, os *atores* (futuros professores de Matemática) foram moldados pelas mídias utilizadas adaptando-se as suas características tais como linguagens e estruturas técnicas produzindo saberes e rompendo dificuldades, como acima citado, a timidez.

Na mesma lógica, foi constatado na entrevista realizada com dois dos licenciandos do PIBID após participação no festival, quais sejam o *Curinga* e o *Ás de Copas*, que a associação entre o Teatro, o Cordel, Matemática e Tecnologias Digitais foi possível e favoreceu o desenvolvimento de habilidades relacionada a arte de comunicar e se expressar. Para o *Curinga a PMD "permitiu associar cordel, teatro, Matemática e tecnologias digitais e, também, o desenvolvimento de habilidades com produção de vídeos, comunicação e expressão"*. Esta compreensão é resultante da interação entre mídias e seres humanos e conforma com as ideias de Gregorutti (2016) ao afirmar que um ambiente performático contribuiu para a formação de coletivos pensantes do tipo Professores-com-Artes-e-Tecnologias.

Conforme dito anteriormente, a mídia vídeo já era utilizada como reforço de conteúdos no formato de videoaula pelos atores na UNEMAT. Na entrevista foi reforçado que os bolsistas produziram também uma série de animação contando histórias do livro "O Homem que Calculava" de Malba Tahan e uma produção de aula com avatar usando software de animação como o PowToon. Todas essas iniciativas reproduziam o professor no quadro ou contando histórias, segundo os entrevistados. Os vídeos produzidos naquele formato eram utilizados nas salas de aula do CEJA e nas monitorias. Somente a partir do convite para participação do Festival que se pensou na produção de uma PMD em *formato de texto-narrativo digital multimodal*. Um recorte da entrevista do *Às de Copa* se destaca: "*na verdade nosso projeto tinha haver com tecnologia, e a gente não usava a tecnologia da proposta. [...] Aí a professora propôs que a gente começasse a gravar videoaula. Aí ela geralmente dava o tema e a gente gravava como a gente quisesse*". Esta fala sugeri que embora houvesse uma orientação pedagógica para o uso das tecnologias digitais, já relatado no primeiro *ato*, o seu uso "domesticado" até então prevalecia nas práticas de sala de aula da UNEMAT e da escola.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014, p.29) defendem que “domesticar uma tecnologia significa utilizá-la de forma a manter intacta práticas que eram desenvolvidas com uma mídia que é predominante em um determinado momento da produção de conhecimento”, ou seja, embora a mídia possibilitasse construções multimodais, ela simplesmente reproduzia/gravava o professor falando ou ensinando matemática no quadro, que é primeiro estágio de uma videoaula.

Diante do exposto, pode-se inferir que o aceite ao convite para participação do Festival pode ter contribuído com o rompimento do processo de domesticação das mídias e melhorar, na visão dos licenciandos, *atores* e também produtores, a imagem da Matemática enquanto ciência lúdica, humana e criativa quando se buscou implementar a arte dramática na produção de um vídeo.

Esses depoimentos e analise corroboram com o construto teórico Seres-Humanos-com-Mídias sobre o qual o conhecimento é produzido por seres humanos em suas interações com mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Essas mídias incorporam linguagens próprias (falada, escrita, mímica, cromática, musical, iconográfica, etc) e, no caso do teatro, como linguagem multimodal pode deixar o status de artefato e passar a integrar-se ao coletivo S-H-C-M. A mídia então reorganiza o pensamento ao passo que é possível compreender conceitos matemáticos de maneira distinta, quando ela passa a se impregnar nas ações dos estudantes. Nesse caso, tem-se uma “moldagem recíproca”, ao moldar as mídias o ser humano também é moldado por ela.

A ideia de associar Arte, Matemática e TD pode ser considerada uma prática que tem o potencial para Educação Matemática discutido nesse capítulo. O papel das tecnologias e dos modos de comunicar no vídeo parece potencializar e ampliar os significados dos conhecimentos matemáticos num viés interdisciplinar quando se une diversão e ensino (Peça Didática de Brecht) na expectativa de aprendizagem.

5. As cortinas se fecham, mas o espetáculo continua.....

> [...] Só ensinados pela realidade é que podemos transformar a realidade (BRECHT, 1991, p.266).

A partir dos desafios da Educação Matemática deste século, em que há rupturas de paradigmas, faz-se necessário pensar em práticas interdisciplinares trazendo um contexto social para além da sala de aula (redes sociais na internet) e através de narrativas multimodais imagens alternativas sobre a Matemática e que podem ter uma função didático-pedagógica transformativa voltada à inovação educacional, corroborando com as ideias de Scucuglia (2014).

Ao juntar teatro e Matemática na produção do vídeo percebeu-se que pode ser modificada uma visão comum que toma como verdadeira a oposição entre aprender e divertir-se. Se teatro é diversão e aprender tem que ser também lúdico, partindo de uma reflexão, de um pensamento, o ato de pensar matematicamente neste cenário parece favorecer ao desenvolvimento da criatividade e do raciocínio lógico. Essa junção contribui para levar o prazer da atividade matemática para contextos não matemáticos, desmitificando sua imagem enquanto ciência fria e negativa. Assim, o valor dado ao divertimento como um objetivo essencial do teatro liga-se àquele sentimento de surpresa da PMD.

Outro aspecto a ser considerado em *seres humanos, teatro didático e mídias* refere-se às associações com o cotidiano que podem ser exploradas tanto nos seus conteúdos teóricos quanto pelas alternativas que trazem para a experiência prática das cenas sobre a realidade. Nesse entendimento, só ensinados pela realidade é que se pode transformar a realidade (BRECHT, 1991). Esta percepção afasta o professor da zona de conforto, de não percorrer caminho já trilhado da transmissão de conhecimentos, e o leva a enfrentar o desafio de pensar ele mesmo. Nesse sentido, espera-se ao adentrar uma zona de risco, onde Matemática e Arte se combinam, o professor venha a transformá-la em uma nova zona de conforto, onde o risco seja admitido.

A utilização da Literatura de Cordel no ambiente educacional pode explorar as possibilidades de sentidos oriundos do vídeo como as vozes sociais que tratam de vários temas, pois o cordel retrata a cultura, o cotidiano, a realidade de um povo e suas particularidades. A crítica oriunda da poesia de Cordel, objetivo essencial desse gênero, liga-se àquele sentimento resultante das sensações vicárias e viscerais da PMD. São enfatizados os modos de comunicação oferecidos pelas mídias digitais (gestos, elementos visuais, sons, espaços, vocabulários, materiais manipuláveis, dentre outros), na produção de surpresas, sentidos, emoções e sensações matemáticas. Nesse caso, os autores deste capítulo coadunam com Borba, Almeida e Gracias (2018) ao considerarem a TD como provocadora de transformações resultante de um coletivo pensante formado por humanos e não humanos.

A multimodalidade nessa sequência abarca mudanças tecnológicas que configuradas no vídeo expande a produção de significados, mas não diferencia o que eles representam. Ao associar Teatro Didático de Brecht ao vídeo modelado pela narrativa da Poesia de Cordel percebe-se a construção/representação de significados através do contexto social em que o enredo é criado e apresentado, fator determinante para fomentar a elaboração de opiniões e análise do entorno dos produtores.

Portanto, é possível inferir que a PMD *O Dia do Curinga* compartilha do ideário do The New London Group (1996) ao promover engajamento crítico necessário aos estudantes para projetarem seus futuros sociais. Isto pode ser observado no trecho do discurso comunicado no vídeo que aborda num viés político que “com o domínio do tempo pode-se jogar com o povo e controlar a nação”.

Nessa lógica, a linguagem e os seus modos de significar no vídeo digital podem ser vistos como recursos dinâmicos que são criados visando atingir variados propósitos de cunho educacional (ensinar matemática), cultural (expressar os contextos sociais) e político (desvendar ideologias).

Um ponto de encontro da Arte com Matemática pode ser expresso pelo vídeo baseado no Teatro Didático de Brecht, na Literatura de Cordel e nas TD visando provocar um estranhamento que permite desnaturalizar a cena, e consequentemente uma mudança na forma de comunicar uma ideia matemática através da arte, numa perspectiva de uma narrativa multimodal.

Então se altera a pergunta inicial: como se aprende, a partir da experiência de integrar Teatro Didático, a Literatura de Cordel e as Tecnologias Digitais na Educação Matemática? Com o teatro assim como no vídeo não apenas se vê, mas também pode se experimentar, no caso de estudantes *atores* da produção. Borba, Almeida e Gracias (2018) escrevem um livro a partir da pergunta: Se há tanta pesquisa em educação/ensino por que a educação está tão ruim? Não cabe aqui discutir essa pergunta, mas sim trazê-la para a discussão específica deste capítulo.

Entende-se neste caso que ainda há pouca pesquisa na relação entre Arte e Matemática. Por outro lado, as pesquisas que tem sido feitas, como as relacionadas à festivais, podem relacionar de modo potente reflexões filosóficas, teorias e metodologias de ensino com a sala de aula. Mesmo que seus estudos não sejam feitos nos seus limites físicos, a pesquisa pode ajudar a compreender as novas fronteiras da sala de aula: internet, arte, youtube, celular enquanto co-atores que compõem um coletivo de Seres-Humanos-com-Mídias que quebram de vez as paredes da sala de aula usual.

A possibilidade de encontro ente pesquisa e a sala de aula fomenta novos processos formativos ao considerar múltiplas vozes: alunos, licenciandos, professores, literatura, referenciais teóricos e internet, dentre outros que influenciam o cotidiano da escola. No caso desse estudo, os licenciandos foram conduzidos a modificarem suas práticas no ambiente escolar, por meio da produção de vídeo num contexto não domesticado, pautado no teatro, na poesia, na cultura, através de artefatos digitais, propiciando novos contextos e investigações ao conectar Arte e Matemática.

Nesse entendimento, os autores Borba, Almeida e Gracias (2018), consideram que a Educação (Matemática) e outras áreas afins, devem articular a teoria com a prática sobre pena de que a teoria não retorne a prática ou se estabeleça o que os autores chamam de ativismo, no caso da prática desprovida de discussão teórica. Este estudo reflete esse pensamento e é marcado também por vozes e expectativas dos autores que veem nas Tecnologias Digitais, Artes e Matemática um caminho inovador, promissor e crítico para produção do conhecimento matemático, sobretudo da construção de imagens alternativas da matemática nos cenários educacionais.

Estes constituem novos cenários de investigação para a arts-based-research na pesquisa em PMD como possibilidade de atuação estética de ensino e aprendizagem de Matemática constituída de experiências fundamentadas no uso educacional de artes e tecnologias digitais de pesquisas em Educação Matemática (SCUCUGLIA, 2018).

Ao longo desse capítulo, foi descrito e analisado uma PMD, em formato de vídeo, intitulada *O dia do Curinga*, como um encontro de possibilidades entre a Arte e Matemática quando alicerçada na teoria do Teatro Didático de Brecht mediante uma linguagem multimodal de versos em Cordel. A multimodalidade tratada nesse estudo buscou abarcar as diversificadas mudanças tecnológicas que permeiam o vídeo e sua produção, quando estas influenciam as escolhas dos seres humanos pelas mídias no como serem utilizadas, ao passo que as mídias reciprocamente alteram a forma de pensar e comunicar expandindo os significados do que se deseja representar e encenar. Resultante desse processo percebeu-se na fala dos atores, que habilidades foram desenvolvidas na produção e encenação do espetáculo, relacionados á comunicação e expressão, bem como, de favorecer a superação de dificuldades de memorização e timidez. Sendo esta uma boa PMD conforme categorias estabelecidas por Scucuglia (2012), por transitividade, é possível afirmar que ela contribua na transformação da imagem da Matemática ao se conduzir a atividade matemática num viés lúdico para cenários não escolares além dos muros da escola. Por fim, conclui-se que o vídeo produzido potencializa e amplia significados dos conhecimentos matemáticos num viés interdisciplinar quando se une diversão e ensino na expectativa de aprendizagem.

Agradecimentos

Embora não sejam responsáveis pelo conteúdo desse artigo queremos agradecer aos revisores e aos membros do GPIMEM que também fizeram suas sugestões em versões anteriores deste capítulo. Agrademos a: Lara Barbosa, Daniel Tebaldi, Franciéllem Roberta, Ana Paula Perovano, Leandra Dos Santos, Tiago Pereira, Neil da Rocha Canedo Junior, Ana Karina Baroni, Marcelo Batista, Sueli Liberatti Javaroni, Liliane Alves, Nilton Silveira Domingues, Tiago Giorgetti Chinellato, Liara Alves.

Referências

ALMEIDA, H. R. F. L. **O professor Vídeo na Disciplina Cálculo I a Distância**. Disponível em: <file:///C:/Users/sucesso/Downloads/275-3271-1-PB.pdf>. Acesso em 30 de janeiro de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum**. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf > .Acesso em 30 de março de 2019.

BRECHT, B. **Pequeno Organon para o Teatro**. S.I.: s.n., 1948.

BRECHT, B. **Estudos sobre teatro**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2005.

BRECHT, B. **A decisão**. Teatro completo. São Paulo: Paz e Terra, 1991.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em Ensino e Sala de Aula:** Diferentes Vozes em uma Investigação. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. 1 Ed. Belo Horizonte: Autêntica , 2014.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**. New York: Springer, 2005.

BOORTIN, J. **The Hollywood Eye:** What makes movies make. New York: Cornélia & Michael Bessie Books, 1990.

DOMINGUES, N. S.; BORBA, M. C. Compreendendo o I Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática. **Revista de Educação Matemática**, v. 15, 47 - 68. 2018a.

GAARDER, J. **O Dia do Curinga**. 1. Ed. São Paulo: Cia das Letras. 1ª. 1996. 396 p.

GARCIA, M. Uma história do Baralho, do Truco ao Poker. Revista Papo de homem 14/08/2007. Disponível em <https://papodehomem.com.br/uma-histria-do-baralho-do-truco-ao-poker/>. Imagem sob domínio público. Acesso em: 09 de maio de 2019.

GONÇALVES, N. K. R. **A Didática nas Peças Didáticas de Bertolt Brecht: ensino em cena**. Tese (Doutorado em Educação Escolar) - Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2016.

GREGORUTTI, G. S. **Performance matemática digital e imagem pública da Matemática: viagem poética na formação inicial de professores**. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.

LACERDA, H. D. G. **Educação Matemática Encena**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.

MAGALDI, S. **Iniciação ao Teatro**. São Paulo: Editora Ática. 1991. 126 p.

MORAN, J.M. **O vídeo na Sala de Aula**. Disponível em http://www.eca.usp.br/prof/moran/vidsal.htm Acesso em: 16 julho de 2011.

OECHSLER, V.; FONTES, B. C.; BORBA, M. C. Etapas da produção de vídeos por alunos da Educação Básica: uma experiência na aula de matemática. **Revista Brasileira de Educação Básica**, v. 2, n. 1, 71-80, 2017.

OECHSLER, V. **Comunicação multimodal: produção de vídeos em aulas de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, SP, 2018.

ROSENFELD, A. **O teatro épico**. 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 2006.

SANTOS, J. C. **A cultura do medo no cotidiano da escola: afetos, acolhimentos, violências, sofrimentos, como manifestações de um querer-viver societal**. Tese (Doutorado em Educação)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2014.

SANTOS, J. G. D.; CAMARGO, V. L. V. D; GIMENEZ, H.; WILHELM, D. K. **Teatro e Cordel em Vídeo: Uma possibilidade para o Ensino da Matemática**. In: 8ª Jornada Científica da UNEMAT. Vol. 8 (2017). ISSN Online 2178-7492.

SCUCUGLIA, R. "Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais". **Bolema. Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, Brasil, v. 28, n. 49, p. 950-973, 2014.

SCUCUGLIA, R. R. S. **Performance Matemática Digital: Arts-Based Research**. Disponível em: <https://sepq.org.br/eventos/vsipeq/documentos/22057969843/60>. Acesso em: 24 de março de 2019.

SCUCUGLIA, R. R. S. **On the nature of students' digital mathematical performances:** When elementary school students produce mathematical multimodal artistic narratives. Germany: Verlag – LAP Lambert Acedemic Publishing, 2012.

SILVA, M. Z V. D. **O Letramento Multimodal Crítico no Ensino Fundamental: investigando a relação entre a abordagem do livro didático de língua inglesa e a prática docente.** 2016. Tese (Doutorado em Linguística Aplicada) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2016.

SlLVA, Alan. TutorBrasil no YouTube. 24/08/2013. Disponível em <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=33652>. Imagem sob domínio público. Acesso em: 09 de maio de 2019.

STANTON, Sarah; BANHAM, Martin. **Cambridge paperback guide to Thestre. Cambridge University Press**, England. 1996.

THE NEW LONDON GROUP. A Pedagogy of multiliteracies: designing social futures. **Harvard Educational Review**, v. 66, n. 1, p. 60-92, 1996.

VIANA, A. **Acorda cordel na sala de aula:** a literatura popular como ferramenta auxiliar na educação. 2. ed. Fortaleza: Encaixe, 2010.

VARGAS, Ariel; ROCHA Heloísa V.; FREIRE, Fernanda Maria P. **Promídia: produção de vídeos digitais no contexto educacional**. Disponível em: < http://www.cinted.ufrgs.br/ciclo10/artigos/1bAriel.pdf> .Acesso em: 02 de março de 2019.

Capítulo 11

Thirty Seconds to Mars: uma Experiência Matemática Estética [1]

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva [2]
Gabriel Souza Gregorutti [3]
Stephanie Belazi [4]
Annie Branco Doná [5]

1. Introdução

Thirty Seconds to Mars é uma banda de pop rock estadunidense fundada no final da década de 1990 (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Thirty_Seconds_to_Mars). A banda é liderada por Jared Leto, que também é diretor, produtor e ator de cinema, tendo sido premiado com Oscar de melhor ator coadjuvante em 2014 pelo papel de Rayon em Clube de Compras Dallas (VALLEE, 2013). Em 2018, a banda lançou seu quinto álbum. A discografia da banda é a seguinte:

---

[1] Uma versão mais sucinta deste capítulo foi submetida ao XIII Encontro Nacional de Educação Matemática em 2019.

[2] Professor do Departamento de Educação do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de São José do Rio Preto. Integrante do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). Docente dos seguintes Programas de Pós-Graduação da Unesp: Educação Matemática; Ensino e Processos Formativos. E-mail: ricardo.scucuglia@unesp.br.

[3] Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Rio Claro.

[4] Aluna de graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de São José do Rio Preto.

[5] Graduada em Pedagogia. Professora do Colégio Ateneu.

- *30 Seconds to Mars* (LETO, 2002)
- *A Beutiful Lie* (LETO, 2005)
- *This is War*[6] (LETO, 2009a)
- *Love, Lust, Faith and Dreams* (LETO, 2013)
- *America* (LETO, 2018)

Ao longo dos anos, as produções musicais e audiovisuais da banda têm envolvido diversos tipos de símbolos e "enigmas", incluindo mensagens subliminares, sendo um cenário fértil para a investigação de problemas na interface artes-matemática-tecnologias. Nesse sentido, o objetivo deste texto, resultado de uma pesquisa experimental, é explorar problemas que fomentem o desenvolvimento de experiências matemáticas estéticas por meio de elementos da banda *Thirty Seconds to Mars*.

2. Uma Concepção sobre Experiência Estética

Por um lado, as Artes permeiam diversificados aspectos de nosso trabalho, atribuindo a nossas atividades de ensino e pesquisa uma dimensão estética. Por outro, não é nosso objetivo nos aprofundarmos nas diversas concepções sobre estética na história da filosofia. De maneira geral, a noção de experiência estética está associada à surpresa, à plenitude sensorial de nossa percepção, à um tipo de vivência rara pela visceralidade afetiva a um dado fenômeno (SINCLAIR, 2006).

> Uma experiência estética só pode compactar-se em um momento no sentido de um clímax de processos anteriores de longa duração se chegar em um movimento excepcional que abarque em si todas as outras coisas e o faça a ponto de todo resto ser esquecido. O que distingue uma experiência como estética é a conversão da resistência e das tensões, de explicitações que em si

[6] A produção e lançamento desse álbum, abordada no documentário *Artifact* (CUMBBIS, 2012), envolveu uma disputa judicial de US$ 30 milhões com a EMI. Bartholomew Cumbbis é um pseudônimo utilizado por Jared Leto como diretor.

> são tentações para digressão, em um movimento em direção a um desfecho inclusivo e gratificante. (DEWEY, 2010, p. 139).

O pesquisador se aproxima da porta da sala de aula de uma escola pública de Ensino Fundamental. A intenção é convidar os alunos para participarem de uma atividade de extensão universitária sobre produção de vídeos de Matemática.
A professora percebe a aproximação do pesquisador.
Professora: *pode entrar, professor.*
Pesquisador (com grande empolgação): *Com licença. E aí galera? Quem gosta de Matemática?*
Silêncio. Alunos em choque.
Aluno ao fundo da sala: *Cê tá loco, mano? Não sabe chegá no role? Pica o trecho, maluco.*
Aluno no centro da sala: *Então, professor. Eu acho que eu gosto. Mas não sei o que acontece. Eu entendo o que a professora fala, copio toda matéria e estudo em casa. Mas chega na prova, dá zica; sempre vou mal. Meu pai fala que matemática é super importante; e eu sei que é. Mas como eu estudo e vou mal na prova, não sei se eu gosto ou não.*
Aluna na primeira fileira da sala: *Professor, eu não sei nada de Matemática, mas tiro dez em todas as provas. Eu sei de qual site na Internet a professora pega as questões e nem preciso copiar para prova; vejo tudo do celular na hora.*
Pesquisador: *E aí galera? Quem gosta de Internet?*
Aluno ao fundo da sala: *Aí sim hein, professor! Internet é vida, hein. Face, Insta. As novinha tira foto na frente do espelho. Manda nude. Cê tá ligado, né? Na net todo mundo é maior de 18.*
Aluno no centro da sala: *Então, professor. Todo mundo gosta de Internet, né? Quem não? Mas a NASA tem que vir estudar essa escola. Quando a Internet funciona aqui, nenhum professor usa. Quando professor quer usar, a Internet nunca funciona. E no meu bairro não tem Internet. De vez enquanto, meu pai me dá uma grana pra ir à lan house, mas só se eu for bem na prova de matemática. Então...*
Aluna na primeira fileira da sala: *Eu amo Internet. Eu baixo todas as músicas de graça pra nóis dançar aqui. A gente tem um grupo de funk aqui da sala.*
Aluno ao fundo da sala: *Aí professor, quem falo que não tem matemática no funk. Olha aqui, quadradinho de oito. Será que é um cubo. Acho que não, por que o cubo tem seis lados, né?*
Aluno no centro da sala: *seis faces.*

O pesquisador pensa: se quiserem participar do curso de vídeos, vou propor criarem videoclipe sobre representações do hipercubo.
Aluno ao fundo da sala: *Olha aqui, professor. Matemática do MC Pedrinho; bala na agulha, professor.*
A música começa a tocar no celular do aluno. O refrão diz: "40% oral, 60 pra tu sentar". Alunas se levantam das carteiras e começam a dançar.
O pesquisador pensa: se quiserem participar do curso de vídeos, vou propor criarem videoclipe sobre porcentagem, mas considerando algumas normas escolares. É provável que discutiremos temas transversais sobre sexualidade, DST, gravidez na adolescência.
Professora (em tom muito exaltado): *Podem parar! Podem parar! Vocês estão pensando que isso aqui é o que? E vocês ficam aí com esse tipo dancinha indecente. Com esses shortinhos. Estão pensando que isso aqui é o que? Depois aparecem barrigudas aí, e não sabem por quê. Fazer filho e dar para mãe criar, é fácil. Quero ver cuidar. Não é verdade, professor?*
O pesquisador fecha os olhos; sabe que deve respeitar a autoridade e autonomia da professora em sua sala de aula. Pensa em dizer sobre as oportunidades didáticas e pedagógicas emergentes no cenário.
Pesquisador: *Meu amigo irá responder, professora.*
Vídeo: https://youtu.be/H6Nq6QU93RQ

> *Quem sou eu para julgar se uma saia ou uma dança é indecente?*
> *Problema sério é gravidez de adolescente.*
> *Nunca fui, mas sei o que acontece em baile funk.*
> *Mas tenho amigo que já fez sexo até em roda punk.*
> *O problema, não ser do funk um grande admirador.*
> *É apenas gostar disso, e nem saber quem que é o Gabriel O Pensador*

É possível explorarmos matematicamente o que mais gostamos. Nós apreciamos *Thirty Seconds to Mars*. Do que seus alunos mais gostam?

3. Thirty Seconds to M@th

3.1. *Da Terra à Marte.* Qual deve ser a velocidade de um objeto para se deslocar da Terra à Marte em 30 segundos?

- Distância Terra-Marte: 57,6 milhões de km.
- velocidade da luz como 300.000 km/s.
- 57.600.000 / 300.000 = 192
- 192/30 = 6,4

R: A velocidade deve ser de 6,4 vezes a velocidade da luz.

3.2 *Glyphics* (Figura 1): Do álbum *30 Seconds to Mars* (LETO, 2002). O que significam, em sua opinião, os símbolos a seguir? Construa os *Glyphics* no GeoGebra.

Figura 1 – *Glyphics*

Fonte: https://www.dafont.com/forum/attach/orig/1/0/101321.png

Usando transformações geométricas (e.g. reflexões, simetrias, translações, rotações, etc.) e outras "propriedades" como curvas de nível, crie os *Glyphics* a partir dos *Secret Glyphics* (Figura 2).

Figura 2 – *Secret Glyphics*

Fonte:

https://i.pinimg.com/originals/ba/2c/22/ba2c22eb0c804548fd636ff6228e1d97.jpg

Enunciado alternativo: Insira os *Secret Glyphics* em uma caixa em formato de um cubo. Leve a caixa a quarta dimensão, ou seja, transforme-a em um hipercubo. Traga a caixa de volta a nossa dimensão, abra-a, e irá encontrar os *Glyphics*. Desafio: O que aconteceu na caixa?

3.3. *Tríade* (Figura 2): Do álbum *This is War* (LETO, 2009a).

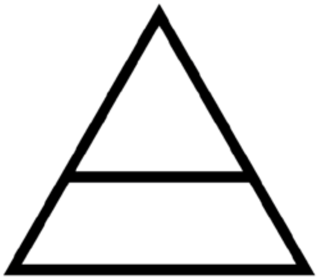


Figura 2 - Tríade
Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fc/30stmTriad.jpg

Seja ABC um triângulo equilátero cujo lado mede *l* e DE um segmento de reta inscrito paralelo a base do triângulo. Seja AM a altura/mediana referente a base do triângulo e O o ponto de intersecção entre AM e DE. Elabore essa construção no GeoGebra (Figura 3).

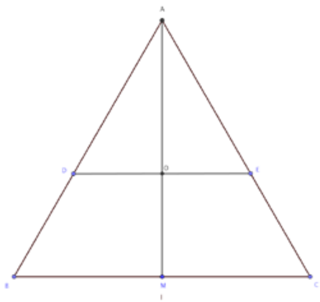


Figura 3 – Tríade (Elaboração própria – software GeoGebra)

P_1: Se a medida a área do triângulo ADE for igual a medida a área do trapézio BDEC, qual o valor da medida do segmento AO em função de *l*?

$\Delta ABC \approx \Delta ADE$ (caso AA).

Medida do segmento $AM = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

Seja *a* o valor da medida do segmento DE e x o valor da medida do segmento AO.

Como o valor da área do ΔABC é o dobro do valor da área do ΔADE, temos:

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

Em decorrência da semelhança, temos, portanto:

$$\frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} = l.x \Longrightarrow x = \frac{l\sqrt{6}}{4}.$$

P_2: Seja AO = OM: (a) qual o valor da medida a área do triângulo ADE? (b) qual o valor da medida a área do trapézio BDEC?

(a) Como $a = \frac{l}{2}$, a medida da área do ΔADE é $\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{16}$.

(b) Consequentemente, área do trapézio BDEC é

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} - \frac{l^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{16}.$$

3.4. Construa a tríade no GeoGebra (VITAL, 2018). Considere o segmento de reta inscrito dinâmico (controle deslizante), “deslizando da base do triângulo ao vértice oposto”. Considere um ponto se movimentando sobre a altura do triângulo, partido do vértice oposto a base em direção ponto médio da base. Considere que o movimento ocorre de acordo com um dos paradoxos de Zenão, ou seja, de acordo com a seguinte série: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Prove que esta série é convergente. Prove que toda série geométrica nas seguintes condições é convergente

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}, \text{ for } |r| < 1.$$

.

⇧**Provehito in Altum** (Figura 4). Lançar-se em direção as alturas, buscar o infinito. Um demonstração ritualística em estado superior?

Figura 4 – Provehito in Altum
Fonte: http://3.bp.blogspot.com/-ltbKtS2vtVU/TjCJUTaxS4I/AAAAAAAAAtI/OjC3fwMhPyc/s1600/1211250901_f%255B2%255D.jpg

> The motto of Memorial University, *Provehito in Altum*, is well known, both in Newfoundland and away. It adorns the ceremonial arms of the university, inscribed upon a glowing scroll. It was featured on the masthead of the early issues of The Muse and in its pages ever after; it graced Memorial library's checkout cards; and it was so frequently invoked in early graduation speeches that it could incite burning annoyance. The motto is still a mainstay in convocation addresses, but it also inspired the Altum Society at MUN's School of Nursing and subtitles MUN's Strategic Research Intensity Plan, 2014-2020. It is found inscribed in various places around the university, in particular on the edge of its convocation table, and prominently (and very appropriately) in the deep recesses of MUN's intra-campus tunnels. The motto has also been adopted outside the university, most notably by the band Thirty Seconds to Mars, whence it seems to have inspired countless items of apparel, artwork, and even tattoos (Pollard, 2017, p. 227).

3.5. Na referida série, $a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Se considerarmos a sequencia $(\frac{1}{2}, \frac{?}{?}, \frac{3}{4})$, podemos conjecturar $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$, o que nos remete aos harmônicos fundamentais na música, ou seja, a gênese da concepção de música com o monocórdio na escola de Pitágoras (ABDONOUR, 2005). Além de $2/3 = 0,666...$, – um número profano? – se considerarmos em (3.2) a medida do segmento $AO = 2/3$, obteremos um ponto notável do triângulo equilátero; provavelmente, um dos pontos mais nobres de toda geometria plana, o qual é baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro do triângulo equilátero (Figura 5).

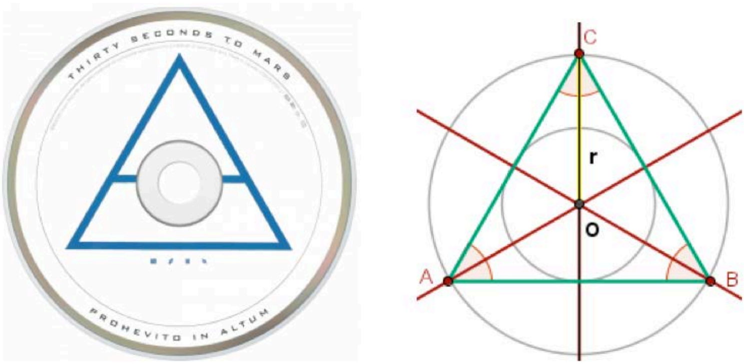


Figura 5 - Relação entre a tríade e pontos notáveis
Fonte: https://i.stack.imgur.com/r3v4Z.gif;
Fonte: https://fanart.tv/detailpreview/fanart/music/d8354b38-e942-4c89-ba93-29323432abc3/cdart/this-is-war-4e1cbf31e65d4.png

3.6. *Fractals*. Considere AO = ½ e construa um Triângulo de Sierpinski utilizando o GeoGebra. Construa um Tetraedro de Sierpinski utilizando o GeoGebra 3D (BARBOSA, 2019).

Fonte: https://www.geogebra.org/u/lara-barbosa

3.7 *Jared Magnetic.* Na performance de *The Kill* no festival *Rock Am Ring* em 2010 (ver https://youtu.be/UDv4WrhrwqY), Jared Leto junta-se a audiência, transformando os espectadores em "especActors" (BOAL, 2009). Em um dos momentos de maior êxtase da performance, em uma tomada aérea, temos a seguinte situação (Figura 6), na qual as pessoas são movidas em movimentos de aproximação em direção Jared.

Figura 6 - Performance The Kill em Rock AM Ring, 2010 – tomada superior
Fonte: Imagem capturada de https://youtu.be/UDv4WrhrwqY

Em https://mathematica.stackexchange.com/questions/37018/plotting-a-gravity-field encontramos uma interessante discussão que nos elucida um modelo para o fenômeno mencionado criado com base em campos de direções com o aplicativo *Mathematica* (Figura 7 e Figura 8).

```
VectorPlot[-#/Norm[#]^3 &[{x, y}], {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
          VectorPoints -> 20, VectorScale -> .3,
          RegionFunction -> (Norm[{#, #2}] > .1 &),
          ImageSize -> 500, PlotRange -> 1]
```

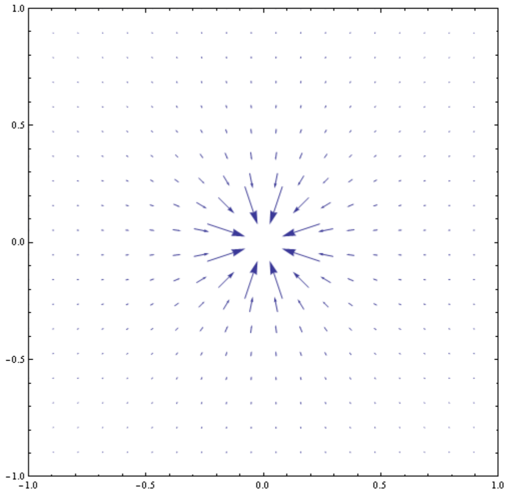


Figura 7 – Simulação com Mathematica

Fonte: https://mathematica.stackexchange.com/questions/37018/plotting-a-gravity-field

```
VectorPlot[-#/Norm[#]^3 &[{x, y}], {x, -1, 2}, {y, -1, 1}, VectorPoints -> 30,
        VectorScale -> {.1, Automatic, (#5)^(1/3) &},
        RegionFunction -> (Norm[{#, #2}] > .1 &), ImageSize -> 500,
        PlotRange -> {{-1, 2}, {-1, 1}}, VectorStyle -> "Pointer",
        GridLines -> ({#, #} &[Join[Range[-1, 2, .1], {{0, Directive[Thick, Blue]}}]]),
        Epilog -> {EdgeForm[{Thick, Blue}], Red, Disk[{0, 0}, .05]},
        AspectRatio -> Automatic]
```

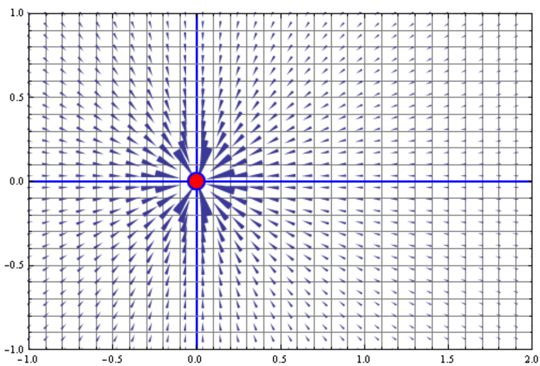


Figura 8 – Simulação com Mathematica

Fonte: https://mathematica.stackexchange.com/questions/37018/plotting-a-gravity-field

Conundrum (Ricardo). Certa vez, em um ápice de euforia[7], estive convicto que de havia demonstrado um grande teorema matemático fundamentado no álbum *Love Love Faith + Dreams*, ouvindo e performando a música *Birth* e utilizando a *artwork* do encarte. Cheguei a enunciar a ideia como "A Conjectura das Cores Fractais". Uma de suas provas perpassava por conceitos em Teoria dos Grafos (Teorema das Quatro Cores), pela estética em Damien Hirst, pela teoria das cores, pela geometria fractal (triângulo e tetraedro de Sierpinsky) e pela convergência de séries geométricas em Análise Real. Passada a euforia, me convenci facilmente de que tratava-se de mais um desdobramento de ansiedades ludibriantes, outro devaneio...

> Analista: Esse tipo de anestesia causa uma falsa percepção sobre a produtividade. Sugiro ocupar seu tempo vivido com coisas saudáveis que lhe proporcionem prazer. Ações que o façam se sentir plenamente vivo, com seus sentidos em plenitude espaciotemporal. Do que você realmente gosta?

4. Love Lust Faith + Dreams

Em *Up in the Air* (CUMBBIS, 2013) (ver https://youtu.be/y9uSyICrtow), há uma dimensão estética que explora cores, gestos e movimentos. Há também mensagens subliminares. Entre os segundos 56s e 57s do curta-metragem, por exemplo, são apresentadas mais de 30 imagens, muitas delas não percebidas conscientemente pela audiência. Para McLuhan (1964), a repetição de anúncios faz com que marcas e produtos anunciados se afirmem gradativamente para o consumidor. "Os anúncios não são endereçados ao consumo consciente. São como 'pílulas subliminares' para o subconsciente, com o fito de exercer um feitiço hipnótico" (McLuhan, 1964, p. 257). De acordo com Key

[7] Como *Euphoria Morning* de Chris Cornell.

(1974) as principais estratégias em termos de mensagens subliminares são: inversão de figura/fundo; método de embutir imagens; duplo sentido; projeção taquicoscópica; luz de baixa intensidade; luz e som de fundo. Ao discorrer sobre a "propaganda subliminar multimídia", Calazans (2006) destaca avanços emergentes com resultados de pesquisas nessa área envolvendo o uso do equipamento denominado taquicoscópio. Esses estudos mostram evidências de que há uma reação do cérebro à apresentação de imagens no tempo de 1/3000 de segundo, sendo esta a definição de subliminar em termos taquicoscópicos.

Como podemos utilizar mensagens subliminares na produção de vídeos em Educação Matemática? O que esconderíamos em um vídeo educacional?

Convite: Scucuglia (2019) (ver: https://youtu.be/dTs2j62fYKI).

5. Hurricane

Para a *International Society for Technology in Education* (ISTE) e a *American Computer Science Teachers Association* (CSTA), o pensamento computacional pode ser caracterizado por habilidades como a coleta de dados, análise de dados, representação de dados, decomposição do problema, abstração, algoritmização, automação, simulação e paralelização (ISTE/CSTA, 2011). Em uma de nossas atividades de pesquisa, engajamos alunos de primeiro e segundo anos do Ensino Fundamental na exploração do aplicativo disponível em researchideas.ca/wmt/c2a0.html. (GADANIDIS, 2017). Basicamente, eles criaram padrões com sequencia de cores e simularam seus padrões utilizando sons (xilofone), lápis de cor e tiras de papel e dança sobre tapetes coloridos. Nesse cenário, exploraram conexões entre múltiplas representações envolvendo diferentes habilidades do pensamento computacional (Figura 9).

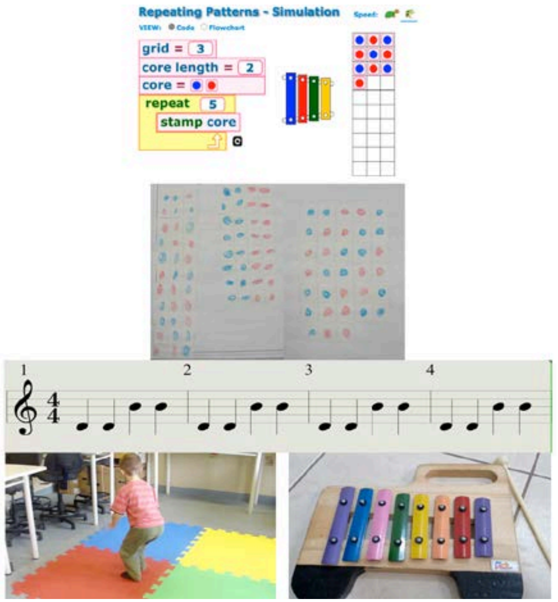


Figura 9 – Atividade sobre pensamento computacional
Fonte: dados de pesquisas dos autores

Vejamos a Figura 10. Quais habilidades do pensamento computacional podemos explorar com um trecho para partitura da música *Hurricane* (LETO, 2009b)? Pensar musicalmente ≈ Pensar matematicamente ≈ Pensar computacionalmente.

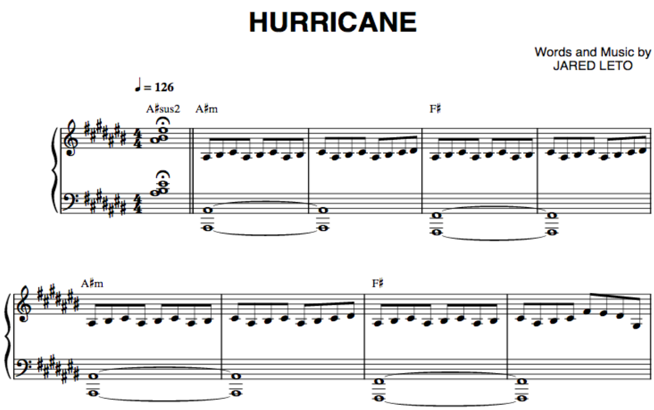


Figura 10 – Trecho da partitura de Hurricane
Fonte: https://musescore.com/neoone/scores/3986606

Decomposição do problema, abstração, algoritmização, automação, simulação são habilidades que se fazem presente quando elaboramos esse trecho da música utilizando o software Logic Pro X (Figura 11).

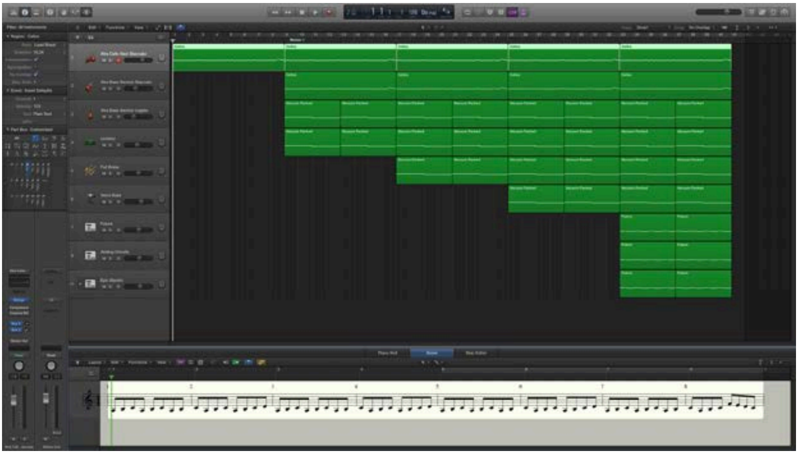


Figura 11 – Hurricane com Logic Pro
Fonte: dados de pesquisa dos autores

6. Comentários Finais

O objetivo deste texto é fomentar a elaboração de experiências matemáticas estéticas por meio da exploração de elementos da banda *Thirty Seconds to Mars*. O leitor é incentivado a elaborar outras analogias com a banda ou com artistas/gêneros de sua preferência. A proposta, de maneira geral, é explorar a interface artes-tecnologias em Educação Matemática visando possibilidades criativas de atuação em sala de aula de matemática nas quais os alunos são de "certo estado de anestesia", e possam vivenciar experiências matemáticas na plenitude de seus sentidos, percebendo as *ticas de matema* como um engajamento pedagógico-social-cultural e, portanto, humano.

> Palavra, imagem e som, que hoje são canais de opressão, devem ser usados pelos oprimidos como formas de rebeldia e ação, não passiva contemplação absorta. Não basta consumir cultura: é necessário produzi-la. Não basta gozar arte: necessário é ser artista! Não basta produzir ideias: necessário é transformá-la em atos sociais, concretos e continuados. Em algum momento escrevi que ser humano é ser teatro. Devo ampliar o conceito: ser humano é ser artista! Arte e estética são instrumentos de libertação (BOAL, 2009, p. 19).

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Edital universal, processo 428323/2018-9.

Referências

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música:** o pensamento analógico naconstrução de significados. 3ª. Ed. – São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

BARBOSA, Lara Martins. **Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o Software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, 2019.

BOAL, A. *A estética do oprimido.* Rio de Janeiro: Garamond, 2009. 256 p. Calazans. Flavio. **Propaganda subliminar multimídia.** São Paulo: Summus Editorial, 2006.

CUMBBIS, Bartholomew. **Artifact.** USA: FilmBuff, 2012.

CUMBBIS, Bartholomew. **Up in the Air.** USA: Virgin Records, 2013.

DEWEY, John. **Arte como experiência.** São Paulo: Martins Fontes, 2010.

GADANIDIS, Gadanidis. **Repeating patterns.** Disponível em: http://researchideas.ca/wmt/c2a0.html , 2017a.

ISTE/CSTA. **Computational Thinking Teacher Resource.** 2ed., 2011. Disponível em: <csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SP-vF.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2018.

KEY, Wilson Bryan. **Subliminal Seduction**. New York: New American Library, 1974.

LETO, Jared. **Debut.** Santa Monica, CA: Immortal Records, 2002.

LETO, Jared. **This is War.** USA: Virgin Records, 2009a.

LETO, Jared. Hurricane. In: LETO, Jared **This is War.** USA: Virgin Records, 2009b.

LETO, Jared. **Love Lust Faith + Dreams.** USA: Virgin Records, 2013.

LETO, Jared. **America.** USA: Universal Music, 2018.

McLuhan, Marshall. **Understanding media: the extensions of man.** USA: Mentor book, 1964.

POLLARD, Richard Matthew. Provehito in Altum ("Launch out into the Deep"). **Newfoundland and Labrador Studies**, [S.l.], nov. 2014. ISSN 1715-1430. Disponível em: <https://journals.lib.unb.ca/index.php/NFLDS/article/view/23070/26791>. Acesso em: 20 de maio de 2019.

SCUCUGLIA, Ricardo. **Surpreenda Matematicamente em 30s – Convite**. Disponível em: https://youtu.be/dTs2j62fYKI. 2019

SINCLAIR, Nathalie. **Mathematics and Beauty:** Aesthetic Approaches to Teaching Children. New York: Teachers College, 2006. 209 p.

VALLEE, Jean-Marc. **Clube de compras Dallas**. Universal Pictures, 2013.

VITAL, Carla. **Performance Matemática Digital e GeoGebra:** possibilidade artístico-tecnológica em Educação Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, 2018.