Francisco Odécio Sales
(Organizador)

Pesquisa como Princípio Educativo:

O que podemos aprender com a Pesquisa em Matemática?

Atena Editora
Ano 2021

Francisco Odécio Sales
(Organizador)

Pesquisa como Princípio Educativo:

O que podemos aprender com a Pesquisa em Matemática?

Atena Editora
Ano 2021

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

2021 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2021 Os autores
Copyright da Edição © 2021 Atena Editora
Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília

Atena Editora
Ano 2021

Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Crisóstomo Lima do Nascimento – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Prof. Dr. Daniel Richard Sant'Ana – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Dilma Antunes Silva – Universidade Federal de São Paulo
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Elson Ferreira Costa – Universidade do Estado do Pará
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Gustavo Henrique Cepolini Ferreira – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Jadson Correia de Oliveira – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Luis Ricardo Fernandes da Costa – Universidade Estadual de Montes Claros
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Profª Drª Maria Luzia da Silva Santana – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Pablo Ricardo de Lima Falcão – Universidade de Pernambuco
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Vanessa Ribeiro Simon Cavalcanti – Universidade Católica do Salvador
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Arinaldo Pereira da Silva – Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Profª Drª Carla Cristina Bauermann Brasil – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos – Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Jael Soares Batista – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Jayme Augusto Peres – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Biológicas e da Saúde
Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Daniela Reis Joaquim de Freitas – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Débora Luana Ribeiro Pessoa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Douglas Siqueira de Almeida Chaves – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Elizabeth Cordeiro Fernandes – Faculdade Integrada Medicina
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Profª Drª Eysler Gonçalves Maia Brasil – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Profª Drª Fernanda Miguel de Andrade – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Dr. Fernando Mendes – Instituto Politécnico de Coimbra – Escola Superior de Saúde de Coimbra
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Prof. Dr. Helio Franklin Rodrigues de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Jefferson Thiago Souza – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Jesus Rodrigues Lemos – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Jônatas de França Barros – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Marcus Fernando da Silva Praxedes – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Profª Drª Maria Tatiane Gonçalves Sá – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federacl do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Drª Regiane Luz Carvalho – Centro Universitário das Faculdades Associadas de Ensino
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Welma Emidio da Silva – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias
Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande

Atena Editora
Ano 2021

Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Linguística, Letras e Artes
Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Carolina Fernandes da Silva Mandaji – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Edna Alencar da Silva Rivera – Instituto Federal de São Paulo
Profª DrªFernanda Tonelli – Instituto Federal de São Paulo,
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia

Conselho Técnico Científico
Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva – Universidade para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí
Profª Ma. Adriana Regina Vettorazzi Schmitt – Instituto Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Alex Luis dos Santos – Universidade Federal de Minas Gerais
Prof. Me. Alexsandro Teixeira Ribeiro – Centro Universitário Internacional
Profª Ma. Aline Ferreira Antunes – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Amanda Vasconcelos Guimarães – Universidade Federal de Lavras
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Ma. Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Faculdade da Amazônia
Profª Ma. Anelisa Mota Gregoleti – Universidade Estadual de Maringá
Profª Ma. Anne Karynne da Silva Barbosa – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Prof. Me. Armando Dias Duarte – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Me. Carlos Augusto Zilli – Instituto Federal de Santa Catarina
Prof. Me. Christopher Smith Bignardi Neves – Universidade Federal do Paraná
Profª Drª Cláudia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Drª Cláudia Taís Siqueira Cagliari – Centro Universitário Dinâmica das Cataratas
Prof. Me. Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Daniela da Silva Rodrigues – Universidade de Brasília
Profª Ma. Daniela Remião de Macedo – Universidade de Lisboa

Atena Editora
Ano 2021

Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas – Universidade Estadual de Goiás
Prof. Me. Edevaldo de Castro Monteiro – Embrapa Agrobiologia
Prof. Me. Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Me. Eduardo Gomes de Oliveira – Faculdades Unificadas Doctum de Cataguases
Prof. Me. Eduardo Henrique Ferreira – Faculdade Pitágoras de Londrina
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Prof. Me. Ernane Rosa Martins – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Me. Euvaldo de Sousa Costa Junior – Prefeitura Municipal de São João do Piauí
Prof. Dr. Everaldo dos Santos Mendes – Instituto Edith Theresa Hedwing Stein
Prof. Me. Ezequiel Martins Ferreira – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Fabiano Eloy Atílio Batista – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Prof. Me. Francisco Odécio Sales – Instituto Federal do Ceará
Prof. Me. Francisco Sérgio Lopes Vasconcelos Filho – Universidade Federal do Cariri
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Givanildo de Oliveira Santos – Secretaria da Educação de Goiás
Prof. Dr. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Prof. Me. Gustavo Krahl – Universidade do Oeste de Santa Catarina
Prof. Me. Helton Rangel Coutinho Junior – Tribunal de Justiça do Estado do Rio de Janeiro
Profª Ma. Isabelle Cerqueira Sousa – Universidade de Fortaleza
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Prof. Me. Jhonatan da Silva Lima – Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. José Carlos da Silva Mendes – Instituto de Psicologia Cognitiva, Desenvolvimento Humano e Social
Prof. Me. Jose Elyton Batista dos Santos – Universidade Federal de Sergipe
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Drª Juliana Santana de Curcio – Universidade Federal de Goiás
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Kamilly Souza do Vale – Núcleo de Pesquisas Fenomenológicas/UFPA
Prof. Dr. Kárpio Márcio de Siqueira – Universidade do Estado da Bahia
Profª Drª Karina de Araújo Dias – Prefeitura Municipal de Florianópolis
Prof. Dr. Lázaro Castro Silva Nascimento – Laboratório de Fenomenologia & Subjetividade/UFPR
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Lilian de Souza – Faculdade de Tecnologia de Itu
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Lucio Marques Vieira Souza – Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura de Sergipe
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual do Paraná
Profª Ma. Luana Ferreira dos Santos – Universidade Estadual de Santa Cruz
Profª Ma. Luana Vieira Toledo – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Me. Luiz Renato da Silva Rocha – Faculdade de Música do Espírito Santo
Profª Ma. Luma Sarai de Oliveira – Universidade Estadual de Campinas
Prof. Dr. Michel da Costa – Universidade Metropolitana de Santos

Prof. Me. Marcelo da Fonseca Ferreira da Silva – Governo do Estado do Espírito Santo
Prof. Dr. Marcelo Máximo Purificação – Fundação Integrada Municipal de Ensino Superior
Prof. Me. Marcos Aurelio Alves e Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Profª Ma. Maria Elanny Damasceno Silva – Universidade Federal do Ceará
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Dr. Pedro Henrique Abreu Moura – Empresa de Pesquisa Agropecuária de Minas Gerais
Prof. Me. Pedro Panhoca da Silva – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Profª Drª Poliana Arruda Fajardo – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Rafael Cunha Ferro – Universidade Anhembi Morumbi
Prof. Me. Ricardo Sérgio da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Renan Monteiro do Nascimento – Universidade de Brasília
Prof. Me. Renato Faria da Gama – Instituto Gama – Medicina Personalizada e Integrativa
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Prof. Me. Robson Lucas Soares da Silva – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Me. Sebastião André Barbosa Junior – Universidade Federal Rural de Pernambuco
Profª Ma. Silene Ribeiro Miranda Barbosa – Consultoria Brasileira de Ensino, Pesquisa e Extensão
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Profª Ma. Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Profª Ma. Thatianny Jasmine Castro Martins de Carvalho – Universidade Federal do Piauí
Prof. Me. Tiago Silvio Dedoné – Colégio ECEL Positivo
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Pesquisa como princípio educativo: o que podemos aprender com a pesquisa em matemática?

Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Luiza Alves Batista
Correção: Vanessa Mottin de Oliveira Batista
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizador: Francisco Odécio Sales

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P474 Pesquisa como princípio educativo: o que podemos aprender com a pesquisa em matemática? / Organizador Francisco Odécio Sales. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-007-7
DOI 10.22533/at.ed.077212804

1. Matemática. 2. Educação. I. Sales, Francisco Odécio (Organizador). II. Título.

CDD 372.7

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou a todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades. Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor. Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Pesquisa em Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior em tempos de Pandemia da COVID 19.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca da Pesquisa Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas. Ressaltamos a presença forte de artigos de Matemática Pura, em especial na área de Análise matemática e equações diferencias.

Neste volume, concentra trabalhos que abordam sobre Análise Matemática, Matemática Aplicada, Matemática Computacional, formação inicial e continuada, currículo no ensino de matemática, estratégias de ensino para a educação básica, debates e reflexões essenciais para todo o processo educacional. Isto é, apresenta temas diversos e interessantes, de modo, a contribuir para o embasamento teórico e a prática pedagógica do professor que está em exercício ou não. Para os professores que estão em exercício, mais precisamente os professores que ensinam matemática, sem dúvida cada capítulo tem muito a contribuir para com sua prática de ensino, sendo possível conhecer numa dimensão geral ações curriculares acerca da educação básica e ensino superior, entre outros. Para os professores que não estão em exercício por está em processo formativo ou tentando uma vaga para adentrar no chão da sala de aula, os trabalhos apresentam discussões sobre temáticas contemporâneas que colaboram para ter uma compreensão panorâmica do cenário atual da educação, ou melhor, com produções sobre BNCC e as tecnologias digitais, temáticas bastante mencionadas nos eventos nacionais e internacionais com pesquisadores de diferentes regiões e culturas. Por fim, que você possa se debruçar em cada capítulo e assim possa enriquecer seu aporte teórico e prática pedagógica. Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Francisco Odecio Sales

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

COTAS DO TIPO NORDHAUS-GADDUM PARA O NÚMERO DE ANIQUILAÇÃO

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 29/01/2021

Guilherme Porto
Instituto Federal Farroupilha, *Campus* São Borja
São Borja – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/5735653099270140

Daniel Alejandro Jaume
UNSL, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales
San Luis – San Luis – Argentina
https://orcid.org/0000-0001-5412-1105

Marco Puliti Lartigue
UNSL, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales
San Luis – San Luis – Argentina
https://orcid.org/0000-0002-8601-6905

RESUMO: Seja G um grafo com n vértices e G^c seu complemento. O número de aniquilação de G, denotado por $a(G)$, é o maior número inteiro k tal que a soma dos k menores graus de G não ultrapassa seu número de arestas. Esse invariante é usado como cota superior para o número de independência do grafo. Neste trabalho, apresentamos as seguintes cotas para o número de aniquilação e seu problema de Nordhaus-Gaddum

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq a(G) \leq n$$

$$2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq a(G) + a(G^c) \leq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Também investigamos o comportamento extremal desses invariantes e mostramos que satisfazem a propriedade do intervalo. Além disso, caracterizamos alguns grafos extremais, garantindo que as cotas obtidas são as melhores possíveis.

PALAVRAS-CHAVE: Número de Aniquilação, Problema de Nordhaus-Gaddum, Propriedade do Intervalo, Problemas Extremais.

SHARP BOUNDS FOR THE ANNIHILATION NUMBER OF THE NORDHAUS-GADDUM TYPE

ABSTRACT: Let G be a graph with n vertices and G^c be its complement. The Annihilation number of G, denoted by $a(G)$, is the largest integer k such that the sum of k smallest degrees of G is at most the number of edges. This invariant is a sharp upper bound for the independence number. In this work, we present the following bounds and Nordhaus-Gaddum type inequalities for the Annihilation number

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq a(G) \leq n$$

$$2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq a(G) + a(G^c) \leq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

We also investigate the extremal behavior of the invariant and showed that both parameters satisfy the interval property. In addition, we characterize some extremal graphs, ensuring that the bounds obtained are the best possible.

KEYWORDS: Annihilation number, Nordhaus-Gaddum problem, Interval property, Extremal problems.

1 I INTRODUÇÃO

O número de independência de um grafo é a cardinalidade máxima de um conjunto independente de vértices. Nem sempre é possível determinar o número de independência de um grafo em tempo polinomial, uma vez que este é um problema NP-difícil (GAREY; JOHNSON, 1990), e por esta razão a aproximação deste invariante por meio de cotas representa um tópico de pesquisa relevante e amplamente estudado (RAD; SHARIFI, 2017; GRIGGS, 1983).

O número de aniquilação de um grafo *G*, denotado por $a(G)$, é uma cota superior para o número de independência que pode ser calculado em tempo polinomial. Ele foi originalmente definido por R. Pepper (2004) por meio do processo de redução da sequência de graus que está associado ao método desenvolvido por Havel (1955) e Hakimi (1962) para determinar quando uma sequência de números inteiros não negativos pode representar a sequência de graus de um grafo (GRIGGS; KLEITMAN,1994).

O número de aniquilação e o número de independência são usados para investigar a relação entre a reatividade de uma molécula orgânica, representada por um grafo, e seu número de independência. A pesquisa indica que, para um número fixo de vértices, as moléculas com menor número de independência são geralmente menos reativas do que as moléculas com maior número de independência. Na química orgânica, este estudo é conhecido como hipótese da independência-estabilidade e foi originalmente desenvolvida por S. Fajtlowicz (2003) e estudada por R. Pepper (2004).

Em 1956, E. Nordhaus e J. Gaddum (1956) apresentaram cotas para a soma e o produto do número cromático de um grafo com o de seu complemento em termos da ordem do grafo. Desde então, o problema de Nordhaus-Gaddum consiste em investigar cotas para expressões da seguinte forma:

$$p(G) + p(G^c) \text{ e } p(G)p(G^c)$$

onde $p(G)$ é um invariante de grafo. Em geral, essas desigualdades são elegantes pois revelam valores extremos do parâmetro para o grafo e seu complemento. Por outro lado, podem ser difíceis de serem obtidas.

M. Aouchiche e P. Hansen (2013) organizaram as desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum para diversos invariantes, inclusive para invariantes cujas definições dependem das cardinalidades de subconjuntos específicos do grafo, como o número de independência, o número de dominação, o número romano de dominação, número de dominação total, entre outros. A relação entre esses parâmetros de dominação e o número de aniquilação foi estudada por vários autores (DEHGARDAI; NOROUZIAN; SHEIKHOLESLAMI, 2013; KHOEILAR et al., 2018; DELAVIÑA et al., 2010; DESORMEAUX; HAYNES; HENNING, 2013; NING; LU; WANG, 2019; DEHGARDI; SHEIKHOLESLAMI; KHODKAR, 2013; DESORMEAUX et al., 2014; YUE et al., 2020), estabelecendo uma valiosa conexão com as desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum.

Dizemos que um parâmetro de grafo satisfaz a propriedade do intervalo quando para cada valor inteiro em um intervalo existe pelo menos um grafo que faz o parâmetro assumir esse valor. A propriedade do intervalo foi estudada recentemente em (BOCK; RAUTENBACH, 2019; KURNOSOV, 2020; JAUME; PASTINE; SCHVÖLLNER, 2020) e generaliza o comportamento de um parâmetro em um intervalo, tornando-se um tópico de pesquisa relevante.

Neste trabalho, apresentamos cotas para o número de aniquilação e uma solução para seu problema de Nordhaus-Gaddum associado, além disso, garantimos que as desigualdades obtidas são as melhores possíveis. Por fim, usando as desigualdades obtidas, estabelecemos os intervalos de definição de ambos os parâmetros e, como consequência, provamos que satisfazem a propriedade do intervalo.

O restante do trabalho está organizado como segue. Na próxima seção, apresentamos as notações e resultados preliminares que serão utilizados. A seção 3 é dedicada aos resultados obtidos, sendo dividida em subseções que abordam separadamente os resultados para o número de aniquilação e os resultados para o problema Nordhaus-Gaddum. Por fim, apresentamos nossas conclusões, agradecimentos e as referências utilizadas.n

2 | NOTAÇÕES E PRELIMINARES

Nesse trabalho, vamos considerar que $G = (V(G), E(G))$ é um grafo simples de ordem $n = |V(G)|$ e tamanho $e(G)$, onde $V(G)$ é o conjunto dos vértices e $E(G)$ é o conjunto das arestas de G. Denotamos por K_n e S_n o grafo completo e o grafo estrela com n vértices, respectivamente. Além disso, chamamos de grafo vazio o grafo que não possui arestas.

O complemento de G, denotado por G^c, é o grafo com $V(G^c) = V(G)$ e $E(G^c) = E(K_n) - E(G)$, ou seja, é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices que G e tal que dois vértices distintos são adjacentes se, e somente se, não são adjacentes em G.

O grau d_i do vértice v_i é dado pelo seu número de vizinhos, ou seja, é o número de arestas incidentes em v_i. A sequência de graus de um grafo G é dada por $D(G) = (d_1 \leq ... \leq d_n)$, onde d_i é o i-ésimo menor grau de G. Note que a soma dos graus de um grafo G é igual ao dobro do seu número de arestas, isto é

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2e(G). \tag{1}$$

Uma vez que cada aresta definida pelos n vértices de $V(G)$ está ou em $E(G)$, ou em $E(G^c)$, temos que a sequência de graus de G^c pode ser definida em termos de $D(G)$ da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
D(G^c) &= (d_1^c \leq \cdots \leq d_i^c \leq \cdots \leq d_n^c) \\
&= (n-1-d_n \leq \cdots \leq n-1-d_{n+1-i} \leq \cdots \leq n-1-d_1).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Um grafo é dito k-regular se todos os seus vértices tem grau k. Note que o complementar de um grafo k-regular é um grafo (n - k - 1)-regular.

Fajtlowicz (LARSON; PEPPER, 2011; PEPPER, 2004) define o número de aniquilação de um grafo G como o maior inteiro k tal que a soma dos k menores graus do grafo não ultrapassa seu número de arestas $e(G)$, isto é

$$a(G) = \max\left\{k \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{k} d_i \leq e(G)\right\}.$$

O interesse na propriedade do intervalo foi brevemente discutido na introdução. Para desenvolver este tópico, enunciamos a definição da propriedade do intervalo. Seja $\mathcal{G}$ uma família de grafos e $\xi: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ um parâmetro definido em $\mathcal{G}$. Dizemos que ξ tem a propriedade de intervalo em $\mathcal{G}$ se $\xi(G) = I \cap \mathbb{Z}$, para algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

3 | RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos desigualdades para o número de aniquilação de um grafo e para seu problema de Nordhaus-Gaddum. Além disso, mostramos que os parâmetros satisfazem a propriedade do intervalo.

3.1 Cotas para o Número de Aniquilação

Primeiramente, apresentamos cotas para o número de aniquilação $a(G)$, além disso, provamos que são as melhores possíveis por meio da caracterização dos grafos extremais.

Teorema 3.1. Seja G um grafo de ordem n. Então

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq a(G) \leq n.$$

A igualdade ocorre na cota superior se, e somente se, G for isomorfo ao grafo vazio. Se G é um grafo k-regular não vazio, então a igualdade ocorre na cota inferior.

Demonstração: A cota superior segue diretamente da definição, sendo assim, resta considerar o caso de igualdade. Suponha que $a(G) = n$, pela definição do número de aniquilação e pela equação (1) temos que

$$2e(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i \leq e(G),$$

isso implica que $e(G) = 0$, e o único grafo que satisfaz esta condição é o grafo vazio.

Para demonstrar a cota inferior, procedemos por contradição. Suponha que $\alpha(G) = k < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, usando a definição do número de aniquilação e a equação (1) temos

$$2e(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{k+1} d_i + \sum_{i=k+2}^{n} d_i > e(G) + \sum_{i=k+2}^{n} d_i,$$

isso implica que

$$\sum_{i=k+2}^{n} d_i < e(G) < \sum_{i=1}^{k+1} d_i,$$

uma contradição. Portanto, concluímos que $\alpha(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Para os casos extremais da cota inferior, observe que se G for um grafo k-regular não vazio, então a equação (1) garante que $e(G) = \frac{nk}{2}$, e isso implica que $\alpha(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Este exemplo garante que a cota inferior obtida é a melhor possível.

Como consequência do **Teorema 3.1**, podemos mostrar que para cada número inteiro no intervalo $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n\right)$ existe pelo menos um grafo com este número de aniquilação, ou seja, demonstramos que o parâmetro satisfaz a propriedade do intervalo.

Corolário 3.1. Sejam n e k números naturais tais que $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq k \leq n - 1$. Se G é isomorfo a $(n\text{-}k)K_2 \cup (2k\text{-}n)K_1$, então $\alpha(G) = k$.

Demonstração: Suponha que $G = (n\text{-}k)K_2 \cup (2k\text{-}n)K_1$. Observe que G possui $2n\text{-}2k$ vértices de grau 1, $2k - n$ vértices de grau 0 e $n - k$ arestas.

Somando os menores graus de G, temos

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{2k-n} d_i + \sum_{i=2k-n+1}^{k} d_i = 0 + (n-k) = e(G).$$

Isso garante que o número de aniquilação de G é igual a k.

3.2 O Problema de Nordhaus-Gaddum

Nesta seção, apresentamos uma solução para o problema Nordhaus-Gaddum associado ao número de aniquilação e caracterizamos seus grafos extremais, garantindo que as desigualdades obtidas são as melhores possíveis.

Teorema 3.2. Seja G um grafo de ordem n. Então

$$2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq a(G) + a(G^c) \leq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Para n par, a igualdade ocorre na cota superior se, e somente se, G ou G^c é isomorfo ao grafo vazio.

Para n ímpar, a igualdade ocorre na cota superior se, e somente se, G ou G^c é isomorfo ao grafo vazio ou $S_{d_{n+1}} + 1 \cup (n\text{-}d_n\text{-}1)K_1$, para $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq d_n \leq n\text{-}1$.

Se G e G^c são grafos não vazios e G é um grafo k-regular, então a igualdade ocorre na cota inferior.

Assim como para o número de aniquilação, podemos mostrar que para cada número inteiro no intervalo definido pelo **Teorema 3.2** existe pelo menos um grafo G para o qual $a(G) + a(G^c)$ assume este valor.

Corolário 3.2. Sejam n e k números naturais tais que

$$2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1 \leq k \leq n + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1.$$

Se G é isomorfo a $\left(n + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - k\right) K_2 \cup \left(2k - 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - n\right) K_1$, então

$$a(G) + a(G^c) = k.$$

Vamos omitir as provas dos resultados dessa seção pois possuem argumentos extensos. No entanto, observamos que as demonstrações são realizadas com argumentos semelhantes aos do **Teorema 3.1** e do **Cololário 3.1**, utilizando as relações entre um grafo e seu complemento dadas pela equação (2).

4 | CONCLUSÕES

Para concluir, analisamos os resultados obtidos e suas consequências para o entendimento do número de aniquilação. Observamos que a cota inferior apresentada no **Teorema 3.1** já foi obtida por R. Pepper (2004), no entanto, a prova original usa a definição dada pelo processo de redução da sequência de graus, enquanto que nossa demonstração usa uma abordagem baseada na definição equivalente de Fajtlowicz (2011), que é mais apropriada para investigar e compreender o comportamento extremal do número de aniquilação.

Enfatizamos que algumas das expressões obtidas para as cotas podem ser consideradas simples, no entanto, a abordagem de Fajtlowicz e os resultados obtidos apontam que a caracterização dos grafos que satisfazem os valores extremos constitui um problema relevante.

Conseguimos obter importantes informações estruturais dos grafos que satisfazem a igualdade nas cotas superiores dos **Teoremas 3.1 e 3.2.** Em particular, podemos observar que, em geral, tais grafos apresentam um número pequeno de arestas.

Destacamos que as cotas inferiores dos **Teoremas 3.1 e 3.2** são satisfeitas por um grande número de grafos e, consequentemente, sua caracterização é importante para a compreensão do comportamento desse extremo do número da aniquilação.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho faz parte dos estudos de pós-doutorado de Guilherme Porto, que agradece o apoio da CAPES.

Marco Puliti Lartigue e Daniel Alejandro Jaume agradecem o apoio parcial da UNSL por meio do projeto PROICO 03-0918.

Os autores agradecem o apoio parcial da CAPES por meio do projeto MATH AmSud18-MATH-01.

REFERÊNCIAS

AOUCHICHE, Mustapha; HANSEN, Pierre. **A survey of Nordhaus–Gaddum type relations. Discrete Applied Mathematics**, v. 161, n. 4-5, p. 466-546, 2013.

BOCK, Felix; RAUTENBACH, Dieter. **On matching numbers of tree and bipartite degree sequences. Discrete Mathematics**, v. 342, n. 6, p. 1687-1695, 2019.

DEHGARDAI, Nasrin; NOROUZIAN, Sepideh; SHEIKHOLESLAMI, Seyed Mahmoud. **Bounding the domination number of a tree in terms of its annihilation number. Transactions on Combinatorics**, v. 2, n. 1, p. 9-16, 2013.

DEHGARDI, Nasrin; SHEIKHOLESLAMI, Mahmoud; KHODKAR, Abdollah. **Bounding the rainbow domination number of a tree in terms of its annihilation number. Transactions on Combinatorics**, v. 2, n. 3, p. 21–32, 2013.

DELAVIÑA, Ermelinda et al. **Graffiti.pc on the 2-domination number of a graph. Congressus Numerantium**, v. 203, p. 15–32, 2010.

DESORMEAUX, Wyatt J.; HAYNES, Teresa W.; HENNING, Michael A. **Relating the annihilation number and the total domination number of a tree. Discrete Applied Mathematics**, v. 161, n. 3, p. 349–354, 2013.

DESORMEAUX, Wyatt J. et al. **Relating the annihilation number and the 2-domination number of a tree. Discrete Mathematics**, v. 319, p. 15–23, 2014.

FAJTLOWICZ, Siemion; LARSON, Craig E. **Graph-theoretic independence as a predictor of fullerene stability. Chemical Physics Letters**, v. 377, n. 5, p. 485-490, 2003.

GAREY, Michael R.; JOHNSON, David S. **Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness.** New York: W. H. Freeman and Company, 1990.

GRIGGS, Jerrold R. **Lower bounds on the independence number in terms of the degrees. Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 34, n. 1, p. 22–39, 1983.

GRIGGS, Jerrold R.; KLEITMAN, Daniel J. **Independence and the Havel-Hakimi residue. Discrete Mathematics**, v. 127, n. 1, p. 209–212, 1994.

JAUME, Daniel A; PASTINE, Adrián; SCHVÖLLNER, Victor Nicolas. **2-switch: transition and stability on graphs and forests. arXiv preprint arXiv:2004.11164**, 2020. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2004.11164. Acesso em: 28 jan. 2021.

KHOEILAR, R. et al. **Relating the annihilation number and the Roman domination. Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 87, n. 1, p. 1-13, 2018.

KURNOSOV, Artem Dmitrievich. **The set of all values of the domination number in trees with a given degree sequence. Journal of Applied and Industrial Mathematics**, v. 14, n. 1, p. 131-147, 2020.

LARSON, Craig E; PEPPER, Ryan. **Graphs with equal independence and annihilation numbers. The Electronic Journal of Combinatorics**, v. 18, n. 1 2011. Disponível em: https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/ view/v18i1p180. Acesso em: 28 jan. 2021.

NING, Wenjie; LU, Mei; WANG, Kun. **Bounding the locating-total domination number of a tree in terms of its annihilation number. Discussiones Mathematicae Graph Theory**, v. 39, n. 1, p. 31-40, 2019.

NORDHAUS, E. A.; GADDUM, J. W. **On complementary graphs. The American Mathematical Monthly**, v. 63, n. 3, p. 175-177, 1956.

PEPPER, Ryan. **Binding independence**. 2004. Tese (Doutorado) - University of Houston, Houston, 2004.

RAD, Nader Jafari; SHARIFI, Elahe. **Bounds on the independence number of a graph in terms of order, size and maximum degree. Discrete Applied Mathematics**, v. 217, p. 210-219, 2017.

YUE, Jun et al. **The annihilation number does not bound the 2-domination number from the above. Discrete Mathematics**, v. 343, n. 6, p. 111707, 2020.

CAPÍTULO 2

ESTUDO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS INTRÍNSECOS NA LEGISLAÇÃO DO IMPOSTO SOBRE VEÍCULOS AUTOMOTORES

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 02/02/2021

Delfim Dias Bonfim
Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins (IFTO)-*Campus* Dianópolis
Dianópolis-Tocantins (TO)
http://lattes.cnpq.br/1165046081937005

Carolyne Victória Lopes Barbosa
Discente do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins (IFTO)-*Campus* Dianópolis
Dianópolis-Tocantins (TO)
http://lattes.cnpq.br/0983847908851198

Wilmar Borges Leal Júnior
Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins (IFTO)-*Campus* Dianópolis
Dianópolis-Tocantins (TO)
http://lattes.cnpq.br/7697279316251362

Virgílio Lourenço da Silva Neto
Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins (IFTO)-*Campus* Gurupi
Gurupi-Tocantins (TO)
http://lattes.cnpq.br/0610186934356725

RESUMO: O presente trabalho objetiva explorar conceitos matemáticos (função afim, taxa de crescimento, princípio fundamental de contagem e combinação simples) intrínsecos na legislação relativa ao Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA). Foi realizado uma análise na legislação vigente relacionada ao IPVA objetivando identificar a aplicação conceitual da matemática, e por conseguinte foi analisado a relação entre a linguagem usual e a linguagem matemática. Por fim, foi demonstrado como esses conceitos, abordados no Ensino Básico, podem ser aplicados em situações cotidianas, aproximando a abstração matemática ao conteúdo concreto em uma abordagem interdisciplinar.
PALAVRAS-CHAVE: Análise combinatória, Função Afim, IPVA, Taxa de crescimento.

STUDY OF INTRINSIC MATHEMATICAL CONCEPTS IN MOTOR VEHICLE TAX LEGISLATION

ABSTRACT: The present work aims to explore mathematical concepts (affine function, growth rate, fundamental counting principle and simple combination) intrinsic in the legislation relating to the Motor Vehicle Property Tax (IPVA). An analysis was carried out in the current legislation related to the IPVA in order to identify the conceptual application of mathematics, and therefore the relationship between the usual language and the mathematical language was analyzed. Finally, it was demonstrated how these concepts, addressed in Basic Education, can be applied in everyday situations, bringing mathematical

abstraction to concrete content in an interdisciplinary approach.

KEYWORDS: Combinatorial analysis, Affine Function, IPVA, Growth rate.

1 | INTRODUÇÃO

No Brasil, ao adquirir um veículo, conforme legislação vigente, o proprietário deve arcar com os custos do Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA). Entretanto, quantos de nós, brasileiros, ao adquirir um veículo (seja este terrestre, aquático ou aéreo), sabem como é realizado o cálculo do valor do IPVA, o qual está presente em todos os veículos por força de lei, com as exceções também previstas na legislação. Vários são os questionamentos nas aulas de matemática sobre, como aplicar a matemática teórica e abstrata no cotidiano, relacionando assim conceitos estudados na disciplina com objetos do mundo real.

Historicamente o Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores, surgiu para substituir a antiga a Taxa Rodoviária Única (TRU), que foi instituída pelo Decreto Lei nº 999, de 21 de outubro de 1969, que por sua vez entrou em vigor em 1º de janeiro de 1970 (BRASIL, 1969). A Emenda Constitucional nº 27, de 28 de novembro de 1985, que a qual alterou a Constituição de 1967, criou o IPVA no Brasil (BRASIL, 1985).

O IPVA é competência dos Estados e do Distrito Federal, conforme está previsto no inciso III, do Art. 155, da Constituição Federal (BRASIL, 1988). No caso específico do Estado do Tocantins, tal imposto consta na Lei nº 1.287, de 28/12/2001, Código Tributário do Estado do Tocantins.

Uma constante dificuldade apresentada pelos estudantes consiste em não saber interpretar corretamente as informações, o que afeta diretamente o ensino na disciplina de Matemática. Nesse sentido abordaremos a relação entre a linguagem usual e a linguagem matemática.

O presente trabalho objetiva explorar conceitos matemáticos como: função afim, taxa de crescimento, princípio fundamental de contagem e combinação simples, que são abordados na legislação pertinente ao IPVA. Será demonstrado como alguns dos conteúdos integrantes do componente curricular “Matemática e suas Tecnologias do Ensino Básico” podem ser aplicados em situações cotidianas práticas, mais próxima da realidade dos discentes.

2 | METODOLOGIA

O estudo foi desenvolvido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins (IFTO), localizado no município de Dianópolis, Tocantins. Este trabalho resulta de uma pesquisa bibliográfica básica e descritiva. Inicialmente foi realizado um levantamento da legislação, tanto federal bem como estadual (referente ao Estado do Tocantins), pertinente ao Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores. Em seguida foi feito uma análise minuciosa da legislação atual buscando identificar conceitos matemáticos que são abordados no Ensino Médio, a saber: função afim, taxa de crescimento, princípio fundamental de contagem e combinação simples. De modo que os conceitos são definidos e explorados visando estabelecer relações entre a linguagem usual e a linguagem matemática bem como mostrar situações em que tais conceitos podem ser aplicados.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

No que segue, veremos sobre a institucionalização do IPVA, o cálculo do valor IPVA (sem desconto e com desconto), cálculo do número de veículos que podem ser emplacados (modelo atual e o novo modelo padrão MERCOSUL) de modo que abordaremos alguns conceitos matemáticos intrínsecos na legislação do Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores.

3.1 Institucionalização do IPVA

A obrigatoriedade do IPVA, tem seu fundamento na Constituição da República Federativa do Brasil, de 1988 (CRFB/88) em seu Art. 155, inciso III, onde nos traz a seguinte redação: "Art. 155. Compete aos Estados e ao Distrito Federal instituir impostos sobre: [...] **III - propriedade de veículos automotores**." (BRASIL, 1988, Grifo nosso).

Em seu aspecto espacial, a CRFB/88 atribuiu essa competência para os Estados e ao Distrito Federal, assim, nossa análise pauta-se apenas na legislação do Estado do Tocantins em que consta na Lei nº 1.287, de 28/12/2001, Código Tributário do Estado do Tocantins. Já o Art. 158, inciso III, da Constituição Federal, diz-nos o seguinte: "Art. 158. Pertencem aos Estados e ao Distrito Federal: [...] III - **cinquenta por cento** do produto da arrecadação do imposto do Estado sobre a propriedade de veículos automotores licenciados em seus territórios'' (BRASIL, 1988, Grifo nosso).

Interpretando a expressão "cinquenta por cento", temos 50% = $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ = 0,5, ou seja, a metade do valor arrecadado é destinada aos cofres do Estado. Surge, naturalmente, a pergunta: como é feita a divisão da outra metade? A reposta é: a outra metade é direcionada ao município onde o veículo é licenciado, conforme o Art. 158, inciso III, da Constituição Federal (BRASIL, 1988).

Segundo Dante (2016), temos a seguinte definição: "Uma função f: R$\longrightarrow$R chama-se Afim quando existem constantes a e b E R tais que f(x) = ax+b para todo x E R." Seja x o valor pago do IPVA de um veículo e f(x) o valor que o ente federativo recebe. Podemos fazer o uso do conceito de função afim. Sendo assim, temos o caso particular de uma função afim em que a = $\frac{1}{2}$ e b = 0. A Figura 1 mostra o diagrama e a representação geométrica.

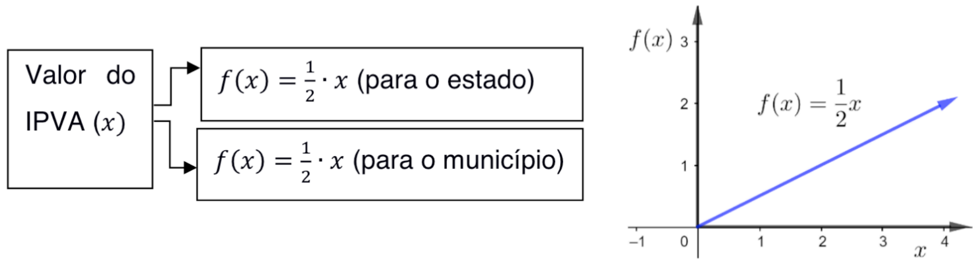


Figura 1: Diagrama e representação geométrica da divisão do IPVA.

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.2 Cálculo do valor do IPVA (sem desconto)

O procedimento para obter o valor do IPVA envolve dois fatores. O primeiro deles é o *Valor venal*, que são definidos por Portarias da Secretaria da Fazenda do Estado do Tocantins (SEFAZ/TO), editadas para o respectivo ano calendário, de modo que o proprietário do veículo pode obter esses valores junto ao site da SEFAZ/TO (http://dtri.sefaz.to.gov.br), como por exemplo os valores que constam na Portaria SEFAZ nº 1.110, de 27 de dezembro de 2017, referentes ao exercício de 2018 (TOCANTINS, 2017). O segundo componente é a *Alíquota*. Conforme o Código Tributário do estado do Tocantins, em seu Art. 78:

> Art. 78. As alíquotas do IPVA são:
>
> I – *1,25%* para veículos terrestres utilizados no transporte de passageiros e de cargas, a seguir relacionados:
>
> ônibus;
>
> micro-ônibus;
>
> caminhão;
>
> caminhão trator;
>
> cavalos mecânicos
>
> II – 2% para veículos
>
> aéreos;
>
> aquáticos; [...]
>
> IV – 2,5% para veículos

veículos automóveis de passageiros, camionetas pick-up e furgões equipados com *motor de até 100 HP [1] de potência bruta* (SEAE);

motocicletas e ciclomotores equipados com *motor de até 180 cm^3 de cilindrada. [...]*

V – 3,5% para:

veículos automóveis de passageiros, camionetas pick-up e furgões equipados com motor acima de 100 HP de potência bruta (SEAE);

motocicletas e ciclomotores equipados com motor acima de 180 cm^3 de cilindrada. (TOCANTINS, 2001).

Analisando o exposto acima, vamos utilizar o conceito de função afim, para obtenção do valor do IPVA, como segue. Consideremos o conjunto A = {Valores venais dos veículos cujas características atendem o disposto no inciso I do Art. 78}. Assim, se x é o valor venal de um determinado veículo cujas especificações se enquadram no inciso I do Art. 78, então x E A. Consideremos, também, o conjunto B = {Preço do IPVA do veículo conforme alíquota do inciso I do Art. 78}. Assim, se f(x) é o preço do IPVA do veículo de valor venal x, então f(x) E B. Como a alíquota mencionada no inciso I do Art. 78 é 1,25% = $\frac{1{,}25}{100}$ = 0,0125, podemos definir a função afim f da seguinte maneira:

$$f : A \longrightarrow B, \text{ dada por } f(x) = 0{,}0125 \cdot x, \text{ com } x > 0. \ (1)$$

Observamos que essa função está bem definida, pois temos um valor venal para cada veículo constante no inciso I, o qual, por sua vez, deverá pagar um valor que corresponde ao IPVA.

Os valores venais que usaremos nos exemplos a seguir baseiam-se na Portaria SEFAZ nº 1.110, de 28 de dezembro de 2017, que dispõe sobre o valor médio de veículos adquiridos em exercícios anteriores. Por exemplo, um determinado veículo terrestre, mais especificamente um ônibus, fabricado no ano de 2017, tem valor venal de R$ 436.502,00, ou seja, x = 436.502. Assim,

$$f(436.502) = 0{,}0125 \cdot (436.502) = 5.456{,}28$$

Logo, o valor do IPVA será de R$ 5.456,28.

Com mesmo raciocínio e definindo, C = {Valores venais dos veículos cujas características atendem o disposto no inciso II do Art. 78} e D = {Preço do IPVA do veículo conforme alíquota do inciso II do Art. 78}, obtemos a seguinte função afim g:

$$g : C \longrightarrow D, \text{ dada por } g(x) = 0{,}02 \cdot x, \text{ com } x > 0. \ (2)$$

Analogamente, considerando E = {Valores venais dos veículos cujas características atendem o disposto no inciso IV do Art. 78} e F = {Preço do IPVA do veículo conforme alíquota do inciso IV do Art. 78}, podemos definir a seguinte função afim h:

$$h : E \longrightarrow F, \text{ dada por } h(x) = 0{,}025 \cdot x, \text{ com } x > 0. \ (3)$$

1. HP: Horse Power.

Por exemplo, uma motocicleta, ano de fabricação 2017, com 150 cm^3 de cilindrada, obtemos o valor venal de R$8.242,00. Assim, o valor do IPVA é g(8.242) = 0,025 · (8.242) = 206,05. Portanto o valor do IPVA a ser pago é R$206,05. A título de ilustração, um veículo terrestre, com motor 1.0, cuja potência é de 76 HP, fabricado em 2012, obtemos o valor venal de R$ 20.277,00. Assim, o valor do IPVA é h(20.277) = 0,025 · (20.277) = 506,93.

Analogamente, considerando G = {Valores venais dos veículos cujas características atendem o disposto no inciso V do Art. 78} e H = {Preço do IPVA do veículo conforme alíquota do inciso V do Art. 78}, podemos definir a seguinte função afim y:

$$y : G \longrightarrow H, \text{ dada por } y(x) = 0{,}035 \cdot x \text{ com } x > 0. \quad (4)$$

Por exemplo, considerando um veículo fabricado no ano de 2017, com potência de 461 HP obtemos o valor venal de R$ 223.602,00. Assim, o valor do IPVA é y(223.602) = 0,035 · (223.602) = 7.826,07.

A figura 2 abaixo mostra a representação geométrica das funções acima mencionadas de acordo com suas respectivas alíquotas.

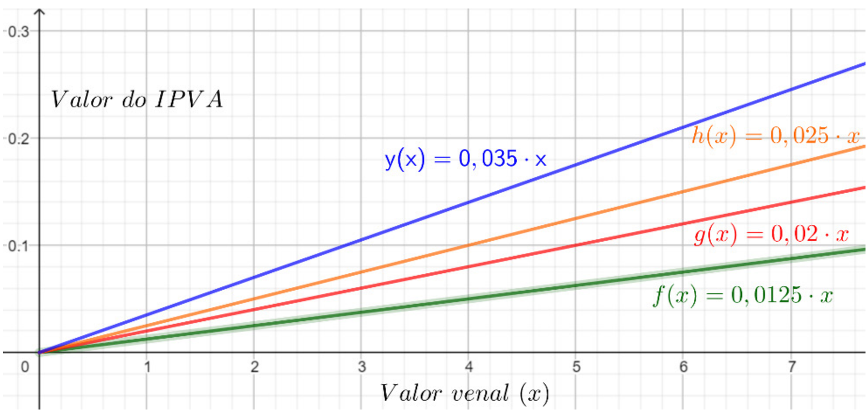


Figura 2: Representação geométrica do valor do IPVA em função da alíquota.

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.3 Cálculo do valor do IPVA (com desconto)

O Art. 3º da Portaria SEFAZ nº 1.110, de 28 de dezembro de 2017, diz-nos que "É concedido o *desconto de 10%* sobre o valor do IPVA, caso o contribuinte antecipe seu pagamento, em parcela única, no prazo fixado na Tabela I do Anexo I a esta Portaria'' (TOCANTINS, 2017).

Consideremos x o valor inicial do IPVA. O valor V(x), após o desconto de 10% sobre o preço inicial x, é dado por:

V(x) = (100%) · x - (10%) · x = (90%) · x = 0,90 · x, ou seja, tal valor pode ser modelado pela função afim definida por

$$V(x) = 0{,}90 \cdot x, \text{ com } x > 0 \quad (5)$$

Por exemplo, considerando o valor pago pelo IPVA obtido no último exemplo, temos, neste caso, x = 7.826,07. Caso o contribuinte resolva pagar com o desconto de 10%, o novo valor que este deverá pagar sobre este IPVA será de: V(7.826,07) = 0,90 · (7.826,07) = 7.043,46. O que resulta em R$ 782,61 de economia.

3.4 Cálculo do número de veículos emplacados

Considerando a Resolução do Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN) nº 590, de 24 de maio de 2016, em seu Art. 1º resolve:

> Art.1° Estabelecer o novo modelo de Placas de Identificação Veicular, onde após o registro no Órgão Executivo de Trânsito dos Estados e do Distrito Federal, cada veículo será identificado por placa dianteira e traseira, no padrão estabelecido para o MERCOSUL[2], de acordo com os requisitos estabelecidos nesta Resolução.
>
> § 2º As Placas de Identificação Veicular de que trata o caput deste artigo deverão:
>
> [...]
>
> III- Conter **7 (sete) caracteres alfanuméricos** estampados em alto relevo, com **combinação aleatória**, a ser fornecida e controlada pelo DENATRAN[3]. (CONTRAN, 2016, *Grifo nosso*).

Na referida Resolução menciona que até 31 de dezembro de 2020 todos os veículos devem possuir a identificação no padrão do MERCOSUL. Podemos nos perguntar, qual é a quantidade máxima de veículos que podem ser emplacados no modelo atual de emplacamento? E quantos veículos poderão ser emplacados com o novo sistema de Placas de identificação de veículos no padrão MERCOSUL? Para responder a essas indagações, vamos recorrer à Análise Combinatória, mais especificamente, ao *Princípio Fundamental de Contagem (PFC) e Combinações Simples*. De acordo com Santos *et al* (2007) temos a definição do Princípio Fundamental de Contagem "Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes i = 1, 2, ⋯, n, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ maneiras diferentes". Os mesmos autores definem combinação simples como "Combinação simples de elementos tomados p a p, onde n ≥ 1 e p é um número natural tal que p ≤ n são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Notação:

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\text{''}.$$

2. MERCOSUL: Mercado Comum do Sul.
3. DENATRAN: Departamento Nacional de Trânsito.

No modelo primeiramente adotado, as placas são constituídas por 3 (três) letras seguidas de 4 (quatro) números. Já no novo modelo devem conter 4 (quatro) letras e 3 (três) números, os quais poderão vir em quaisquer posições.

Iniciemos com o sistema de identificação primeiramente adotado. Como o nosso alfabeto é composto por 26 letras (A, B, C, ..., Z) e o sistema decimal, por 10 algarismos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), sendo estes passíveis de repetição, temos as seguintes possibilidades para confecção da placa, conforme tabela 1 a seguir:

LETRAS			NÚMEROS			
L_1	L_2	L_3	N_1	N_2	N_3	N_4
26 modos	26 modos	26 modos	10 modos	10 modos	10 modos	10 modos

Tabela 1: Composição das placas pelo sistema de identificação antigo

Fonte: Elaborado pelos autores.

Assim, segue do *Princípio Fundamental de Contagem* que a resposta é:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4 = 175.760.000$ veículos.

Veremos agora com o sistema de identificação no modelo padrão MERCOSUL. Neste novo modelo, padrão MERCOSUL, a princípio devemos escolher dentre os 7 caracteres em quais deles devem ficar as letras e quais os números. Logo o número de modos de realizar a escolha é igual a combinação de 7 tomados 4 a 4 (escolher as posições das letras) ou tomados 3 a 3 (escolher as posições dos números), ou seja: $C_4^7 = C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!}$ = 35 modos.

Uma vez escolhidas as posições das letras, o número de modos de designar as letras que devem ocupar as posições escolhidas e os números que ocuparão as posições restantes é igual a $26^4 \cdot 10^3 = 456.976.000$ maneiras. Logo pelo Princípio Fundamental de Contagem temos que o total de placas possíveis é igual a $35.(26^4 \cdot 10^3) = 35.(456.976.000) = 15.994.160.000$.

3.5 Taxa de Crescimento

Em análise aos totais de placas possíveis nos dois modelos (o antigo e o Mercosul), surge uma pergunta natural, qual de aumento/decréscimo percentual entre os dois modelos? Para responder a essa pergunta, vamos fazer o uso do conceito matemático chamado *Taxa de Crescimento*, que por sua vez é muito utilizado em informações jornalísticas. Segundo Morgado e Wagner (2005) temos a seguinte definição: “A taxa de crescimento (T) relativo de um valor a para um valor b é dada por: $T = \frac{b-a}{a} = \frac{Valor\ final - Valor\ inicial}{Valor\ inicial}$”. (6)

Assim, nesse caso, temos que no modelo atual são possíveis 175.760.000 emplacamentos, logo a = 175.760.000. No novo modelo padrão Mercosul são 15.994.160.000 placas possíveis, segue que b = 15.994.160.000. Portanto a taxa de crescimento é T =

$\frac{15.994.160.000-175.760.000}{175.760.000} = \frac{15.818.400.000}{175.760.000}$ = 90 = 9.000%. O que significa que houve um aumento de 9.000%, utilizando os mesmos 7 (sete) caracteres.

Em geral os automóveis têm uma depreciação no seu valor, por consequência o valor do IPVA será menor. Por exemplo, um veículo de passeio, com 104 HP, custava R$ 25.251,14 no ano de 2018 e passou a custar R$ 22.033,43 no ano de 2019. Vamos obter a taxa de crescimento do IPVA deste veículo. Pelo Art. 58, inciso V, da Código Tributário do Tocantins, a alíquota cobrada é 3,5%. Logo em 2018, o preço do IPVA foi de a = 0,035. (25.251,14) = 883,79 reais. No ano seguinte o valor pago pelo IPVA foi de b = 0,035. (22.033,43) = 771,17 reais. Portanto sua taxa de crescimento é igual a T = $\frac{771,17-883,79}{883,79}$ = $\frac{-112,62}{883,79}$ = -0,1274 = -12,74%.

Em outras palavras, houve uma redução de 12,74% no valor pago no IPVA entre os anos de 2018 e 2019.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio de uma simples análise dos diplomas legais que tratam do IPVA, particularmente no que diz respeito ao cálculo desse imposto praticado no estado do Tocantins, podemos verificar a aplicação de vários conceitos matemáticos básicos ao cálculo do valor do IPVA, tanto explícitos (porcentagem) quanto implícitos (função afim, taxa de crescimento, princípio fundamental de contagem e combinação simples). Tal atitude desempenha importante papel no processo de ensino-aprendizagem, pois constitui uma atividade motivadora, instigante e estimulante para os estudantes do Ensino Básico.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm. Acesso em: 01 fev. 2021.

BRASIL. **Decreto-Lei nº 999, de 21 de outubro de 1969.** Institui Taxa Rodoviária Única e dá outras providências. Brasília, 1969. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Decreto-Lei/1965-1988/Del0999.htm. Acesso em: 01 fev. 2021.

BRASIL. **Emenda Constitucional nº 27, de 21 de outubro de 1985**. Altera dispositivos da Constituição Federal. Brasília, 1985. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Emendas/Emc_anterior1988/emc27-85.htm. Acesso em: 01 fev. 2021.

CONSELHO NACIONAL DE TRÂNSITO (CONTRAN). **Resolução nº 590, de 24 de maio de 2016**. Estabelece sistema de Placas de Identificação de Veículos no padrão disposto na Resolução MERCOSUL do Grupo Mercado Comum nº. 33/14. Brasília, 2016. Disponível em: https://www.gov.br/infraestrutura/pt-br/assuntos/transito/conteudo-contran/resolucoes/resolucao5902016.pdf. Acesso em: 01 fev. 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2016.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

SANTOS, José Plínio O. *et al.* **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

TOCANTINS. **Lei nº 1.287, de 28 de dezembro de 2001**. Dispõe sobre o Código Tributário do Estado do Tocantins, e adota outras providências. Palmas, TO 2001. Disponível em: https://www.al.to.leg.br/arquivos/lei_1287-2001_51284.PDF. Acesso em: 01 fev. 2021.

TOCANTINS. **Portaria SEFAZ nº 1.110, de 27 de dezembro de 2017**. Dispõe sobre o lançamento, a cobrança e o pagamento do IPVA referente ao exercício de 2018, fixando o calendário dos exercícios de 2018 e 2019 e adota outras providências**.** Palmas, 2017. Disponível em: http://dtri.sefaz.to.gov.br/ . Acesso em: 01 fev. 2021.

CAPÍTULO 3

INTEGRANDO A MATEMÁTICA COM AS ABELHAS

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 05/02/2021

Géssica Gonçalves Martins
IFES/Campus Montanha
Montanha/ Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/4140712061046310

Cláudia da Cunha Monte Oliveira
IFES/Campus Montanha
Montanha/ Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/4539972558458990

Guilherme Almeida Honorato
IFES/Campus Montanha
Montanha/ Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/0579669264689687

João Pedro de Aguilar e Matos
IFES/Campus Montanha
Montanha/ Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/9487214450765381

RESUMO: Relacionar teoria e prática nos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio têm-se tornado cada dia mais essencial. Nesse sentido, temos o relato de um Projeto de Iniciação Científica (Pbic-Jr) que possibilitou a associação entre as disciplinas de Matemática e Produção Animal do curso Técnico em Agropecuária do Ifes – campus Montanha. Consistiu em estudar o comportamento das abelhas *Apis mellifera* modelado pela matemática, sobretudo em sua relação com os conteúdos de funções e sequências. A pesquisa classificou-se como exploratório-descritiva (GIL, 2018, p. 26-27). Os dados foram coletados em fontes documentais, e a partir da observação sistemática. Para análise dos dados coletados, entendemos que alguns passos foram essenciais: a codificação dos dados; o estabelecimento de categorias de análise; a exibição dos dados que significou a elaboração e escrita do relatório com as informações coletadas; e a busca de significados, finalizando o relatório (GIL, 2018, p. 110). Com a aplicação desta metodologia, analisando os modelos matemáticos presentes na situação problema, foi possível enxergar uma matemática aplicável e interessante na pesquisa do comportamento das abelhas.

PALAVRAS-CHAVE: abelhas, Produção Animal, Matemática, sequências e funções.

INTEGRATING MATHEMATICS WITH BEES

ABSTRACT: Relating theory and practice in technical courses integrated to high school has become increasingly essential. In this sense, we have the report of a Scientific Initiation Project (Pbic-Jr) that made possible the association between the subjects of Mathematics and Animal Production of the Ifes Technical Course in Agriculture and Livestock - Ifes campus - Montanha. It consisted of studying the behavior of Apis mellifera bees modeled by mathematics, especially in relation to the content of functions and sequences. The research was classified as exploratory-descriptive (GIL, 2018, p. 26-27). The data were collected from documentary sources, and from systematic observation. For the analysis

of the collected data, we understand that some steps were essential: the coding of the data; the establishment of analysis categories; the display of the data that meant the elaboration and writing of the report with the collected information; and the search for meanings, finalizing the report (GIL, 2018, p. 110). With the application of this methodology, analyzing the mathematical models present in the problem situation, it was possible to see an applicable and interesting mathematics in the research of the behavior of bees.
KEYWORDS: Bees, Animal Production, Mathematics, sequences and functions.

INTEGRANDO A MATEMÁTICA COM AS ABELHAS

Segundo a lei 11892/2008, temos *o trabalho* como princípio educativo nos fundamentos do Ensino Médio Integrado dos Institutos Federais, o que nos indica uma formação integrada à pesquisa como princípio pedagógico, na qual perguntar é tão importante quanto responder, onde a interdisciplinaridade é um método e a teoria deve caminhar junto à prática. Nesse sentido, entende-se Ensino Médio Integrado como uma etapa da educação que compõe o nível básico da educação escolar e que tem como principal característica articular de forma integrada o ensino médio com o ensino profissional.

Durante nossa rotina de trabalho e estudo, dentro do próprio processo de ensino e aprendizagem, percebemos um distanciamento entre os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula e os conhecimentos práticos trabalhados nas aulas de Produção Animal do curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio. Além disso, os alunos ingressantes no primeiro ano chegam ao Instituto com muitas dificuldades relacionadas à Matemática e tais dificuldades se agravam quando associadas ao ritmo de estudo exigido em um ensino Integral e Integrado.

Posto isto, este trabalho teve como objetivo relacionar teoria e prática, associando conteúdos aprendidos nas disciplinas de Matemática e Produção Animal do curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio, no qual lançamos mão de uma ferramenta matemática - a modelagem - para tratar um recorte da apicultura.

Configurado como projeto de Iniciação Científica (Pibic-Jr), do qual fizeram parte dois estudantes bolsistas e duas professoras de Matemática do Instituto, os pesquisadores, tiveram como objetivo geral de pesquisa: estudar o comportamento e a comunicação nas colmeias de abelhas *Apis Melífera*, por meio da modelagem matemática, associando temas estudados nas disciplinas de Matemática e Produção Animal do curso Técnico de Agropecuária.

Para isso, foram traçados como objetivos específicos:

- Viabilizar o processo de ensino e aprendizagem, por meio da pesquisa, utilizando como metodologia a modelagem matemática, possibilitando a interdisciplinaridade entre os tópicos de Matemática e Produção Animal do curso Técnico de Agropecuária;

- Relacionar a matemática escolar presente nos conteúdos de sequências e funções, com o estudo do comportamento das abelhas abordado pela disciplina técnica do curso Técnico de Agropecuária integrado ao Ensino Médio.

A pesquisa durou de 12 meses, sendo executada entre agosto de 2019 e julho de 2020, e buscou, sobretudo, relacionar com a matemática alguns comportamentos das abelhas: como se comunicam quando encontram uma boa fonte de alimento; como avisam às demais a posição das flores, tomando como referência a posição do sol; como e por que elas fazem a chamada “dança do requebrado”; qual a relação com o número de vezes que a abelha faz o circuito dançando, indicando a distância das flores; etc.

A PESQUISA NORTEADA PELA MODELAGEM MATEMÁTICA

Desde o nascimento estamos rodeados de modelos que norteiam a vida familiar, escolar e social, assim, intuitivamente, construímos representações mentais que ao longo do tempo e a partir de novas aprendizagens expandem nossa capacidade de perceber e explicar os elementos que nos cercam.

Nesse sentido, segundo Bassanezi (2013), a modelagem matemática é a arte de transformar situações reais em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. E pode ser descrita como “uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final” (ALMEIDA, ARAÚJO, BISOGNIN, 2012).

Biembengut (2011) define a modelagem como área de pesquisa voltada para a criação ou elaboração de um modelo, tal que, modelar não é apenas conseguir uma solução particular, mas, utilizar os resultados do processo para ser suporte em outras aplicações e teorias.

Na perspectiva da Modelagem Matemática como metodologia de ensino, Biembengut (2011) apresenta o termo “Modelação” como a aplicação da Modelagem na Educação e justifica que “o objetivo de quem faz Modelagem (Matemática) é estabelecer um modelo (matemático) de uma situação problema para então resolvê-la, entendê-la, modifica-la se necessário [...]”, enquanto que o termo Modelação tende a “promover conhecimento ao estudante em qualquer período de escolaridade, e ensiná-lo a fazer pesquisa nessa estrutura escolar” (BIEMBENGUT, 2011).

A presença da modelagem na escola representa um passo importante para a dinamização dos conteúdos de Matemática, e dos alunos como sujeitos do processo de aprendizagem, protagonistas nesta busca por soluções de problemas reais.

Dessa forma, essa metodologia embasa teoricamente esta proposta de pesquisa, já que, compreendemos que proporcionar ao estudante a oportunidade de tornar-se um pesquisador, pode contribuir para facilitar a aprendizagem e estreitar seu relacionamento com a disciplina. Isso não significa dizer que os alunos devem ser desafiados apenas com problemas sofisticados e com alto grau de dificuldade, mas sim com questões que despertem a curiosidade e façam parte de suas experiências.

PERCURSOS DA PESQUISA

A partir da proposta geral deste projeto de pesquisa, no qual buscamos analisar a forma como as abelhas se comunicam e seu comportamento quando as mesmas encontram uma boa fonte de alimento, por meio da modelagem matemática, esclarecendo conceitos e ideias que determinam a ocorrência desse fenômeno, a fim descrever características de determinada população e/ou fenômeno, classificamos esta pesquisa como exploratório-descritiva (GIL, 2018, p. 26-27).

Em suas modalidades, por explorar um fenômeno real, com base em material já publicado, descrevendo-o, propomos uma análise assumindo alguns pressupostos de um estudo de caso único (GIL, 2018, p. 106), no qual os estudantes estudaram com maior profundidade o comportamento das abelhas a relação existente com a matemática.

Sendo assim, como mecanismos para coleta de dados, lançaremos mão da consulta a fontes documentais, ou seja, uma revisão de literatura, e da observação sistemática, nos quais o pesquisador já tem definidos quais aspectos do fenômeno são relevantes para alcançar os objetivos pretendidos, estabelecendo um plano para o levantamento de fontes e para observação do fenômeno no campo. A consulta a documentos torna-se indispensável, de modo que possibilita reunir informações de materiais já publicados com conteúdos referentes à estrutura e organização do fenômeno estudado. Enquanto a observação sistemática completa este estudo, já que, os discentes/pesquisadores, ao realizarem as visitas técnicas, sabiam quais aspectos da comunidade estudada - a saber abelhas *Apis Melífera* - eram significativos para alcançar os objetivos desta pesquisa (GIL, 2018, p. 109 e 110). Além disso, a visita técnica para observação, proporcionou aos pesquisadores um contato inicial com outras comunidades de abelhas, abelhas nativas brasileiras (uruçu amarela, mandaçaia, jataí, boca de sapo, iraí, dentre outras), que também apresentam padrões. No entanto, não foi possível aprofundamento devido às condições atípicas deste ano de 2020, em que vivenciamos uma pandemia mundial.

Para análise dos dados coletados, entendemos que alguns passos foram essenciais: 1) a codificação dos dados, que consistiu na escolha dos conceitos relevantes encontrados nos textos dos documentos e nos registros da observação; 2) o estabelecimento de categorias de análise, que basicamente foi a etapa de agrupamento dos conceitos em ordens que emergem dos dados encontrados, escolhidas pelos pesquisadores de acordo com a codificação; 3) a exibição dos dados que significou a elaboração e escrita do relatório com as informações coletadas e devidamente organizadas; e 4) a busca de significados, que representa, finalizando este relatório, a análise resultante do confronto entre os dados sistematizados e a bibliografia que embasa teoricamente este estudo (GIL, 2018, p. 110).

Com foco geral na intervenção proposta nesta pesquisa, relacionada ao conteúdo matemático de sequências, essa será uma investigação de cunho qualitativo, que também lançará mão da análise quantitativa de alguns dados que segundo Bardin (2011, p. 146), quando aplicadas numa pesquisa não são excludentes, mas se complementam: “[...] Por último, precisemos que a análise qualitativa não rejeita toda e qualquer forma de quantificação. Somente os índices é que são retidos de maneira não sequencial, podendo o analista recorrer a testes quantitativos [...]”.

Para mais, pesquisar o comportamento das abelhas, analisando os modelos matemáticos presentes numa situação problema específica, revelando uma matemática aplicável e interessante, que explica um fenômeno natural, foi a principal intenção da aplicação desta metodologia.

DESENVOLVIMENTO E DISCUSSÃO

A pesquisa, como já mencionado, envolveu dois alunos bolsistas do Instituto, bem como um plano de trabalho para cada um. Na maior parte do tempo os dois trabalharam juntos, mas precisaram analisar os comportamentos das abelhas separadamente em certa etapa do estudo para relacionar devidamente aos conteúdos de função e sequências da disciplina de matemática. Trazemos aqui as análises dos alunos:

Entendendo sequência com as abelhas: análise aluno Guilherme Almeida Honorato

As abelhas, apesar de serem pequenas, são de grande importância ao mundo e realizam tarefas nas quais não prestamos muita atenção, mas que deveriam ser levadas em consideração.

É interessante dizer que as abelhas possuem sua rotina e costumes muito rígidos, seguem um grande padrão em seu trabalho e estão sempre buscando o aperfeiçoamento de suas técnicas para melhor aproveitamento de recursos.

A colmeia necessita de se suprir com o mel que possui. Sabendo que uma abelha se locomove com a velocidade de 24 km por hora e consome 0,5mg de mel por km, temos que em uma hora uma abelha consumiria 12mg de mel, isso se ficasse durante esse tempo na mesma velocidade e sem parar, representado da seguinte maneira:

0,5mg ------ 1km   x = 12mg

x ------- 24km

Uma abelha durante seu voo pode encontrar uma boa florada (local onde possui muitas flores que a abelha pode aproveitar) , achando uma florada, é mas do que necessário avisar ao resto da colmeia, porém as abelhas não falam, então o que fazem?

Chamado também de “dança do requebrado”, serve de meio de comunicação para uma colmeia. Nessa comunicação existe a “dança em círculo”, “dança do requebrado” e “dança foice”. Dependerá de alguns fatores para qual tipo de “dança” será, como, à distância e direção.

O que irá determinar a distância da florada será a duração do circuito da “dança” que a abelha realizará, sendo assim, verifica-se o número de vezes em que faz o circuito por segundo. Após o descobrimento de alguns dados, chegaram a uma função, $y = ax + b$ sendo y a distância da florada em metros, x como a variável (quantidade de circuitos em segundos) e a e b seriam os coeficientes angular e linear com os seguintes valores:

$a = 967{,}74$ e $b = -1919{,}35$, sendo $x > 2{,}1$ e supondo que a quantidade de circuitos por segundo fosse 5, teríamos:

$f(x) = 967{,}74x - 1919{,}35$

$f(5) = 967{,}74*5 - 1919{,}35$

$f(5) = 4.838{,}7 - 1919{,}35$

$f(5) = 2.919{,}35$

Porém esse número não seria possível, pois a colmeia não ultrapassa o raio de 1,5km de distância, sendo 2.919,35 apenas uma suposição.

Para saber mais sobre a dinâmica populacional devemos levar em consideração:

-O número de abelhas numa família nova - 10.000 abelhas.

-Postura média de uma rainha - 2.000 ovos/dia.

-Longevidade das operárias - 40 dias.

-Período entre postura e nascimento - 21 dias.

Além disso, as abelhas possuem idades equidistribuidas.

Supõe-se que serão colocadas 10.000 abelhas para a nova família, devemos colocar em tese que a cada dia morrem 250 abelhas, pois possuem idade de até 40 dias: 10.000:4= 250

Durante os primeiros 20 dias terá uma diminuição de população, pois o nascimento apenas ocorre depois de 21 dias:

Ex: População inicial - $P(0) = 10.000$

Após 1 dia - P(1)= 10.000 - 1*250= 9.750

Após 20 dias - P(20) = 10.000 - 20*250= 5.000

O aumento da população seria o seguinte. O número da população presente no 20° dia mais as novas nascidas subtraídas pela mortalidade diária, assim temos:

P(20) = 5.000 - 250 + 2000

Dessa forma, se quisermos saber a população dos dias seguintes (acima de 21 dias) sempre faremos a conta citada acima, porém, com a população do dia anterior do que você quer encontrar.

Nas colmeias de abelhas existem, rainha, operárias, e zangões. A rainha produz ovos, os zangões são os machos não fertilizados quando eram ovos e as operárias são as fêmeas que foram fertilizadas enquanto eram ovos. A partir dessas informações podemos analisar a sequência de Fibonacci com a árvore genealógica de um zangão, que consiste em números inteiros onde cada termo da sequência é resultado da soma dos dois anteriores, com isso podemos determinar o número de abelhas em gerações de um zangão. Sendo representado pela sequência da seguinte maneira: {1;1;2;3;5;8;13;21…}.

Entendendo funções com as abelhas: análise do aluno João Pedro de Aguilar Matos

As abelhas são insetos muito importantes na natureza e têm uma organização comunitária excelente, além da engenharia e comunicação. O texto mostra o dispêndio de energia, comunicação, e a dinâmica populacional das abelhas usando regra de três, coordenadas polares, progressão aritmética e funções do 1° grau.

Uma abelha voa a 24 km/h e gasta 5mg de mel por km. Ela precisa voar aproximadamente 40.000 km em um raio de 1,5 km para produzir um litro de mel, colocando em regra de três temos que:

0,5mg---------1 km (Para produzir um litro de mel, uma abelha consome)

Xmg----------40.000km

Calculando: 20.000 mg, ou seja, 20 g

Assim, 40.000/1,5 = 26.670 idas e voltas da colmeia à florada para fazer um litro de mel

Um pesquisador chamado Von Frisch descobriu que as abelhas possuem uma forma de comunicação entre elas para indicar a distância da colmeia para uma fonte de néctar que elas tenham encontrado. Nesta comunicação, apelidada de "dança do requebrado", Crane mostra a distância em que está a florada de acordo com o tempo do circuito:

DISTÂNCIA(m)	200	500	1.000	2.000	3.500	4.500
TEMPO(s)	2,1	2,5	3,3	3,8	5,6	6,3

Colocando os dados de Crane em sistema cartesiano, conseguimos aproximá-los a uma função de 1° grau. Por exemplo, pegando dois pontos desse sistema e colocando-os na lei da função de primeiro grau y= ax +b, sendo y a distância e x o tempo:

P1(2,5; 500)------------ 500 = a(2,5) + b(-1)------------- -2,5a - b = -500

P2(5,6; 3.500)----------3500 = a(5,6) + b---------------- 5,6a + b = 3500

Resolvendo esse sistema de equações, encontramos que a função y = 1919,35 - 967,74. Essa função nos permite calcular o tempo que leva a dança para determinada distância ou a distância para um determinado tempo de dança.

Uma colmeia de tamanho médio chega a ter de 60 a 80 mil operárias, 400 zangões e uma rainha. Onde a operária vive de 38 a 42 dias, o zangão até 80 dias e a rainha até 5 anos. As operárias realizam a maioria das funções na colmeia, desde limpeza dos favos até coleta de ingredientes para o mel. Os zangões só vivem para se reproduzir. A rainha mantém as abelhas unidas e gera outras novas, colocando até 3 mil ovos por dia. Quando ela envelhece, sua produção de ovos decai então as operárias começam a preparar outra rainha. A rainha velha sai da colmeia com 8 a 12 mil abelhas operárias, e elas formam uma nova colônia. A respeito disso, é proposta uma questão: em quanto tempo a colmeia se estabelece?

Para isso se considera que esse enxame tenha 10000 abelhas, que a rainha coloque 2000 ovos por dia, que as operárias tenham idades igualmente distribuídas, que vivam 40 dias e que o tempo de eclosão dos ovos seja de 21 dias.

Essa colmeia passará 20 dias sem nenhum indivíduo novo nascendo, e como as operárias têm idades igualmente distribuídas, se dividirmos o número total (10000) pelo tempo que vivem se obtém uma mortalidade de 250 abelhas por dia. Então, para os primeiros 20 dias temos uma fórmula representada por **P(t) = 10000 - 250t** , onde t é igual ao número de dias, 10000 o número inicial de abelhas e 250 a mortalidade diária

Vão sendo subtraídas 250 abelhas por dia das 10000 iniciais até chegar em 5000 no 20º dia, pois a partir do 21º dia começam a nascer 2000 abelhas diariamente enquanto continuam morrendo 250, então a função passa a ser descrita por **P(t) = 5000 + 1750(t - 20)** até o 40º dia.

A partir do dia 21, é subtraído 20 de t, pois a expressão mudou e começaram a nascer abelhas apenas depois do vigésimo primeiro dia. Ao chegar no 40º dia, todas as abelhas do primeiro enxame terão morrido, portanto, não haverá taxa de mortalidade durante 20 dias, tendo então 40000 abelhas e mais 2000 a cada dia, por conseguinte, a lei da função passa a ser representada por **P(t) = 40000 + 2000(t - 40).**

Ao chegar o 61º dia, começam a morrer as abelhas que nasceram na primeira ninhada do 21º dia, assim sendo, nascem 2000 e morrem 2000 por dia na colmeia, e a função passa a ser descrita por **P(t) = 80000**, o número de abelhas na colmeia passa a ser constante.

Podemos dizer então, que essa função possui quatro sentenças,

P(t) = 10000 - 250t para 0 ≤ t < 21

P(t) = 5000 + 1750(t - 20) para 21 ≤ t < 40

P(t) = 40000 + 2000(t - 40) para 41 ≤ t < 60

P(t) = 80000 para t ≥ 61

Conclui-se que para uma colmeia jovem nessas condições chegar ao seu auge, ela demora 60 dias.

CONCLUSÃO

A observação e o estudo sobre o comportamento e a comunicação das abelhas *Apis melífera*, nos proporcionaram aprofundar os conteúdos matemáticos de sequencias e funções, num processo de ensino e aprendizagem que buscou a modelagem de situações reais e envolveu um trabalho conjunto de duas disciplinas do curso Técnico em Agropecuária, Matemática e Produção Animal.

Especificamente para o plano de trabalho relativo a sequencias matemáticas, o aluno Guilherme expõe:

> É confiável dizer que diante essa pesquisa, nota-se uma extrema relação matemática com as abelhas, sendo até necessária em algumas ocasiões do ramo, o que auxilia bastante os apicultores e zootecnistas. Tendo como princípio as observações que fizemos no trabalho, poderíamos auxiliar um

produtor a fazer a contagem da população de abelhas em uma de suas colmeias em sua propriedade a partir de simples cálculos, e é claro, sem precisar contar de uma em uma.

Outro fator contribuinte neste trabalho é que, sabendo a distância que uma abelha percorre de sua colmeia, é possível saber onde se tem uma melhor localização para se colocar uma caixa de abelhas e saber se será suficiente a florada em que está no seu alcance, fazendo o cálculo de quanto mel consome pela tamanho do percurso realizado. E para avisar o restante das campeiras, as abelhas que localizaram uma florada realizam a “dança do requebrado” (uma forma de comunicação) na qual também pode ser encontrada a partir de um cálculo matemático usando as informações (quantidade de circuitos e segundos) captadas na observação da dança.

Diante da sequência de Fibonacci, podemos numerar a quantidade de abelhas em cada geração da árvore genealógica de um zangão, o que é muito interessante tendo em vista que podemos saber essas informações apenas usando a matemática. Um fato curioso, mas que não foi citado na pesquisa, é sobre o número de Ouro que também possui uma relação com as abelhas e sua população, fazendo relação com a sequência de Fibonacci.

E para o estudo direto com funções, o aluno João Pedro indica:

Com a distribuição populacional e a troca de informações que ocorrem na sociedade desses insetos. É possível deduzir qual a distância da florada observando a dança das abelhas e descobrir o ritmo do crescimento de uma população recém-formada utilizando conteúdos matemáticos como o plano cartesiano e as funções.

Dentro do trabalho do técnico em agropecuária, esses dados podem auxiliar o produtor a escolher uma localização com uma boa florada para a colmeia, pois as abelhas percorrem um raio de até 2 km, e sobrevoam 40000 km dentro desta área para produzir um litro de mel. É possível também deduzir em quanto tempo uma nova colônia vai demorar para se estabelecer ao ser dividida ou pega da natureza.

Isto posto, os estudantes tiveram oportunidade de aprofundar os conhecimentos em determinada área do seu curso, além de, conhecer metodologias e técnicas estabelecendo novas análises e descobertas com raciocínio crítico mais expandido. Consideramos indispensável que pesquisas constituem a fazer parte da rotina escolar dos estudantes, tanto as voltadas para as disciplinas curriculares propedêuticas como para as específicas. Ao fazerem parte desse projeto os bolsistas puderam ampliar suas habilidades e competências nos domínios científico, econômico, tecnológico, social e ambiental.

Para continuidade da pesquisa, podem-se realizar estudos relativos ao comportamento das abelhas nativas brasileiras, a saber - Uruçu Amarela, Jataí, Mandaçaia, Boca de Sapo, Iraí, dentre outras - assim como foi feito com as *Apis mellifera*, visto que estas espécies também apresentam padrões, mas são pouco estudadas. Bem como o aprofundamento de questões geométricas, por exemplo: a distribuição espacial na colmeia, sua construção, o uso dos hexágonos nos favos e o espaço abelha.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de; Silva, Karina Pessôa da; Vertuan, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 1ª edição. São Paulo: Edições 70, 2011. Título original: L'analyse de Contenu, tradução Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. 2011.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. Ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5 ed. 2ª reimpressão. São Paulo : Contexto, 2011.

CAMARGO, João Maria Franco de. **Manual de apicultura**. São Paulo: editora Agronômica Ceres, 1972.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6ª edição. São Paulo: Atlas, 2018.

LINS, Rômulo. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (orgs.), **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 92-120.

CAPÍTULO 4

DESENVOLVIMENTO DE PROBLEMAS DE APLICAÇÃO EM ALIMENTOS PARA TÓPICOS DO CÁLCULO IV

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 03/02/2021

Daniela de Almeida Carrea
Universidade de São Paulo
Pirassununga - São Paulo
http://lattes.cnpq.br/3031569172239966

Érik Eiji Nibe Moriyama
Universidade de São Paulo
Pirassununga - São Paulo
http://lattes.cnpq.br/1991074093728509

Jorge Lizardo Díaz Calle
Universidade de São Paulo
Pirassununga - São Paulo
http://lattes.cnpq.br/2049910703027682

RESUMO: A disciplina de Cálculo IV é composta por diferentes tópicos da matemática avançada, que são de extrema importância para a formação de engenheiros. Entretanto muitos estudantes de engenharia, em particular de alimentos, apresentam dificuldade em aprender Cálculo IV por não visualizar a aplicação da disciplina na prática. Através de pesquisas em bibliotecas digitais foram selecionados trabalhos de conclusão de curso, teses e dissertações da área de engenharia de alimentos e afins que utilizam dos tópicos de Cálculo IV em sua pesquisa. Pretendia-se elaborar problemas de aplicação em listas de exercícios, mas, o material encontrado permitiu desenvolver textos motivacionais em apostilas para cada tópico da disciplina. Foram elaborados 41 apostilas motivacionais e problemas de aplicação que são disponibilizados na disciplina online com objetivo de motivar o estudo dos conceitos da matemática avançada.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino, matemática avançada, equações diferenciais parciais, Series de Fourier, Transformada de Laplace.

DEVELOPMENT OF APPLICATION PROBLEMS IN FOOD ENGINEERING FOR CALCULUS IV TOPICS

ABSTRACT: Calculus IV is a discipline composed by different topics of advanced mathematics, they are extremely important for the grounding of the engineers. However, many engineering students, particularly the area of food engineering, have difficulty to learning Calculus IV because they do not see the application of the discipline in practice. Through online scientific research in the digital libraries were selected: final papers, dissertations and theses that use the topics of Calculus IV to develop their research in the area of food engineering and other related engineering. It was intended to develop application problems in exercise lists, but the material found allowed the development of motivational texts in handouts for each topic of the discipline. Fourty-one motivational handouts and application problems have been developed that are made available in the online discipline in order to motivate the study of advanced mathematics concepts.

KEYWORDS: Teaching, advanced mathematics, partial differential equations, Fourier series, Laplace transform.

1 | INTRODUÇÃO

A disciplina de cálculo IV é composta por diferentes tópicos, como as séries de potências, séries de Fourier, transformada de Laplace e equações diferenciais parciais. Todos estes tópicos são de extrema importância para a formação dos engenheiros, pois uma coisa capaz de diferenciar um engenheiro dos demais profissionais na área industrial é o conhecimento teórico e o domínio da ciência. Entretanto muitos estudantes de engenharia apresentam dificuldade em aprender cálculo IV por não visualizar a aplicação da disciplina na prática.

> *"Entender um fenômeno físico significa associá-lo a números", Willian Thomson (Muniz,2011)*

Através de pesquisa cientifica em trabalhos de conclusão de curso, teses e dissertações de graduandos e pós-graduandos, em bibliotecas digitáis das principais universidades do pais, que utilizam dos tópicos de cálculo IV na área de engenharia de alimentos e afins, foram desenvolvidos textos motivacionais en apostilas e enunciados de problemas en listas de exercícios de cada tópico da disciplina. Inicialmente, pretendía-se elaborar diversas listas de exercícios com os problemas estudados nas teses e dissertações, mas, dadas as interessantes aplicações encontradas nos documentos e sua complexidade, decidiu-se elaborar apostilas com textos motivacionais por tópico. A presente pesquisa visa motivar o estudo dos conceitos da matemática avançada e diminuir o número de reprovações e o abandono da matéria.

2 | OBJETIVO

Pesquisa aprofundada de situações problemas aplicados na área de engenharia, que utilizam os conceitos da matemática avançada em Séries de Potências, Séries de Fourier, Transformada de Laplace e Equações Diferenciais Parciais, para elaborar textos motivacionais e listas de exercícios aplicados na área de engenharia de alimentos.

3 | METODOLOGIA

Através de pesquisas cientificas online nas bibliotecas digitais da USP, Unicamp e no google acadêmico, que abrange as demais faculdades estaduais e federais, foram selecionados: trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses que utilizam os tópicos de Cálculo IV para desenvolverem sua pesquisa. A partir dos problemas práticos a serem resolvidos nos documentos selecionados, elaborou-se um problema de aplicação na lista dedicada ao tópico, e caso o problema requeria conhecimentos ainda não estudados pelos alunos no semestre correspondente, elaborou-se uma apostila motivacional simples apresentando o problema selecionado complementando com informações e explanações necessárias de forma a motivar o aprendizado do tópico em foco. Assim, foi relacionado os tópicos matemáticos a vários problemas de aplicação.

4 | DESENVOLVIMENTO

É importante trazer uma abordagem diferente para os alunos, pois gera interesse dos mesmos. Cada um dos exemplos abaixo foram selecionados entre os pesquisados para exemplificar o conteúdo. É preciso pensar sobre as possibilidades de cada exemplo e aplicá-las matematicamente. Cada trabalho citado é interessante para visualização da aplicação do tema em um problema real da engenharia.

Para as Séries de Potências foi desenvolvido a revisão com o conceito deste tema, através da monografia de pós graduação em matemática realizado por Valéria M. Lima em 2011 (Universidade Tecnológica Federal do Paraná), que traz uma abordagem didática das Séries de Potências, como os exemplos: O Paradoxo de Zenão, que considera a partição infinita do tempo e espaço, supondo intuitivamente que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita. E O carpete de Sierpinski que é um fractal construído pela remoção do sub-quadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove sub-quadrados, e segue removendo os sub-quadrados centrais dos outros sub-quadrados menores que permaneceram, e assim sucessivamente.

Após está revisão, foram pesquisados trabalhos que utilizam as Séries de Potências para resolução de equações diferenciais, como a dissertação de mestrado da área de Engenharia Mecânica, que demonstra o cálculo de escoamento de fluidos de alta viscosidade, como óleos, para tratar o problema da estabilidade inicial de um filme líquido escoando em um plano inclinado desenvolvido por Bruno P. Chimetta em 2016 pela Unicamp. Outro trabalho pesquisado para compor Séries de Potencias é o artigo “O Uso de Equações Diferenciais Ordinárias no Cálculo de Escoamento de Água”, realizado por Rodrigo Stahl Marian et al., graduandos de engenharia pela Universidade Regional Integrada, Rio Grande do Sul, que utiliza as equações diferenciais ordinárias (EDO) para determinar o tempo necessário para o escoamento de água até o ponto em que ocorra o religamento automático de uma bomba de enchimento em caixa da água.

Nas Series de Fourier obteve-se grande interesse durante a pesquisa por poder visualizar a aplicação delas de uma forma bem diferente a normalmente visualizada em sala de aula. Um artigo aplicado na área de Agricultura e Alimentos escrito por Luiz G. De Carvalho et. al. do ano de 2005, visa a previsão de produtividade da cultura de café no estado de Minas Gerais, utilizando a análise harmônica da Série de Fourier, submetendo os coeficientes extraídos a regressão linear múltipla nos três primeiros componentes principais para produção do café. O modelo apresentou erros nas estimativas, e mostra a complexidade de modelagem de previsão de safras para a cultura do café.

Foi encontrada outra pesquisa referente a previsão, porem referente a demanda de água numa empresa de abastecimento, para isso é utilizado as series temporais. O modelo proposto utiliza os dados da demanda de água de no mínimo uma semana, ajusta-se numa equação harmônica, e extrapola essa série resultante para o futuro, como um previsor, de forma complexa adaptando em uma série de Fourier.

Outra forma de aplicação encontrada foi na área de estatística para comparar duas populações distintas, utilizando a estimação bayesiana de densidades por séries de Fourier, desenvolvido por Marco H. A. Inacio em 2017 pela USP-São Carlos.

A Transformada de Laplace é muito utilizada na área de alimentos, principalmente na área de resfriamento, trocador de calor e circuitos elétricos. Numa tese de doutorado realizado na Poli-USP, desenvolvida por Bruno R. Kawano em 2019, mostrou o problema do transporte de alimentos nos caminhões refrigerados na hora de abrir as portas do veículo durante o transporte/entrega, para isso foi proposto uma estratégia de pré-resfriamento como forma de atenuar o efeito da carga térmica, por meio de uma simulação do controle de temperatura via controlador PID(proporcional-integral-derivativo) aliado à estratégia de pré-resfriamento. A dissertação de mestrado realizado na ESALQ-USP por Douglas L. Reis em 2018 propõe um protótipo de válvula de vapor para reduzir os microrganismos no processo da cana de açúcar. Para isto utiliza-se uma função de transferência, definida como a relação de uma variável de saída com uma variável de entrada. O modelo matemático é obtido através de uma equação diferencial linear e invariante no tempo, que costuma ser expressa por transformada de Laplace.

Outra pesquisa de mestrado muito interessante foi realizada na EESC-USP e desenvolvida por Paulo R. O. Lasso em 2003, traz o problema da qualidade de vegetais após a colheita. Como uma alternativa para resolver o problema desenvolveram a técnica de *hidro-conservação* (produtos embalados, mantidos imersos em meio aquoso) para garantir a temperatura ideal para cada alimento e conservá-lo de maneira adequada. Para o funcionamento adequado dessa técnica foi necessário o conhecimento dos circuitos elétricos (que podem ser trabalhados através da transformada de Laplace), pois é preciso controlar a modelagem do sistema de controle de temperatura.

5 | RESULTADOS

A aplicação da pesquisa possibilitou identificar problemas de aplicação utilizados por graduandos e pós-graduandos ao finalizar seus estudos. A partir desses problemas foram elaborados 35 textos motivacionais que servirão para contextualizar a introdução de cada tópico da disciplina. Também foram elaborados 6 problemas de exercícios para compor as listas.

	Alimentos	Outros	Total
Séries de Fourier	1	4	5
Séries de Potências	3	4	7
Transformada de Laplace	6	0	6
Equação de Laplace	1	6	7
Equação de Calor	9	0	9
Equação de Onda	0	7	7
Total	20	21	41

Tabela 1: Aplicações dos exercícios e textos motivacionais

Fonte: Autoria própria.

Desses 41 resultados, 20 correspondem a área de engenharia de alimentos, e os outros 21 são referentes as outras engenharias. Para gerar os documentos, extraiu-se todo conceito e problemática de cada pesquisa. Os documentos gerados estão na Tabela 1.

A partir da pesquisa, pode-se dizer que os temas Séries de Potências e Séries de Fourier são temas pouco utilizados comparado a Transformada de Laplace e Equações de Calor na área de Engenharia de Alimentos. Para Equação de Ondas e de Equação de Laplace houve grande dificuldades em encontrar trabalhos que fossem relacionados à Alimentos.

O tema, Séries de Potências, foi o que mais gerou exercícios com funções que podem ser utilizadas com os alunos. Nas séries de Fourier e Transformada de Laplace não é viável utilizar as funções dos trabalhos com os alunos por serem muito complexas.

5.1 Exemplos resumidos de texto motivacional

Serie de Fourier

I. Análise comparativa dos modelos kNN-TSP e Série de Fourier para previsão de demanda horária para abastecimento de água

Introdução

Zahed (1990) desenvolveu e aplicou dois modelos de previsão de demanda na operação horária de parte do Sistema Adutor Metropolitano de São Paulo baseados no modelo de Perry (1981) ...

...

Metodologia

O modelo proposto por Zahed (1990) é baseado na série de Fourier e prevê coeficientes harmônicos atualizados na base diária, com ciclos ...

...

Aplicação

Uma empresa de abastecimento de água precisa de uma previsão de demanda para gerenciar a capacidade dos reservatórios e dos sistemas de distribuição, além de auxiliar no planejamento de investimentos dos referidos sistemas. A fim de prever a demanda de água a ser abastecida durante o mês, a empresa hídrica solicitou a seu engenheiro que através de equações matemáticas (series temporais) conseguisse uma previsão para a demanda de água. Um engenheiro propôs um modelo para prever a demanda semanal de abastecimento de água baseado na Série de Fourier. Para utilizar tal modelo foi necessário dados de uma semana para realizar a previsão da demanda e consiste em ajustar uma equação harmônica a uma série de dados observados e extrapolar essa série para o futuro, como um previsor, adaptando em uma série de Fourier, entretanto a adaptação da série para a função de consumo pode ser complexa (Odan et al,2009).

Transformada de Laplace

I. Aplicação da transformada de Laplace para o problema do transiente térmico em multicamadas

Introdução

Uma das formas da utilização do frio na conservação de alimentos é a refrigeração. Na indústria, a refrigeração é utilizada em vários processos de transformação relacionados com o ramo alimentar, químico, ...

…

Metodologia

A pesquisa iniciou-se com estudo da condução do calor para barras homogêneas em que os diferentes materiais foram colocados em contato, lado a lado com o intuito de formar uma única barra composta …

…

Aplicação

As câmaras frias são ambientes climatizados utilizados na conservação de alimentos. Em geral, uma câmara fria é composta de uma camada de alvenaria com emboço (parede externa). A condução de calor pode ser definida como a transferência de energia térmica de uma parte de um corpo com temperatura mais elevada para outra parte do mesmo corpo a uma temperatura mais baixa. A transformada de Laplace é amplamente utilizada como uma técnica analítica na condução do calor transiente. A aproximação de derivadas finitas é um dos métodos mais antigos para resolver equações diferenciais parciais, utilizando o método da Transformada de Laplace para solucionar o problema aplicada a equação do calor para obter a solução em que envolvem condução de calor em uma barra unidimensional compostas por diferentes materiais (Alves,2017). Vide Figura 1.

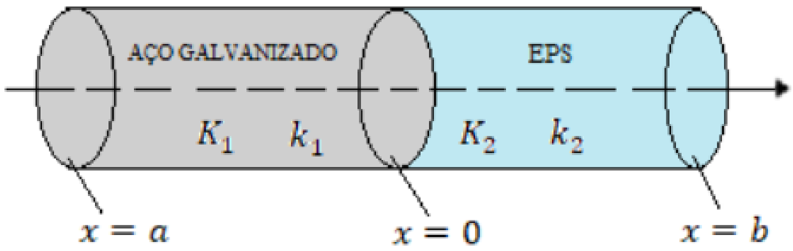


Figura 1: Barra composta por dois materiais com propriedades térmicas de ordens de grandezas diferentes.

Fonte: Aplicação da transformada de Laplace para o problema do transiente térmico em multicamadas.

Série de Potência

I. Uso de equações diferenciais ordinárias no cálculo de escoamento de água

Introdução

Dentro das engenharias, existem situações em que se deseja descrever ou modelar matematicamente algumas situações. As equações diferenciais surgiram a partir dessa necessidade, elas ajudam a descrever

…

Metodologia

Para se chegar a uma equação diferencial ordinária para o cálculo do problema descrito acima, partiu-se do Teorema de Torricelli ...

…

Aplicação

Utilizando a equação diferencial ordinária, é possível determinar o tempo necessário para o escoamento de água até o ponto em que ocorra o religamento automático de uma bomba de enchimento em caixa d'água, considere o PVI (problema de calor inicial) V=20.000 (capacidade do reservatório em m³) e t=0s (pois o volume máximo do reservatório se dá no tempo 0s) (Maniani, et al). Vide Figura 2.

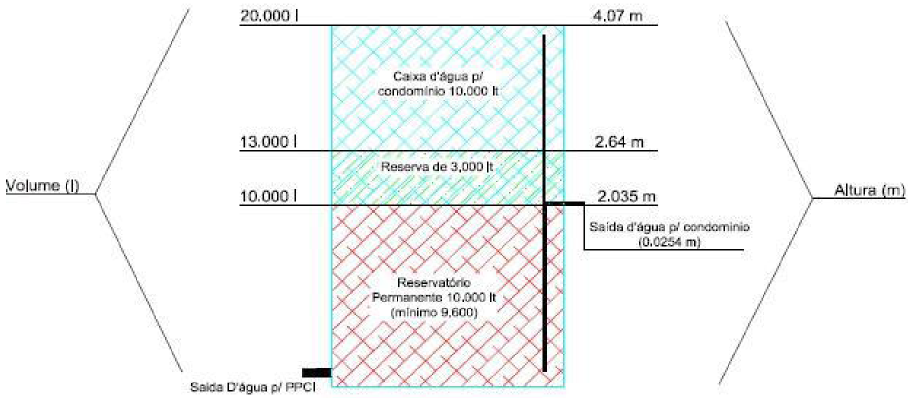


Figura 2 : Reservatório de água

Fonte: Artigo: O uso de EDO no cálculo de escoamento de água (MANIANI, S)

5.2 Exemplos de Problemas de Aplicação em Lista de Exercício

Série de Potência

I. O Carpete de Sierpinski1 é construído pela remoção do subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrado. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrado centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim sucessivamente.

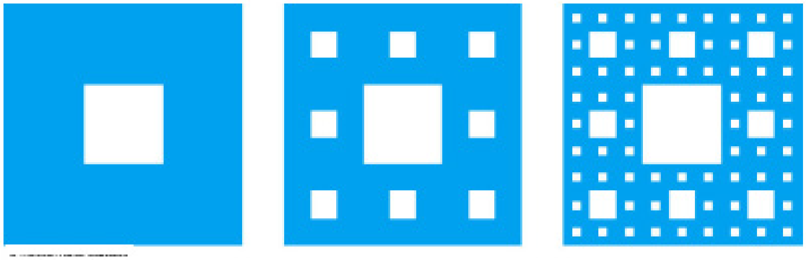


Figura 3 -Carpete de Sierpinski

Fonte: (STEWART,2007)

A Figura 3 apresenta as três primeiras etapas da construção do carpete. (Lima,2011)

a. Qual a série que representa este problema?

…

Transformada de Laplace:

II. Em um mercado, o responsável pelo setor de alimentos frescos solicitou a técnica de *hidro conservação* em suas encomendas. Para realizar a nova técnica é preciso ter conhecimento em circuito elétricos, pois é preciso controlar a modelagem do sistema de controle de temperatura (semelhante ao da carga de um capacitor em um circuito elétrico).

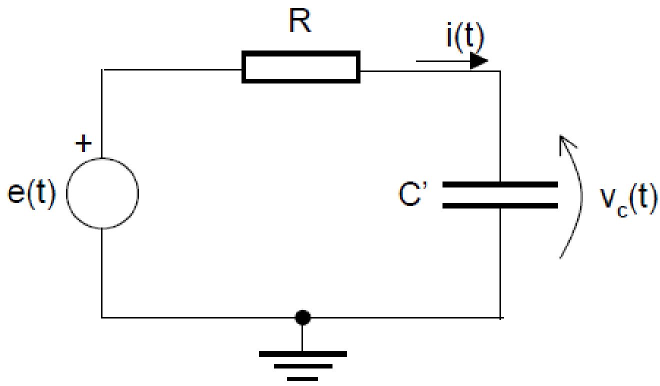


Figura 4: Circuito eletrico RC

Fonte: Lasso,2013

Função: $e(t) = RC'\frac{dv_C(t)}{dt} + v_c(t)$

No circuito: *e(t)* é a tensão da fonte de tensão, *R* é a resistência elétrica do circuito, *C'* é a capacitância do capacitor, $v_c(t)$ é a tensão entre as placas do capacitor e *i(t)* é a corrente no circuito (Lasso,2003). Dados os valores correspondentes pelo professor, resolva o circuito elétrico utilizando a transformada de Laplace.

6 I CONCLUSÃO

Com a pesquisa foi possível relacionar os temas de cálculo com aplicações estudadas na elaboração de trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses na área da engenharia.

Houve dificuldade para achar alguns tópicos aplicados em engenharia de alimentos, porem relacionou-se os mesmos nas engenharias em geral, sendo possível entender o motivo desta disciplina ser importante para a formação de um engenheiro.

Na transformada de Laplace e equação de calor há mais trabalhos relacionados a engenharia de alimentos que os demais tópicos.

Com as aplicações identificadas espera-se que os alunos matriculados na disciplina Cálculo IV interajam em discussões e análises nas aulas, utilizem as apostilas e listas para estudarem de forma interativa, e aumente o interesse nos tópicos reduzindo o número de reprovações.

AGRADECIMIENTO

Os autores agradecem à "Universidade de São Paulo" pelas bolsas do "PROGRAMA UNIFICADO DE BOLSAS DE ESTUDO PARA APOIO E FORMAÇÃO DE ESTUDANTES DE GRADUAÇÃO (PUB-USP)"

REFERÊNCIAS

1. ALVES, C. **Aplica**ção da transformada de Laplace para o problema do transiente térmico em multicamadas. TCC, 32f-Universidade Federal da Fronteira Sul, Engenharia de Alimentos, Laranjeiras do Sul, PR, 2017.

2. BOYCE, W., DIPRIMA, R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC Editora, Rio de Janeiro. 2002.

3. CARVALHO, L. G. et al. **Aplica**ção da aná**lise harm**ô**nica por s**éries de Fourier para a previsão de produtividade da cultura do café no Estado de Minas Gerais. Eng. Agríc., Jaboticabal, v. 25, n. 3, p. 732-741, 2005

4. CLAUDIA, A. N. A.; GUEDES, E. **Estudo teórico e experimental em escala reduzida de uma barreira vertical de alta permeabilidade para encapsulamento de áreas contaminadas em aquíferos.** 2018.

5. DETMANN, E. et al. **Variáveis ruminais avaliadas por meio de funções matem**áticas contínuas. Pesq. agropec. bras., Brasília, v. 42, n. 11, p.1651-1657, 2007.

6. DURRER, A. J. P. **Análise do Campo Magnético de um Motor de Ímã Permanente no Rotor Utilizando o Método dos Elementos Finitos Análise do Campo Magnético de um Motor de Ímã Permanente no Rotor Utilizando o Método dos Elementos Finitos**. 2007.

7. GODOY, S. M. **Eficiência t**érmica de trocadores de calor compactos através de simulação numé**rica**. Dissertação – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

8. GOMES, G. H.; LOPES, C. M. C.; NIETO, S. DOS S. **Cálculo Zero: Uma Experiência Pedagógica com Calouros nos Cursos de Engenharia**. Cobenge, n. February, 2005.

9. GUTIERREZ, C. G. C. **Distribuição do tempo de residência em processo de pasteurização com trocador de calor a placas** / - São Paulo, 2008. 97 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da USP, 2008.

10. HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Systems of Units Some Important Conversion Factors**.

11. INACIO, M. H. DE A. **Comparação de duas populações utilizando estimação bayesiana de densidade por séries de Fourier**. 56 p. Mater dissertation (Master student joint Graduate Program in Statistics Des-UFSCar/ICMC-USP) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos- SP, 2017.

12. KAWANO, R. B. **Proposta de estratégia de controle de temperatura baseada em pré-resfriamento de produtos agrícolas perec**íveis no transporte refrigerado rodoviário. Tese (Doutorado)-Escola Politécnica da Universidade de São Paulo,2019.

13. KNIRSCH, M. C. **Construção de sistema de aquecimento ôhmico e verifica**ção comparativa do comportamento da proteína verde fluorescente e da bacteriocina nisina quando sob aquecimento convencional e ô**hmico**. p. 77, 2010.

14. LASSO, P. R. O. **Uma nova técnica para conservação de alimentos frescos baseada em instrumentação eletroeletrônica automatizada**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

15. LIMA, V. M. **Power Series: Theoretical Aspects and Applications.** 66 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

16. MACAMBIRA, I., ATHAYDE, L. **Reprovação na disciplina cálculo nos cursos de engenharia: Analise de dados e métodos minimizadores.** COBENGE 2014.

17. MANIANI, S. et al. **O uso de equações diferenciais ordinárias no cálculo de escoamento de água**. Engenharia Civil. Universidade Frederico Westphalen, SC.

18. ODAN, F. K., et al. **Análise comparativa dos modelos kNN-TSP e Série de Fourier para previsão de demanda hor**ária para abastecimento de á**gua**. XVIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos.

19. PELISSON, C, B. **Soluções assintótica e numérica da equação de Orr-Sommerfeld para ondas de superfície em um plano inclinado**.. 114p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2016.

20. PEREIRA, R. F. R. **Estimação de parâmetros de linhas de transmissão por meio de técnicas de identificação de sistemas**. 170 p. Dissertação de mestrado – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2019.

21. REIS, D. L. **Desenvolvimento de trocador de calor de contato direto equipado com sistema microcontrolado para tratamento térmico de mosto na indústria sucroenerg**ética. Dissertação de Mestrado 77 p - / Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba - USP 2019

22. RODRIGUES, J. F., et. al. **Aplica**ção de Série de Potência para solução de problema em engenharia elé**trica**. 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and Their Applications, 435–440. Serra Negra-SP,2010.

23. SOARES, J. D. O. **Soares Controle Digital Através de Dispositivo FPGA Aplicado a um Retificador Trifásico H**íbrido Operando com Modulaçã**o por Histerese Vari**ável. “Júlio de Mesquita Filho” Faculdade de Engenharia - Campus de Ilha Solteira Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica Laboratório de Eletrônica de Potência, 2008.

24. STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomsom Learning, 2007.

25. VIEIRA, M.K. et al**. Comparativo entre os métodos numéricos de Euler e Jeun na resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem provenientes de aplicação na engenharia química**. Trabalho de conclusão de curso, UFERSA, Mossoró - RN. 2018.

26. VILANI, M. T.; SANCHES, L. **Análise de Fourier e Wavelets aplicada à temperatura do ar em diferentes tipologias de ocupação**. Rev. bras. eng. agríc. ambient., Campina Grande, v. 17, n. 12, p. 1340-1346, dez.2013.

CAPÍTULO 5

REPRESENTAÇÕES DE PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL NUM PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA SOBRE CONTEÚDOS E METODOLOGIAS

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 03/02/2021

Alice Venturini Oliveira
Centro Universitário Norte do Espírito Santo/ Universidade Federal do Espírito Santo (CEUNES/UFES)
São Mateus, Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/6324312620486768

Lúcio Souza Fassarella
Centro Universitário Norte do Espírito Santo/ Universidade Federal do Espírito Santo (CEUNES/UFES), Departamento de Matemática Aplicada (DMA)
São Mateus, Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/5198314059044151

Géssica Gonçalves Martins
Instituto Federal do Espírito Santo (IFES – campus Montanha), coordenadoria do curso Técnico em Agropecuária
Montanha, Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/4140712061046310

RESUMO: Relato de um estudo de caso etnográfico que tem por objeto uma formação continuada para professores do Ensino Fundamental, denominada "Café com Matemática". Busca responder à questão norteadora: *Que representações de professores do 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental emergem de um processo de formação continuada em Matemática?* Tem como objetivo geral descrever e analisar as representações que emergiram de professores atuantes no município de Jaguaré-ES imersos num processo de formação continuada em Matemática. Tem por fundamentos teóricos os pressupostos da História Cultural, os conceitos de representação, prática e apropriação de Roger Chartier, bem como de estratégias e táticas de Michel de Certeau. Estabelece um diálogo sobre a cultura escolar de acordo com Dominique Julia. Emprega para coleta de dados um questionário e a observação participante e os analisa por meio da categorização. A análise constituiu as seguintes categorias de representações: Representação dos professores cursistas sobre o ensino de matemática; Representação dos professores cursistas sobre a formação continuada; Representação dos professores cursistas sobre avaliação dos alunos; Representação dos professores cursistas sobre a profissão docente. Conclui sobre os sujeitos da pesquisa, em geral: entendem o professor como mero transmissor de conhecimento; ensinam da forma como aprenderam na infância e adolescência escolar, buscando atender aos currículos escolares e provas externas sem perceberem sua autonomia didática; apresentam insegurança sobre como avaliar os alunos; da formação continuada esperam por modelos prontos de atividades para aplicar na sala de aula, embora reconheçam que ela proporciona uma oportunidade para refletirem sobre a prática docente.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Ensino Fundamental, Estudo de caso etnográfico.

REPRESENTATIONS OF TEACHERS OF ELEMENTARY SCHOOL IN A PROCESS OF CONTINUED FORMATION ON CONTENT AND METHODOLOGIES

ABSTRACT: Report of a case study of ethnographic type having as object a continuum education course for teachers called "Café com Matemática". It seeks to answer the guiding question: What representations emerge from 4th and 5th grade teachers of Elementary Education during a continuum education course on teaching of Mathematics? The research main objective is to describe and analyze the representations that emerged from teachers working in Jaguaré-ES immersed in a process of continuous formation in Mathematics. Its theoretical foundations are the assumptions of Cultural History, the concepts of representation, practice and appropriation of Roger Chartier, as well as the strategies and tactics of Michel de Certeau. Establishes a dialogue on school culture according to Dominique Julia. It uses for data collection a questionnaire and participant observation. The analysis of the collected data is done throught categorization. From the analysis of data it was elabotated the following categories of representations: Representation for the teaching of mathematics; Representation for continuing education courses; Representation on student assessment; Representation on the teaching profession. General conclusions about the research subjects: they understand the teacher as a mere transmitter of knowledge; they teach in the way they learned in childhood and adolescence at school, seeking to meet school curricula and external tests without realizing their didactic autonomy; present insecurity on how to evaluate students; from continuing education courses they expect ready models of activities to apply in the classroom, although recognize that it provides also an opportunity to reflect on teaching practice.
KEYWORDS: Mathematical Education, Elementary school, Ethnographic case study.

CAFÉ COM MATEMÁTICA: REPRESENTAÇÕES DE PROFESSORES DO 4º E 5º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL NUM PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA SOBRE CONTEÚDOS E METODOLOGIAS

A quantidade e qualidade dos professores são fundamentais para que o Brasil possa realizar uma educação básica satisfatória, mas o fato histórico é que

> Não é de hoje que enfrentamos dificuldades em ter professores habilitados para cobrir as demandas da população escolarizável, dificuldades para oferecer uma formação sólida, e, também, recursos suficientes para dar a eles condições de trabalho e remuneração adequadas. É um dos traços persistentes e problemáticos em nossa história (GATTI, 2019, p.20).

Assim, as demandas por formação inicial e continuada de professores ainda são prementes e desafiadoras, especialmente no que diz respeito às licenciaturas:

> Continua sendo um desafio, no contexto dos cursos de licenciatura, desenhar um currículo formativo, que contemple, de forma equilibrada e coesa, as dimensões política, ética, humana, estética, técnica e cultural. E, ainda, que prepare o futuro professor para o exercício da docência em contextos favorecidos, ou não, visando a atender à diversidade de necessidades de todos os alunos e, assim, promover uma educação inclusiva. Já no âmbito da

> formação continuada, há que se considerar a descontinuidade de programas e a ausência de oferta de formação continuada que levem em conta as etapas da vida profissional dos docentes, de políticas que formem e fortaleçam, em conjunto, o corpo docente e a equipe gestora (diretores e coordenadores pedagógicos) (GATTI, 2019, pp.177-8).

Naturalmente, a necessidade da formação continuada de professores pode ser percebida diretamente pelos gestores da educação nos estados e município do Brasil e isso deveria gerar iniciativas regionais ou locais focadas nos seus problemas específicos. Foi assim que a Secretaria Municipal de Educação (Semec) do município de Jaguaré-ES juntou-se ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (PPGEEB) da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes) para conceber e realizar um curso de formação continuada para professores de matemática no ano de 2018, visando dirimir as deficiências que haviam sido identificadas pelos gestores. Essa experiência constituiu objeto de um projeto de pesquisa de mestrado e vem a ser o tema deste relato, que apresenta dados empíricos e considerações teóricas para reflexão sobre a formação inicial e continuada de professores.

O curso foi chamado "Café com Matemática" para destacar a disciplina que estaria no foco da formação e chamar atenção para o principal produto agrícola do município, bem como para sugerir aos eventuais participantes o modo como seriam conduzidos os trabalhos: encontros em que, além dos seminários temáticos, haveria oportunidade para discussão espontânea com os formadores e colegas sobre tópicos pertinentes ao ensino.

O público-alvo e os conteúdos específicos a serem abordados no curso foram decididos em reuniões entre os pesquisadores e a equipe pedagógica da SEMEC. Foram apontadas frequentes dificuldades no ensino de Matemática do 1.° ao 5.° ano do Ensino Fundamental, mas como os professores do 1.° a 3.º ano já haviam participado recentemente de uma formação continuada proporcionada pelo Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), ficou decidido que o curso deveria focar os professores do 4.° e 5.° anos e nos temas matemáticos que a Secretaria havia apurado como os mais problemáticos para os pedagogos ensinarem: as quatro operações, o tratamento da informação (leitura e análise de gráficos), o sistema de medidas, o sistema monetário e a Geometria.

A partir dessas condições, planejamos, articulamos e desenvolvemos uma formação continuada em Matemática para professores do 4.º e do 5.º ano do Ensino Fundamental atuantes no município de Jaguaré.

Foram realizados vinte encontros ao longo do período de maio a outubro de 2018, que consistiram em apresentações, geralmente, com utilização de *slides*, de conteúdos matemáticos dos quatro blocos elencados pelo currículo escolar: Números e operações, Geometria, Grandezas e medidas e Tratamento da informação. Cada um dos encontros ocorreu em duas etapas divididas por um intervalo; em geral, a primeira etapa era dedicada ao tratando teórico dos conteúdos, enquanto a segunda focava propostas metodológicas para abordagem em sala de aula.

A pesquisa realizada sobre o curso constituiu um *estudo de caso etnográfico* tendo como questão norteadora: *Que representações de professores do 4.º e do 5.º ano do Ensino Fundamental emergem de um processo de formação continuada em Matemática?*

Ao nos referirmos às representações, assumimos os pressupostos da História Cultural, trazendo para discussão e análise o conceito de representação considerado por Chartier (2002). Nesse âmbito, entendemos que *representações são percepções do social sobre a realidade expressas nas comunicações, nos comportamentos e nas práticas.* Assim, apesar de serem percepções únicas de cada sujeito, as representações estão condicionadas a uma estrutura fornecida por um grupo social.

Conhecer as representações contribui para compreender os professores, inferir o que sabem a respeito das questões propostas e, a partir disso, conhecer suas aspirações e necessidades. Além disso, o cenário de formação continuada, possibilita o confronto com outras representações, as quais promovem reflexões sobre as práticas educacionais.

Delineamos, então, como objetivo geral deste estudo: *Descrever e analisar as representações que emergem de professores atuantes no 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental, no município de Jaguaré-ES, quando imersos num processo de formação continuada em Matemática.*

Para isso, traçamos como objetivos específicos da pesquisa:

a) elencar as adversidades da prática pedagógica evidenciadas pelos professores do 4.º e 5.º anos que precisam trabalhar com Matemática;

b) constatar potencialidades didático metodológicas do ensino de Matemática no Ensino Fundamental;

c) planejar e executar o curso de formação continuada de modo que favoreça a emergência das representações, instigando os professores a discutir e refletir sobre os quatro blocos de conteúdos da Matemática que fazem parte do currículo do 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental: Números e operações, Grandezas e medidas, Tratamento da informação e Geometria.

ALGUNS PRESUPOSTOS DA HISTÓRIA CULTURAL

Chartier (2002), em sua obra "A História Cultural: entre práticas e representações", traz conceitos importantes que nos ajudam a analisar as representações emersas no curso de formação continuada que desenvolvemos. "A história cultural, tal como a entendemos, tem por principal objecto identificar o modo como em diferentes lugares e momentos uma determinada realidade social é construída, pensada, dada a ler" (CHARTIER, 2002, p. 16-17). Ou seja, considerando o que nos apresenta o autor, a História Cultural possibilita-nos um caminho para realizar a tarefa de identificar o modo como é delimitada a apreensão da realidade de um determinado grupo social.

À História Cultural cabe, portanto, buscar entender as significações das práticas cotidianas de um dado grupo, num determinado momento, pois todos vemos o mundo, os fatos e as situações do nosso contexto social a partir de certa ótica, que pressupõe a construção de representações. Essas formas de ver e perceber a realidade são decorrentes da própria história pessoal de cada sujeito, imerso numa visão do grupo social do qual faz parte. Suas representações são "esquemas intelectuais incorporados que criam as figuras gracas as quais o presente pode adquirir sentido, o outro tornar-se inteligível e o espaço ser decifrado" (CHARTIER, 2002, p.17).

> As representações do mundo social assim construídas, embora aspirem à universalidade de um diagnóstico fundado na razão, são sempre determinadas pelos interesses de grupo que as forjam. Daí, para cada caso, o necessário relacionamento dos discursos proferidos com a posição de quem os utiliza (CHARTIER, 2002, p. 17).

Tendo em vista que as representações são determinadas pelo interesse daqueles que as concebem e que um processo de formação envolve vários sujeitos, neste caso específico cursistas, formadores, articuladores da formação continuada, é fundamental essa reflexão a respeito das representações que surgem durante esse processo.

Entendemos que os discursos proferidos na vivência de um grupo social apontam intencionalidades; não são neutros, produzindo práticas que visam impor autoridade.

> As percepções do social não são de forma alguns discursos neutros: produzem estratégias e práticas (sociais, escolares, politicas) que tendem a impor uma autoridade à custa de outros, por elas menosprezados, a legitimar um projecto reformador ou a justificar, para os próprios indivíduos, as suas escolhas e condutas. Por isso esta investigação sobre as representações supõe-nas como estando sempre colocadas num campo de concorrências e de competições cujos desafios se enunciam em termos de poder e de dominação. As lutas de representações rem tanta importância como as lutas econômicas para compreender os mecanismos pelos quais um grupo impõe ou tenta impor, a sua concepção do mundo social, os valores que são os seus, e o seu domínio. (CHARTIER, 2002, p. 17).

Nesse sentido, para Chartier (2002), a História Cultural incide seu olhar sobre as relações que atribuem a cada grupo a constituição de sua identidade. O autor ressalta que as representações vão muito além da ação da imaginação, permitindo articular três modalidades: classificação, práticas e formas institucionalizadas. A classificação consiste na identificação das partes em relação ao todo; as práticas são as condutas que visam exibir uma maneira própria de identidade social; as formas institucionalizadas caracterizam-se pelas identificações de uma determinada classe, que perduram e marcam a existência de um grupo.

Sendo assim, compreendemos *representações* como as percepções do mundo social expressas por discursos de um sujeito ou grupo, produzindo estratégias e práticas que não são neutras e tendem a exercer uma autoridade sobre outros, justificando e legitimando suas escolhas e condutas, investidas com seus interesses, e estabelecendo relações de poder. E uma vez que as representações são consideradas as "formas de ver" a realidade, as práticas são, então, “as formas de fazer”, estando no centro desse processo a apropriação incorporada ao sujeito, a partir de suas experiências e percepções do real.

Nesse contexto, pensamos nossa investigação a partir da observação dos encontros de formação, das narrativas dos cursistas durante os encontros, das conversas individuais nos momentos de confraternização, dos registros escritos, das respostas aos questionários, de tudo aquilo, enfim, que obtivemos nesses meses de encontros semanais, objetivando capturar as representações surgidas ao longo do processo de formação continuada em Matemática. Cada participante do processo de formação expressa em seus discursos representações que o caracterizam como parte do grupo social.

Refletir sobre as representações, práticas e apropriações conduz-nos ao repertório, ao imaginário e às emoções do sujeito. Segundo De Certeau (1994), os elementos de um sujeito são inseparáveis do contexto social no qual está inserido. Nesse sentido, é necessário compreender dois níveis de comportamento específicos no campo da ação: o estratégico e o tático. As estratégias partem do sujeito ou instituição que detém uma autoridade, e seus produtos determinam forças de dominação. Já as táticas são ações surgidas da necessidade do sujeito condicionado à dominação, trabalhando com o que lhe é oferecido, atrás de uma aparente conformidade.

As interações cotidianas que ocorrem no ambiente escolar repercutem nos sujeitos e impactam as diferentes formas de os professores se ajustarem às normas que lhes são impostas, reorganizando o cotidiano e suas práticas e características de uma cultura escolar.

Julia (2001) procura fornecer subsídios para o estudo da cultura escolar. Indica que é preciso compreender as relações conflituosas que ela mantém com o conjunto de culturas que lhe são contemporâneas: cultura religiosa, cultura política ou cultura popular. A cultura escolar, como objeto histórico, é assim definida por Julia (2001, p.10):

> Conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (finalidades religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de socialização).

Nesse sentido, as normas determinadas, o papel esperado desempenhado pelo professor, os conteúdos a serem ensinados e as práticas escolares perpetuadas fazem parte da cultura escolar.

No que concerne ao grupo de participantes da formação “Café com Matemática”, precisamos considerar que são sujeitos inseridos numa determinada cultura escolar, de onde advém um conjunto de normas e práticas consolidadas ao longo do tempo, que lhes impõe modos de pensar e atuar por discursos e ações, que, junto com a experiência profissional e a formação docente, se tornam referências para realizar o trabalho diário. Entendemos que, nos discursos proferidos durante a formação continuada, foi socializada com o grupo a representação da cultura que esses profissionais vivenciam nas escolas em que trabalham.

PERCURSOS DA PESQUISA: UM ESTUDO DE CASO ETNOGRÁFICO

A pesquisa oportuniza a compreensão da realidade a investigar. Segundo Fonseca (2002), consiste num processo inacabado de busca constante, fornecendo possibilidades de uma intervenção no real. Para isso, faz-se necessária a metodologia da pesquisa que, além da organização dos procedimentos, métodos e técnicas utilizadas, é o caminho a ser percorrido pelo pesquisador para abordar o objeto de estudo e fazer ciência.

Quanto à abordagem, este estudo compreende uma pesquisa qualitativa, pois se ocupa da observação, descrição e análise de um ambiente de formação continuada em Matemática e das representações demonstradas por um grupo social composto por professores do Ensino Fundamental do município de Jaguaré-ES.

Em relação aos procedimentos técnicos, esta pesquisa se enquadra na característica de um estudo de caso, pois a investigação acomoda as particularidades de um caso específico, cujo objetivo é analisar as representações de um grupo social composto por professores e pedagogos atuantes no Ensino Fundamental, acerca da Matemática e suas metodologias de ensino, num processo de formação continuada.

Segundo Gil (2007), realizar um estudo de caso consiste em investigar um ou poucos objetos, de modo a se obter um amplo e detalhado conhecimento sobre eles. Assim, delimitamos os sujeitos da pesquisa como um grupo bem determinado, o grupo de professores cursistas, sobre o qual coletamos uma grande diversidade de dados e, a partir daí, elegemos quatro categorias para realizar detalhada e exaustiva análise.

Considerando que nosso estudo de caso envolve um ambiente educacional e emprega elementos da etnografia, optamos, ainda, por enquadrá-lo mais restritamente como *estudo de caso etnográfico.*

> [...] podemos dizer que o estudo de caso etnográfico deve ser usado: (1) quando se está interessado numa instância em particular, isto é, numa determinada instituição, numa pessoa ou num específico programa ou currículo; (2) quando se deseja conhecer profundamente essa instância particular em sua complexidade e em sua totalidade; (3) quando se estiver mais interessado naquilo que está ocorrendo e no como está ocorrendo do que nos seus resultados; (4) quando se busca descobrir novas hipóteses teóricas, novas relações, novos conceitos sobre um determinado fenômeno; e (5) quando se quer retratar o dinamismo de uma situação numa forma muito próxima do seu acontecer natural (ANDRÉ, 2000, p. 44).

André (2000) acrescenta que a pesquisa etnográfica envolve um trabalho de campo, num período que varia de semanas, meses ou até anos, em que o pesquisador se aproxima de pessoas, situações, locais, eventos, mantendo com eles um contato direto e prolongado, observando-os em sua maneira natural. Nesse tipo de pesquisa, o pesquisador é agente da coleta e da análise de dados qualitativos, razão pela qual

> [...] precisa antes de tudo ter uma enorme tolerância à ambiguidade, isto é, saber conviver com as dúvidas e incertezas que são inerentes a essa abordagem de pesquisa. Ele tem que aceitar um esquema de trabalho aberto e flexível, em que as decisões são tomadas na medida e no momento em que se fazem necessárias. Não existem normas prontas sobre como proceder em cada situação específica, e os critérios para seguir essa ou aquela direção são geralmente muito pouco óbvios (ANDRÉ, 2000, p. 51).

Para coleta de dados empregamos a observação participante, seguida de registros no diário de bordo, e também um questionário, aplicado a todos os participantes do curso realizado para identificação inicial dos sujeitos da pesquisa e suas expectativas em relação ao curso de formação continuada, bem como para um diagnóstico sobre os conteúdos matemáticos e práticas escolares desenvolvidos na escola e para obter dados que, em conjunto com a observação participante, poderiam ajudar-nos na interpretação das representações dos professores que emergiriam na formação.

Sobre a análise dos dados num estudo de caso etnográfico, cabe ressaltar que

> [...] as decisões sobre como analisar e apresentar os dados também não podem ser predeterminadas, a não ser em linhas bem gerais. É com base na forma como a pesquisa vai se desenvolvendo e em decorrência dela que essas decisões vão ficando mais claras (ANDRÉ, 2000, p. 52).

Cientes dessas dificuldades submetemos as informações coletadas aos seguintes passos, visando garantir a objetividade de nossas análises: redução, categorização e interpretação dos dados da pesquisa. A redução configura-se na simplificação dos dados, resultado de uma seleção. A categorização consiste na organização dos dados, agrupados de forma que o pesquisador possa extrair conclusões relevantes ao seu estudo. Finalizando, a interpretação busca suscitar novos questionamentos e inferir conclusões acerca dos dados eleitos (GIL, 2007). Cabe esclarecer que o curso de formação continuada “Café com Matemática” contou com 43 participantes e consistiu de vinte encontros realizados no auditório da Semec/Jaguaré entre os meses de maio a outubro de 2018. Os encontros foram conduzidos por colaboradores voluntários chamados aqui formadores, em sua maioria professores da Ufes e egressos do PPPGEEB.

O grupo assim constituído era heterogêneo, pois apresentava uma diversidade de pessoas, profissionais de diferentes escolas do município, cada um com sua cultura própria, vivenciada no cotidiano escolar e representada nos discursos dos cursistas durante esse período de convivência.

Os integrantes da formação continuada que frequentaram o curso eram professores atuantes em Escolas Municipais de Educação Infantil e Ensino Fundamental (EMEIEFs), Escolas Municipais de Ensino Fundamental (EMEFs), Escolas Pluridocentes Municipais

(EPMs) e em um colégio, conforme listados na Tabela 1. Não participaram do curso professores de Escolas Unidocentes Municipais (EUM).[1]

De acordo com os dados levantados, no que se refere à formação acadêmica e à experiência docente, quinze participantes disseram ter formação superior: licenciatura plena em Pedagogia. Todos, no momento, trabalhavam com turmas de 4.º e/ou 5.º ano como professores ou como pedagogos, ou, ainda, na sala de recursos, com carga horária mínima de 25 horas, auxiliando alunos com necessidades especiais. Dezoito afirmaram ser pós-graduados.

RESULTADOS: REPRESENTAÇÕES QUE EMERGIRAM DA FORMAÇÃO CONTINUADA "CAFÉ COM MATEMÁTICA"

Durante os encontros da formação continuada, observamos a existência de elementos que se evidenciavam pela frequência com que emergiam e pela relevância que lhes atribuíam os sujeitos participantes da pesquisa, de modo que puderam ser classificados e reagrupados segundo critérios de diferenciação. Em cada dia, as discussões ocorreram tanto durante as aulas quanto num período de intervalo, em que os professores formadores e cursistas podiam relaxar, lanchar e conversar informalmente numa sala anexa ao auditório. Esses intervalos permitiram aos cursistas e formadores continuarem a troca de ideias acerca do que estava sendo abordado na aula. Foi como observaram Silva, Sarrazina e Campos (2014, p.1521):

> Foi na interação, na troca de experiências, na dúvida tirada na porta da sala, no corredor ou mesmo no cafezinho que se garantiu que todos experimentassem imprimir uma nova abordagem ao tema. Isso oportunizou um entendimento maior de questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da representação fracionária dos números racionais. A fim de preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa e também dos formadores, no que segue usaremos as iniciais dos seus nomes em nossas referências a eles.

Assim, o curso Café com Matemática realizou plenamente a intenção inicial de prover um espaço e momento para interação informal entre os professores formadores e cursistas.

REPRESENTAÇÃO DOS PROFESSORES CURSISTAS SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

Os professores cursistas evidenciaram, em diversos momentos, sua representação sobre o ensino de Matemática, expressando em seus relatos, de forma marcante e frequente, que ensinam a disciplina conforme o modelo aprendido quando eram estudantes. Isso é ilustrado na fala da cursista RK, recortada do diário de bordo: "*Geralmente, do 1.º ao 5.º ano, a gente ensina como aprendeu; não aprendemos nada disso na faculdade*".

---

1. Escolas unidocentes têm suas turmas atendidas por um único professor, sendo tipicamente aquelas voltadas exclusivamente para o Ensino Fundamental I. Escolas pluridocentes são aquelas que possuem turmas atendidas por diversos professores.

Essa representação está atrelada à crítica da formação para o magistério, realizada em diversos momentos pelos professores. Existe uma deficiência na formação inicial do professor que, ao não encontrar subsídios suficientes na graduação, reproduz o modelo de ensino de sua época escolar.

Ao realizar o ensino de Matemática pelo modelo vivenciado na infância escolar, os professores aceitam passivamente a prática didática de seus antigos professores, reproduzindo seus discursos com seus próprios alunos. Observamos um diálogo sobre alguns termos comumente utilizados em aulas de Matemática e refletidos com os cursistas pela formadora RG. Ela explicitou o sentido oculto presente na expressão "*pega um emprestado* e *vai um*". A cursista ES expressou: "[...] *nunca tinha pensado assim; sempre ensinei da forma como aprendi quando era criança*". Tal manifestação evidencia o que acontece com muitos professores que ensinam sem questionamentos, colocando-se passivos diante do conhecimento, até então inquestionável, trazido desde a infância escolar.

Observamos em alguns cursistas os anseios por mudanças a partir do contato com a nova interpretação trazida pela formadora, que propôs estabelecer questionamentos sobre a prática docente. No entanto, apesar de demonstrarem disposição para repensar a prática profissional, destacaram a dificuldade presente na mudança, conforme observamos nas falas da cursista ES, "*Vou tentar mudar com meus alunos*", e da cursista DL, "*Vai ser difícil não dizer.* [...] *Já está em nós*".

A fala da cursista ES, mencionada acima, exemplifica o desejo evidente dos professores participantes em aperfeiçoar sua prática e a preocupação com a aprendizagem dos estudantes. Mas, ao mesmo tempo, evidencia a passividade que existia até então diante da prática de ensino, que se apresentava pronta e era vista como inquestionável. O professor ensina, mesmo sem entender o sentido da operação que está realizando, mas apenas reproduzindo o discurso dos seus mestres, perpetuados ao longo do tempo.

Quanto às metodologias e instrumentos didáticos utilizados pelos professores no ensino de Matemática, a prioridade dada à utilização do livro didático e à explicação oral nos remete à representação de ensinar Matemática como faziam os antigos mestres, num modelo aprendido quando eram estudantes. A fala da cursista JC ilustra esse fato: "*Acabamos ficando muito no livro didático*".

O professor deve ter criticidade ao utilizar o livro didático. É importante o professor refletir sobre questões tais como: Os conceitos estão corretos? Estão adequados? Os exercícios ajudam o aluno a pensar, compreender os conceitos estudados e desenvolver o raciocínio crítico?

Associada ao uso do livro didático, temos a oralidade, que, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), é uma metodologia comumente utilizada no ensino de Matemática no país, em que o docente expõe o conteúdo oralmente e apresenta definições, exemplos, propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação. Uma da cursista GB, corroborada pela cursista NL, esclarece que normalmente o professor acaba ficando muito no "*cuspe e giz*", subentendendo a necessidade de se buscar variar as práticas de ensino.

No tocante ao ensino de Matemática, variadas metodologias são possíveis. As diversas tendências no campo da educação matemática permitem reflexões sobre como oportunizar um processo de ensino e aprendizagem com qualidade, por meio de diversificadas metodologias de ensino. Apesar de darmos ênfase às diversas metodologias para o ensino de Matemática, sabemos que nem sempre é tarefa simples aplicá-las.

Os crescentes avanços tecnológicos devem refletir-se no ambiente escolar. Os PCN (BRASIL, 1998, p. 147) incentivam a utilização de recursos tecnológicos, ao afirmarem que a informática na educação "[...] permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender". Observamos que os professores valorizam a utilização de recursos tecnológicos, buscam utilizar o laboratório de informática da escola, mas enfrentam limitações, entre as quais está a própria insuficiência do número de computadores disponíveis e falta de formação ou preparo para lidar com os recursos tecnológicos.

Os professores usam diversos recursos didáticos, mas não tanto quanto gostariam/poderiam, devido, especialmente, à bagunça que isso pode provocar no ambiente escolar, o que pode ser mal visto pela gestão escolar. Tal uso, por causar uma configuração diferente da que é comum na sala de aula, agitação nos estudantes e barulho, pode deixar transparecer que o professor não tem domínio sobre a turma, quando, na verdade, isso faz parte do processo do jogo. O recorte da fala da cursista MA evidência esse fato: "*A bagunça causa preocupação e usamos isso para cair na rotina, queremos os alunos sempre quietos, pois somos julgados por não ter domínio de turma".*

Nos encontros envolvendo oficinas e jogos, os cursistas se mostraram mais atentos e empolgados, retornando posteriormente com relatos e fotos da aplicação em sala de aula das atividades propostas na formação, destacando as reações positivas dos alunos durante suas aulas. Isso aponta para a representação dos professores sobre a formação continuada como espaço de troca de experiências e aprendizado de atividades prontas para aplicação na sala de aula. Realmente, a utilização de jogos assume relevância no campo da educação matemática, já que inteligência é amplamente estimulada e a linguagem se torna mais rica mediante a aquisição de novas formas de expressão possibilitadas pelos jogos (BRASIL, 1997; 1998). Em sua pesquisa, Silva, Sarrazina e Campos (2020, p.1521) também observaram que "[…] os professores enfatizaram a utilização da literatura infantil e materiais manipuláveis, como meios possíveis de contextualizar uma situação".

Além disso, percebemos que os agentes externos ao trabalho docente, como currículo, RCNEI, PCN e as avaliações externas, podem interferir no desenvolvimento das práticas pedagógicas e na atuação do professor ao ensinar Matemática. A esse respeito, os professores expressaram que julgam necessária essa interferência, devido ao fato de nortear os trabalhos docentes, mas, frequentemente, questionam a necessidade da listagem extensa de conteúdos. "*Eu gosto de Matemática. O que eu não entendo é ter que ensinar tantas coisas que estão no currículo, que eu não vejo necessidade*", afirmou a cursista RK.

Silva (1996, p. 23) nos alerta: "O currículo é um dos locais privilegiados onde se entrecruzam saber e poder, representação e domínio, discurso e regulação". Sendo assim, o currículo corporifica relações sociais, imbricado em relações de poder de um sistema educativo dominante, e não é um elemento neutro de transmissão do conhecimento social. Desse modo, o currículo pode representar um instrumento limitante ao trabalho docente. Cabe ao professor agir taticamente para adaptá-lo à realidade da sala de aula.

A representação dos professores sobre Matemática, expressa durante o curso de formação, é que se trata de uma disciplina que, apesar de importante, é complexa e seletiva. Isso implica, diretamente, o ensino da disciplina, pois, por ser considerada difícil de compreender, também se torna mais difícil de ensinar. Ao se referirem à Matemática, os cursistas utilizam termos como "*bicho de sete cabeças*", como nas falas das cursistas KA e DL. Isso é uma representação da Matemática, num contexto de uma cultura escolar, que associa à Matemática características monstruosas e assustadoras.

Observamos, em falas como as referenciadas acima, que os docentes expressam suas impressões arraigadas sobre o que seja Matemática, seu ensino e sua aprendizagem muitas vezes formadas a partir de marcas profundas de sentimentos negativos em relação a essa disciplina. Isso pode interferir no interesse em aprender e ensinar e, consequentemente, na prática profissional. Serres (2017, p. 44) defende: "O modo como uma professora ensina traz subjacente a ele a concepção que ela tem de matemática, de ensino e de aprendizagem".

Percebemos nas falas que as contribuições teóricas e metodológicas da formação possibilitaram a reflexão e a tentativa em transformar a representação negativa acerca da Matemática, que, historicamente, levou muitos desses professores a terem dificuldades ou desconforto com a aprendizagem e com o ensino da disciplina no exercício da profissão. Desse modo, a partir da reflexão promovida na formação, eles puderam perceber a Matemática mais acessível e interessante de se ensinar.

REPRESENTAÇÃO DOS PROFESSORES CURSISTAS SOBRE A FORMAÇÃO CONTINUADA

No início da formação, percebemos que a principal motivação para muitos dos professores cursistas foi realizar um curso que proporcionasse maior competitividade no mercado de trabalho e/ou vantagem salarial. Para os docentes efetivos ou temporários das instituições públicas de ensino, interpretamos que a participação em cursos de formação continuada constitui uma tática frente ao fato de que os governos têm estabelecido critérios para promoção na carreira que vinculam aumentos salariais a realização de cursos de pós-graduação. Ainda que tal perspectiva possa não ter se extinguido ao longo da formação Café com Matemática, presumimos que ela não comprometeu diretamente o aproveitamento, uma vez que verificamos tanto a participação efetiva dos docentes nas atividades quanto observar a emergência de outras representações, inclusive da mudança de opinião sobre as possibilidades da formação continuada.

Notamos também que os professores cursistas aspiravam por modelos de atividades que tornassem suas aulas mais criativas e dinâmicas pelas manifestações de satisfação quando os professores formadores apresentavam atividades didáticas que poderiam ser aplicadas em sala de aula para o ensino dos tópicos abordados. Exemplifica a fala do cursista JC: "*Este foi o primeiro curso que eu gostei realmente, com atividades que realmente podemos aplicar na sala de aula".* A cursista RL pôde aplicar uma das atividades propostas em uma de suas turmas e seu depoimento evidencia como isso afetou sua autoimagem: "*Me senti uma professora criativa!"*.

Mesmo afirmando a necessidade de adquirir aprofundamento nos conhecimentos matemáticos, contraditoriamente ficavam insatisfeitos com os encontros que apresentavam maior teorização. "Para muitos professores, a teoria é entendida como algo utópico e distante de sua realidade, sendo rejeitada por muitos que passam a valorizar apenas suas experiências práticas, afastando-se das reflexões filosóficas críticas que as teorias poderiam possibilitar" (OLIVEIRA, 2014, p. 59). Na avaliação do curso pelos cursistas, observamos indícios disso na fala da cursista NL: "[...] *quando eram aulas práticas todos se envolveram mais. Algumas aulas teóricas foram cansativas e algumas vezes desnecessárias"*. Serres (2017, p. 49) destaca que é preciso tomar consciência de que não basta conhecer uma diversidade de atividades para aplicar em sala, "[...] é necessário que este professor tenha um domínio conceitual da matemática que vai ensinar".

A representação da formação continuada constituiu-se, também, como espaço de trocas de experiências – o que é natural, dado que os professores detêm um saber profissional. Este recorte de uma fala da cursista DS em sua avaliação do curso exemplifica isso: "*Muitas atividades propostas no curso eu já conhecia. Outras coisas foram completamente novas* [...]". Essa representação corrobora a constatação de Silva, Serrazina e Campos (2014, p.1521) de que "a reflexão permitiu, além do avanço na compreensão do objeto matemático, o aprimoramento da análise de questões relacionadas ao ensino e aprendizagem que não haviam sido discutidas até então". Embora possamos esperar que os cursos de formação continuada considerem e valorizem contribuições dos professores lapidados pela prática, "[...] alguns cursos de formação desconsideram os saberes já construídos pelos professores" (BOZZA, 2017, p. 32). Oliveira (2014, p. 65) corrobora essa posição, defendendo a reflexão sobre a prática docente nos processos de formação: "A formação docente é assunto amplo e complexo. No entanto, acreditamos que pensar a formação a partir da perspectiva da reflexão crítica da prática docente pode contribuir para o desenvolvimento profissional e para a qualidade da educação".

A representação trazida pelos formadores durante o processo de formação foi de promoção de mudanças de postura perante o ensino e colocou o professor como agente reflexivo e autônomo, questionador dos conhecimentos que ensina e para que ensina. A partir do contato com essa nova representação proposta no curso, constatamos que a representação inicial, de que seria apenas mais um curso para obter certificação, se modificou para a maioria ao longo do processo da formação, como ilustra a fala da cursista MC: "*Valeu muita a pena, porque alcançamos mudanças importantes. Isso refletiu na sala de aula"*. Outra fala que demonstrou a mudança advinda do contato com o curso foi a da cursista KA, ao afirmar que "*Ninguém vai sair daqui da mesma forma que entrou!"*. Essas manifestações mostram que os cursistas compreenderam que a formação continuada pode ser um espaço de aprendizagens e transformações, a partir da reflexão da prática profissional.

Nesse contexto, os professores indicaram que a formação continuada completou sua formação inicial, conforme ilustra a fala da cursista RL: "*Aprendi tantas coisas... não tive nada disso na minha graduação em Pedagogia*". Também destacamos a fala da cursista MM, na qual tanto exprime sua dificuldade com frações quanto mostra que o processo de formação proporcionou reflexões mais amplas: "*Comecei o curso porque sinto dificuldade em ensinar frações, mas, no processo, comecei a voltar meu olhar de outra forma para a Matemática"*.

REPRESENTAÇÃO DOS PROFESSORES CURSISTAS SOBRE AVALIAÇÃO DOS ALUNOS

Quanta à avaliação, tema que emergiu com muita naturalidade e frequência durante os encontros de formação, ficou evidente que é representada como o instrumento de verificação do aprendizado dos estudantes. Os professores cursistas expressaram muitas dúvidas quanto à avaliação dos alunos e levantaram questionamentos, mesmo quando o formador não propunha a discussão sobre o tema.

Observamos que não existia plena consciência da autonomia do papel do professor entre os cursistas, que queriam dos formadores modelos de conduta adequados, indicações de respostas sobre o que é certo ou errado. Além disso, demonstraram em suas falas evidente preocupação quanto ao desempenho dos alunos em provas externas.

As dúvidas com relação ao processo de avaliação surgiram em diversos momentos da formação continuada, como ilustra esta fala da cursista RK: *"*[...] *quando um aluno interpreta corretamente, mas calcula errado, por exemplo, devo considerar certo ou errado?*". Como podemos notar, os cursistas esperavam dos formadores repostas sobre o que era certo ou errado, indicação da conduta correta a seguir.

O recorte da fala da cursista ES, *"Eu, antes do curso, se o aluno errasse a resposta final do exercício, não considerava nada certo. Mas, pensando melhor, se o aluno fez* *parte correta, ele merece parte do acerto",* indica que o curso de formação continuada se desenvolveu como espaço de reflexão, onde os cursistas tiveram oportunidade de avaliar suas práticas e encontrar-se com novas representações.

A representação da avaliação como instrumento de aprendizado, em que a produção do aluno deve ser valorizada e o erro considerado como parte importante do processo, foi confrontada, em diversos momentos, devido à necessidade de preparar o estudante para avaliações externas, como podemos identificar na fala da cursista EB: "*Eu estabeleço critérios: um acerto para o desenvolvimento e um acerto para o resultado. Fica mais didático para explicar para a família e para o próprio aluno. Mas minha preocupação é que, no vestibular, isso não funciona assim. É muito contraditório!*". Neste momento, podemos também trazer o questionamento da palestrante LB, "*Mas o papel da escola é somente preparar o aluno para o vestibular?"*.

Cabe-nos refletir uma questão: seria esse o papel da escola: treinar os estudantes para fazer avaliações?

Bozza (2017, p. 35), por sua vez, defende: "O objetivo da escola é formar pessoas que usem seus conhecimentos com igualdade na sociedade".

Oliveira (2014, p. 20) defende a necessidade de "[...] debater o papel da escola para a construção dos conhecimentos científicos e para a formação humana e, ao compreender o ato de aprender como uma condição de desenvolvimento da humanidade [...]", para avaliar se ela está cumprindo devidamente suas finalidades.

Além disso, essa visão que objetiva treinar os estudantes para avaliações externas, ao repudiar o erro não o considera como constituinte na construção do conhecimento matemático. Entretanto, ao pensarmos o processo como a Matemática se desenvolve ao longo do tempo, observamos que muitos trabalhos dos matemáticos consistem em investigações, que não são traçadas apenas pelos acertos.

O ato de investigar é atribuído ao pesquisador, e a curiosidade por solucionar problemas pode ser o gatilho inicial. Mas o caminho próprio da pesquisa matemática, que é uma tarefa árdua, pode levar a descobertas de relações entre objetos matemáticos e à percepção de padrões surpreendentes, muitos deles provenientes de erros. Ao observar uma teoria pronta, não vemos o longo caminho de erros que foi preciso percorrer para que ela fosse obtida: os erros tornam-se parte do processo.

Nesse contexto, percebemos o sentido pejorativo atribuído aos erros dos alunos, pois, se o objetivo é obter êxito nas provas externas, os erros são indesejados e causam frustrações. É o que demonstra a falas da cursista JB, "*O estudante precisa entender que, para um problema ser resolvido, é preciso que o resultado seja o esperado"*. Já a cursista EB relata sua frustração quando estudante com o rigor sobre seus erros: *"Eu vivi isso no Ensino Médio e fiquei frustrada! Errava um sinal, errava tudo!"*.

Assim, a representação dos professores cursistas sobre avaliação caracterizou-se por buscar que os formadores apresentassem orientações sobre o que está certo ou errado com relação à avaliação da aprendizagem dos alunos, evidenciando a preocupação frequente com o conflito: preparar o estudante para provas externas *versus* valorizar a produção dos estudantes.

REPRESENTAÇÃO DOS PROFESSORES CURSISTAS SOBRE A PROFISSÃO

Os dados da pesquisa mostraram que os cursistas representam o professor como detentor do saber, transmissor de conhecimento, responsável pelo aprendizado do aluno e alguém que não pode errar enquanto ensina.

Com o curso de formação, percebemos que houve o contato dos professores com uma nova representação sobre a profissão docente, na qual o professor é visto como um pesquisador, como alguém que detém autonomia nas ações. A partir daí, deu-se a apropriação desse discurso, como podemos notar na fala da professora NL: "*A formação é importante, o professor deve ser pesquisador, nós temos que estar atentos às inovações".*

Percebemos que os professores se sentiram estimulados a pesquisar e a buscar sair do tradicionalismo. A cursista DS deixa claro isso: "*O curso estimulou a colocar em prática os conhecimentos que temos e a buscar outros materiais. Comecei a usar mais a biblioteca, a internet. Sai da zona de conforto*".

Com frequência, os cursistas relataram que se sentiam realizados quando testavam uma atividade e percebiam que os alunos se interessavam. Desejavam que o aluno tivesse um "*brilho no olhar*" ao aprender, expressão utilizada pela professora RK em sua fala.

A cursista SO, assim como diversos outros professores do curso, deixou claro no questionário o quanto gosta de sua profissão: "*Eu amo o que eu faço, me identifico muito, quero sempre dar o melhor para os meus alunos. É muito gratificante ser professora!".* Os professores chegavam a dizer que "[...] *ensinar é um dom",* expressão utilizada pela cursista DS na mesma seção. Diante dessa fala, questionamos: Se é um dom, não seria um ofício capaz de ser aprendido? Acreditamos que existam características do sujeito que podem facilitar ou dificultar o exercício da profissão, mas formação e a experiência profissional são caminhos que proporcionam o desenvolvimento as habilidades essenciais da docência.

No mundo em constante transformação, com novas ideias e tecnologias surgindo continuamente, o processo de ensino e aprendizagem precisa ser reinventado pelo professor, especialmente levando em conta as situações de interesse do aluno (BOZZA, 2017, p. 35). Assim, o professor deve/precisa buscar desenvolver efetivamente sua aprendizagem por meio de transformações no fazer pedagógico em sala de aula.

Essas concepções contrastam com a representação inicial dos cursistas sobre a profissão docente, que se caracterizou por enxergarem o professor como aquele que recebe um saber pronto e determinado pelos currículos escolares para transmiti-los aos seus alunos. Todavia, evidenciaram-se ao longo da formação indícios da apropriação do discurso apresentado pelos formadores de que o professor deve ser um pesquisador e ter autonomia didática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa desenvolvida apresenta as representações que emergiram num processo de formação continuada para professores, que se constitui como um ambiente de questionamento e reflexão, possibilitando aos participantes compartilhar suas práticas, vivenciar novas experiências e refletir sobre a profissão docente em favor da aprendizagem.

A respeito da representação dos professores sobre o ensino de Matemática, constatamos que eles ensinam basicamente da mesma forma como aprenderam na infância, embora utilizem alguns conhecimentos adquiridos na sua formação profissional ou em outras fontes, especialmente a *Internet*. Alguns deles costumam trabalhar com resolução de problemas e utilizam desafios para estimular os alunos, considerando que isso traz resultados positivos. No geral, percebemos que a atuação de agentes externos, como o currículo, é necessária para o direcionamento do ensino. Diante disso, o professor deve agir taticamente para não perder sua autonomia. Com relação à Matemática, disseram considerá-la uma disciplina difícil, seletiva e complexa; porém, muito relevante no cotidiano dos estudantes.

No que se refere à representação dos professores cursistas sobre a formação continuada, percebemos que buscam melhorar seus currículos com ela, mas admitem que há necessidade de complementar a formação inicial, considerada insuficiente para o trabalho docente.

Nesse sentido, percebemos que esses profissionais desejam aperfeiçoar sua prática pedagógica e melhorar a qualidade de suas aulas. Importam-se em fazer com que o estudante tenha maior interesse em aprender e julgam que a formação inicial foi insuficiente para isso. Por outro lado, percebemos que existe a necessidade de um aprofundamento nos conteúdos matemáticos, que constatamos ser deficientes na formação desses professores. Muitas vezes, eles não percebem esse problema, desejam apenas mais sugestões de atividades práticas e menos aprofundamento nos conteúdos matemáticos. Tal constatação não deve ser encarada como juízo de valor, mas como conclusão baseada nos dados coletados. Entendemos que o planejamento de um curso de formação continuada deve levar esse aspecto em consideração, buscando meios para instigar nos cursistas o aprofundamento da compreensão dos temas abordados. Em particular, deve-se procurar relacionar o *modo de ensinar*, o que abarca as questões didático-pedagógicas, com os fundamentos teóricos e aspectos técnicos do que deve ser ensinado.

No que se refere à representação dos professores sobre avaliação, constatamos que se preocupam predominantemente em atribuir notas às produções dos estudantes, mas alguns sentem dificuldades ao realizarem essa tarefa. Esperam dos formadores a orientação sobre o que está certo ou errado, sem terem plena clareza de sua autonomia como docentes.

Quanto à profissão, representam o professor como transmissor de conhecimento, detentor do saber, acreditando, nessa perspectiva, que, para exercê-la, é preciso aptidão e amor. Relatam ser o magistério é uma profissão desafiadora, que se torna um trabalho prazeroso quando observam avanços na aprendizagem dos estudantes. Uma limitação apontada pelos cursistas diz respeito à questão de não terem tempo suficiente para pesquisa e planejamento do trabalho.

Entre as representações forjadas pelo grupo na formação "Café com Matemática", reconhecemos a possibilidade de muitas outras em função da densa quantidade de informações e dados manifestados ao longo do curso, o que, com certeza, permite outros olhares.

Ao final, pudemos concluir que formação continuada "Café com Matemática" caracterizou-se como um espaço de aprendizagem e superação de dificuldades relacionadas ao ensino da Matemática, contribuindo para a construção de representações positivas em relação a essa disciplina.

REFERÊNCIAS

André, M. (2000). *Etnografia da prática escolar*. Papirus.

André, M. (2005). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. Liber Livro.

Bozza, M. (2017). *Formação continuada de professores: contribuições da resolução de problemas matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental.* [Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Caxias do Sul]. https://repositorio.ucs.br/handle/11338/3432.

Chartier, R. (1991). O mundo como representação. *Estudos Avançados*, v. 5, n. 11. http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40141991000100010&lng=pt&tlng=pt.

Chartier, R. (2002). *A história cultural: entre práticas e representações*. Bertrand Brasil.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, v. 2, p. 177-229.

De Certeau, M. (1994). *A invenção do cotidiano: artes de fazer*. Vozes.

Fonseca, J. J. S. (2002). *Metodologia da pesquisa científica.* UEC.

Gatti, B. A. *et al*. (2019) *Professores do Brasil: novos cenários de formação*. UNESCO.

Gil, A. C. (2007). *Como elaborar projetos de pesquisa*. Atlas.

Goldim, J. R. (1997). Bioética e interdisciplinaridade. *Educação, Subjetividade & Poder*, v. 4, p. 24-28.

Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, n. 1, p. 9-43.

Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. (1996). Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

Ministério da Educação (MEC). (1997). Secretaria de Educação Fundamental institui *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1ª a 4ª série)*. Brasília.

Ministério da Educação (MEC). (1998). Secretaria de Educação Fundamental institui *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série)*. Brasília.

Marconi, M. A. & Lakatos, E. M. (2003). *Fundamentos de metodologia científica*. Atlas.

Minayo, M. C. de S. (Org.). (2001) *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. Vozes.

Oliveira, D. A. (2004). A reestruturação do trabalho docente: precarização e flexibilização. *Educação e Sociedade*, v. 25, n. 89, p. 1127-1144. http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_issuetoc&pid=0101-733020040004&lng=pt&nrm=iso.

Oliveira, M. A. P. de. *Análise de uma experiência de formação continuada em Matemática com professores dos anos iniciais do ensino fundamental*. (2014). [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade de Brasília]. https://repositorio.unb.br/handle/10482/16971

Oliveira, M. K. (2010). *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico*. Scipione.

Richardson, R. J. (2009). *Pesquisa social: métodos e técnicas*. Atlas.

Serres, F. F. (2017) *Ensinar em reconstrução: conceitos e concepções de ensino de professoras dos anos iniciais do ensino fundamental em uma formação continuada de matemática a distância*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul]. https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/174358/001062116.pdf?sequence=1

Silva, A. da F. G., Serrazina, M. de L. & Campos, T. M. M. Formação Continuada de Professores que Lecionam Matemática: desenvolvendo a prática reflexiva docente. *Bolema*, v. 28, n. 50, p. 1505-1524. doi:10.1590/1980-4415v28n50a24.

Silva, F. B. A. (2016). *Trabalho pedagógico e criatividade em Matemática: um olhar a partir da prática docente nos anos iniciais do ensino fundamental*. 2016. [Dissertação em Mestrado em Educação, Universidade de Brasília]. https://repositorio.unb.br/handle/10482/22806?mode=simple.

Silva, T. T. (1996). *Identidades terminais: as transformações na política da pedagogia e na pedagogia da política*. Vozes.

CAPÍTULO 6

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE EM DOMÍNIO NÃO HOMOGÊNEO

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 05/02/2021

Luana Lazzari
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de matemática e estatística
Porto Alegre – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/2934453058729362

Esequia Sauter
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de matemática e estatística
Porto Alegre – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/6198679141403191

Fábio Souto de Azevedo
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de matemática e estatística
Porto Alegre – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/3597389741100371

RESUMO: Neste trabalho resolvemos numericamente a equação de transporte em domínio não homogêneo com condições de contorno semi-refletivas. A solução deste problema é obtida a partir de um problema equivalente em domínio homogêneo determinado através de uma mudança de variável aplicada ao problema original. A partir desse novo problema derivamos sua formulação integral, removemos as singularidades do operador e por fim discretizamos ele aplicando o método de Nyström. A fim de validar nossa metodologia nós simulamos um problema de transferência radiativa com albedo variando exponencialmente. Nossos resultados numéricos apresentaram a mesma precisão que os dados encontrados na literatura.

PALAVRAS-CHAVE: Equação do transporte, Domínio não homogêneo, Mudança de variável, Método de Nyström.

SOLUTION OF THE TRANSPORT EQUATION IN A NON-HOMOGENEOUS DOMAIN

ABSTRACT: In this work, we solve numerically the transport equation for a non-homogeneous domain and semi-reflective boundary conditions. The solution of this problem is obtained from an equivalent problem in a homogeneous domain determined from a change of variable applied in the original problem. From this new problem we derive its integral formulation, we remove the singularities of the operator and finally we discretize it using the Nyström method. In order to validate our methodology we simulate a radiative transfer problem with albedo varying exponentially. Our numerical results presented the same accuracy as those data found in the literature.

KEYWORDS: Transport equation, Non-homogeneous domain, Change of variable, Nyström method.

1 I INTRODUÇÃO

A equação de transporte modela diversos fenômenos físicos envolvendo a distribuição de partículas como nêutrons e fótons. Por depender de sete variáveis, existe apenas uma família restrita de soluções fechadas conhecidas. Isso tem motivado a busca por soluções aproximadas através do desenvolvimento de metodologias numéricas. Neste trabalho, exploramos a formulação integral desse problema e apresentamos resultados analíticos, dos quais extraímos um esquema numérico que empregamos para gerar soluções numéricas de boa qualidade. A equação integral é obtida a partir da integração da equação de transporte ao longo das linhas características.

Diversos grupo de pesquisa tem se debruçado sobre metodologias numéricas, tais como F_N (GARCIA; SIEWERT, 1982), GFD (SAUTER *et al.*, 2013), ADO (BARICHELLO; SIEWERT, 2001), SGF (DOMÍNGUEZ; BARROS, 2007) e Nyström. O método de Nyström, que será empregado no desenvolvimento deste trabalho, consiste em aproximar os operadores integrais em um espaço de dimensão finita através de uma quadratura numérica resultando em um sistema de equações algébricas para o fluxo escalar. Este método tem sido aplicado com sucesso na solução numérica da equação de transporte para diferentes geometrias (DALMOLIN *et al.*, 2017; AZEVEDO *et al.*, 2018; LAZZARI *et al.*, 2019; SAUTER *et al.*, 2019). O fluxo angular pode ser recuperado através do fluxo angular pelo método das características.

Neste trabalho nós desenvolvemos uma solução numérica para o problema de transporte em domínio não homogêneo. Nós aplicamos inicialmente uma mudança da variável no problema original a fim de obter um problema equivalente no meio homogêneo, na sequência derivamos a formulação integral desse novo problema e removemos as singularidades dos operadores. Por fim, nós utilizamos o método de Nyström para aproximar os operadores e definir um sistema o fluxo escalar.

A formulação matemática considerada aqui é dada por,

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial}{\partial x}\Psi(x,\mu) + \sigma_t(x)\Psi(x,\mu) = \dfrac{\sigma_S(x)}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\Psi(x,\mu') + S(x), \\ \Psi(0,\mu) = \rho_0(\mu)\Psi(0,-\mu) + (1-\rho_0(\mu))B_0(\mu), \mu > 0, \\ \Psi(L,\mu) = \rho_L(\mu)\Psi(L,-\mu) + (1-\rho_L(\mu))B_L(\mu), \mu < 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ψ (x, μ) é o fluxo angular de partículas, $0 \leq x \leq L$ é a variável espacial e μ é o cosseno do ângulo formado entre a direção de propagação das partículas e o eixo x. A função *(S)* representa o termo fonte, B_0 e B_L a contribuição da fronteira e $0 \geq p_0, p_L \leq 1$ os coeficientes de reflexão. A função $\sigma_S(x)$ seção de choque de espalhamento, representa a probabilidade das partículas interagirem com o meio e mudarem de direção enquanto a seção de choque macroscópica total, $\sigma_t(x)$, representa a soma de todas as possíveis interação das partículas com o meio, como por exemplo, espalhamento, absorção e fissão. Neste contexto consideramos $\sigma_t(x) > \sigma_S(x)$, $\sigma_t(x) > 0$ e $\sigma_S(x) > 0$.

2 | METODOLOGIA

Nesta seção apresentamos a nossa proposta metodológica para determinar a solução do problema de transporte. Iniciamos transformando o problema (1) que está definido no domínio não homogêneo, em um problema equivalente em meio homogêneo através de uma mudança de variável. Na sequência determinamos a formulação integral desse novo problema, removemos as singularidades do operador integral e discretizamos esse operador aplicando o método de Nyström.

A mudança de variável que propomos é dada pela função

$$y(x) = \int_0^x \sigma_t(\tau)d\tau, \tag{2}$$

e quando aplicada em (1) obtemos o problema equivalente em meio homogêneo,

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\bar{\Psi}(y,\mu) + \bar{\Psi}(y,\mu) = \frac{\bar{\sigma}_s(y)}{2\bar{\sigma}_t(y)}\int_{-1}^{1}\bar{\Psi}(y,\mu')d\mu' + \frac{\bar{S}(y)}{\bar{\sigma}_t(y)}, \tag{3}$$

sujeito às condições de contorno dadas em (1).

Definido este novo problema, nós determinamos sua formulação integral a partir da definição para o fluxo escalar que é dada por

$$\bar{\Phi}(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\bar{\Psi}(y,\mu)d\mu = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}[\bar{\Psi}(y,-\mu) + \bar{\Psi}(y,\mu)]d\mu. \tag{4}$$

Os fluxos angulares $\bar{\Psi}(y,\mu)$ e $\bar{\Psi}\,(y,-\mu)$ dados na equação (4), são determinados a partir da equação (3) escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{\Psi}(y,\mu) + \frac{\bar{\Psi}(y,\mu)}{\mu} = \frac{\bar{Q}(y)}{\mu}, \tag{5}$$

onde $\bar{Q}(y) = \frac{\bar{\sigma}_s(y)}{\bar{\sigma}_t(y)}\bar{\Phi}(y) + \frac{\bar{S}(y)}{\bar{\sigma}_t(y)}$. Considerando a solução desta equação podemos escrever o fluxo escalar (4) como a soma dos operadores L_g e L_b, ou seja,

$$\bar{\Phi}(y) = L_g\left(\frac{\bar{\sigma}_s(y)}{\bar{\sigma}_t(y)}\bar{\Phi}(y)\right) + \bar{g}(y), \tag{6}$$

onde $\bar{g}(y) = L_g\left(\frac{\bar{S}(y)}{\bar{\sigma}_t(y)}\right) + L_b\bar{B}(y)$.

Os operadores L_g e L_b são dados por

$$L_b\bar{B}(y) = \int_0^1 \left[\frac{\left(1-\rho_L(-\mu)\right)B_L(-\mu)\rho_0(\mu)e^{-\frac{1}{\mu}(y+L)}}{2\left(1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}\right)} + \frac{\left(1-\rho_0(\mu)\right)B_0(\mu)e^{-\frac{y}{\mu}} + \left(1-\rho_L(-\mu)\right)B_L(-\mu)e^{-\frac{1}{\mu}(L-y)}}{2\left(1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}\right)} + \frac{\left(1-\rho_0(\mu)\right)B_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{1}{\mu}(2L-y)}}{2\left(1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}\right)} \right] d\mu. \tag{7}$$

e

$$L_g\bar{Q}(y) = \int_0^L \bar{k}(y,\tau)\bar{Q}(\tau)d\tau, \tag{8}$$

com núcleo $\bar{k}(y,\tau)$ dado por

$$\bar{k}(y,\tau) = \int_0^1 \left[\frac{\rho_L(-\mu)e^{-\frac{1}{\mu}(2L-\tau-y)} + \rho_0(\mu)e^{-\frac{1}{\mu}(y+\tau)}}{2\mu\left(1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}\right)} + \frac{e^{-\frac{1}{\mu}|\tau-y|}}{2\mu} + \frac{\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}\left(e^{-\frac{1}{\mu}(\tau-y)} + e^{-\frac{1}{\mu}(y-\tau)}\right)}{2\mu\left(1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}\right)} \right] d\mu. \tag{9}$$

A função $\bar{k}(y,\tau)$ apresenta uma singularidade quando τ = y. Para removermos a singularidade vamos aplicar a técnica de subtração de singularidade e com isso a equação (6) fica da forma

$$\bar{\Phi}(y) = \int_0^L \bar{k}(y,\tau)\left(\frac{\bar{\sigma}_s(\tau)}{\bar{\sigma}_t(\tau)}\bar{\Phi}(\tau) - \frac{\bar{\sigma}_s(y)}{\bar{\sigma}_t(y)}\bar{\Phi}(y)\right)d\tau + \bar{\Phi}(y)\bar{R}(y)\frac{\bar{\sigma}_s(y)}{\bar{\sigma}_t(y)} + \bar{g}(y), \tag{10}$$

onde $\bar{R}(y) = \int_0^L \bar{k}(y,\tau)d\tau$.

Por fim, aproximamos o operador integral da equação (10) utilizando o método de Nyström e avaliamos o fluxo escalar em cada ponto *i* da malha, ou seja,

$$\bar{\Phi}(y_i) \approx \sum_{\substack{j=1 \\ \tau_j \neq x}}^{N} w(\tau_j)\bar{k}(y_i,\tau_j)\left(\frac{\bar{\sigma}_s(\tau_j)}{\bar{\sigma}_t(\tau_j)}\bar{\Phi}(\tau_j) - \frac{\bar{\sigma}_s(y_i)}{\bar{\sigma}_t(y_i)}\bar{\Phi}(y_i)\right)$$

$$+\bar{\Phi}(y_i)\bar{R}(y_i)\frac{\bar{\sigma}_s(y_i)}{\bar{\sigma}_t(y_i)}+\bar{g}(y_i). \tag{11}$$

3 I RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de verificar a eficiência da metodologia em determinar a solução do problema de transporte em domínio não homogêneo, nós simulamos um problema de transferência radiativa com albedo variando exponencialmente apresentado por Garcia e Siewert (GARCIA; SIEWERT, 1982). Neste trabalho os autores calculam os coeficientes A^* e B^*, os quais representam a relação da intensidade de radiação que saem dos extremos da placa, aplicando o método F_N.

Os parâmetros A^* e B^* são definidos da seguinte forma,

$$A^*=\frac{\int_0^1\bar{\Psi}(0,-\mu)\mu d\mu}{\int_0^1[B_0(\mu)+B_L(\mu)]\mu d\mu} \tag{12}$$

e

$$B^*=\frac{\int_0^1\bar{\Psi}(L,-\mu)\mu d\mu}{\int_0^1[B_0(\mu)+B_L(\mu)]\mu d\mu}. \tag{13}$$

As distribuições de saída, $\bar{\Psi}(0,-\mu)$ e $\bar{\Psi}(L,-\mu)$, apresentadas em (12) e (13) são determinadas a partir do fluxo escalar pelas seguintes equações

$$\bar{\Psi}(0,-\mu)=\frac{1-\rho_L(\mu)B_L(\mu)e^{-\frac{L}{\mu}}+\big(1-\rho_0(\mu)\big)B_0(\mu)\rho_L(\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}}{1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}}$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{w(\tau_j)\rho_L(-\mu)\left[\bar{\sigma}_s(\tau_j)\bar{\Phi}(\tau_j)+\bar{S}(\tau_j)\right]}{1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}}\left[\frac{\rho_0(\mu)e^{-\frac{1}{\mu}(2L-\tau_j)}}{\mu}+\frac{e^{-\frac{1}{\mu}(2L+\tau_j)}}{\mu}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{w(\tau_j)e^{-\frac{\tau_j}{\mu}}}{\mu}\left[\bar{\sigma}_s(\tau_j)\bar{\Phi}(\tau_j)+\bar{S}(\tau_j)\right]\right\}, \tag{14}$$

e

$$\bar{\Psi}(L,\mu) = \frac{1-\rho_0(\mu)B_0(\mu)e^{-\frac{L}{\mu}} + \left(1-\rho_L(-\mu)\right)B_L(-\mu)\rho_0(\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}}{1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{w(\tau_j)\rho_0(\mu)\left[\bar{\sigma}_s(\tau_j)\bar{\Phi}(\tau_j)+\bar{S}(\tau_j)\right]}{1-\rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2L}{\mu}}}\left[\frac{\rho_L(\mu)e^{-\frac{1}{\mu}(3L-\tau_j)}}{\mu}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{e^{-\frac{1}{\mu}(L+\tau_j)}}{\mu}\right] + \frac{w(\tau_j)e^{-\frac{1}{\mu}(L-\tau_j)}}{\mu}\left[\bar{\sigma}_s(\tau_j)\bar{\Phi}(\tau_j)+\bar{S}(\tau_j)\right]\right\}. \qquad (15)$$

Para validar nossos resultados numéricos com os de Garcia e Siewert, (GARCIA; SIEWERT, 1982) nós consideramos $p_0(\mu) = p_L(\mu) = B_L(\mu) = 0$, $B_L(\mu) = \delta(\mu - 0.9)$. S(x) = 0, $\sigma_t(x) = 1cm^{-1}$ e $\sigma_S(x) = e^{-x/s}\ cm^{-1}$ com $0 < w_0 \leq 1$ e $s > 0$. O algoritmo foi implementado em linguagem de programação C com o uso de rotinas da GNU scientific library e nas simulações nós consideramos a quadratura de Gauss-Legendre.

Nas tabelas a seguir, nós apresentamos os resultados numéricos para os coeficientes A^* e B^* com w_0 igual a 0.7, 0.9 e 1.0 e s variando entre 1 e 1000. Consideramos a solução para os domínios L=0.1cm, L=1.0cm, L=5.0cm e L=10.0cm.

w_0	s	F_N	N=101	N=201	N=401	N=801
0.7	1	0.330938E-1	0.330938E-1	0.330938E-1	0.330938E-1	0.330938E-1
	10	0.346827E-1	0.346827E-1	0.346827E-1	0.346827E-1	0.346827E-1
	100	0.348478E-1	0.348478E-1	0.348478E-1	0.348478E-1	0.348478E-1
	1000	0.348644E-1	0.348644E-1	0.348644E-1	0.348644E-1	0.348644E-1
0.9	1	0.440808E-1	0.440807E-1	0.440808E-1	0.440808E-1	0.440808E-1
	10	0.462818E-1	0.462818E-1	0.462818E-1	0.462818E-1	0.462818E-1
	100	0.465110E-1	0.465110E-1	0.465110E-1	0.465110E-1	0.465110E-1
	1000	0.465340E-1	0.465340E-1	0.465340E-1	0.465340E-1	0.465340E-1
1.0	1	0.498765E-1	0.498765E-1	0.498765E-1	0.498765E-1	0.498765E-1
	10	0.524177E-1	0.524176E-1	0.524177E-1	0.524177E-1	0.524177E-1
	100	0.526825E-1	0.526825E-1	0.526825E-1	0.526825E-1	0.526825E-1
	1000	0.527091E-1	0.527091E-1	0.527091E-1	0.527091E-1	0.527091E-1

Tabela 1: Comparação dos resultados numéricos para o coeficiente A^* em L=0.1cm com os resultados publicados em (GARCIA; SIEWERT, 1982).

Fonte: do autor.

w_0	s	F_N	N=101	N=201	N=401	N=801
0.7	1	0.115005	0.115005	0.115005	0.115005	0.115005
	10	0.168417	0.168417	0.168417	0.168417	0.168417
	100	0.177022	0.177022	0.177022	0.177022	0.177022
	1000	0.177937	0.177939	0.177937	0.177937	0.177937
0.9	1	0.166283	0.166283	0.166283	0.166283	0.166283
	10	0.265719	0.265719	0.265719	0.265719	0.265719
	100	0.284075	0.284075	0.284075	0.284075	0.284075
	1000	0.286074	0.286074	0.286074	0.286074	0.286074
1.0	1	0.197101	0.197101	0.197101	0.197101	0.197101
	10	0.334012	0.334012	0.334012	0.334012	0.334012
	100	0.361677	0.361677	0.361677	0.361677	0.361677
	1000	0.364743	0.364743	0.364743	0.364743	0.364743

Tabela 2: Comparação dos resultados numéricos para o coeficiente A^* em L=1.0cm com os resultados publicados em (GARCIA; SIEWERT, 1982).

Fonte: do autor.

w_0	s	F_N	N=101	N=201	N=401	N=801
0.7	1	0.118853	0.118853	0.118853	0.118853	0.118853
	10	0.196979	0.196979	0.196979	0.196979	0.196979
	100	0.216745	0.216746	0.216745	0.216745	0.216745
	1000	0.219185	0.219186	0.219185	0.219185	0.219185
0.9	1	0.172617	0.172617	0.172617	0.172617	0.172617
	10	0.340243	0.340244	0.340243	0.340243	0.340243
	100	0.414247	0.414248	0.414247	0.414247	0.414247
	1000	0.426863	0.426861	0.426863	0.426863	0.426863
1.0	1	0.205174	0.205175	0.205174	0.205174	0.205174
	10	0.466152	0.466154	0.466153	0.466153	0.466152
	100	0.679431	0.679433	0.679431	0.679431	0.679431
	1000	0.745105	0.745107	0.745105	0.745105	0.745105

Tabela 3: Comparação dos resultados numéricos para o coeficiente A^* em L=5.0cm com os resultados publicados em (GARCIA; SIEWERT, 1982).

Fonte: do autor.

w_0	s	F_N	N=101	N=201	N=401	N=801
0.7	1	0.118853	0.118854	0.118853	0.118853	0.118853
	10	0.196985	0.196986	0.196985	0.196985	0.196985
	100	0.216786	0.216787	0.216786	0.216786	0.216786
	1000	0.219239	0.219240	0.219239	0.219239	0.219239
0.9	1	0.172617	0.172618	0.172617	0.172617	0.172617
	10	0.340278	0.340282	0.340278	0.340278	0.340278
	100	0.415321	0.415325	0.415321	0.415321	0.415321
	1000	0.428844	0.428848	0.428845	0.428844	0.428844
1.0	1	0.205174	0.205177	0.205175	0.205174	0.205174
	10	0.466262	0.466269	0.466263	0.466262	0.466262
	100	0.698436	0.698447	0.698438	0.698436	0.698436
	1000	0.828402	0.828412	0.828403	0.828402	0.828402

Tabela 4: Comparação dos resultados numéricos para o coeficiente A^* em L=10.0cm com os resultados publicados em (GARCIA; SIEWERT, 1982).

Fonte: do autor.

w_0	s	F_N	N=101	N=201	N=401	N=801
0.7	1	0.927586	0.927586	0.927586	0.927586	0.927586
	10	0.929322	0.929322	0.929322	0.929322	0.929322
	100	0.29503	0.29503	0.29503	0.29503	0.29503
	1000	0.929521	0.929521	0.929521	0.929521	0.929521
0.9	1	0.901829	0.901829	0.901829	0.901829	0.901829
	10	0.938462	0.938462	0.938462	0.938462	0.938462
	100	0.941112	0.941112	0.941112	0.941112	0.941112
	1000	0.941137	0.941137	0.941137	0.941137	0.941137
1.0	1	0.944201	0.944201	0.944201	0.944201	0.944201
	10	0.946967	0.946967	0.946967	0.946967	0.946967
	100	0.947256	0.947256	0.947256	0.947256	0.947256
	1000	0.947285	0.947285	0.947285	0.947285	0.947285

Tabela 5: Comparação dos resultados numéricos para o coeficiente B^* em L=0.1cm com os resultados publicados em (GARCIA; SIEWERT, 1982).

Fonte: do autor.

w_0	s	F_N	N=101	N=201	N=401	N=801
0.7	1	0.394446	0.394446	0.394446	0.394446	0.394446
	10	0.457548	0.457548	0.457548	0.457548	0.457548
	100	0.468911	0.468911	0.468911	0.468911	0.468911
	1000	0.470135	0.470135	0.470135	0.470135	0.470135
0.9	1	0.424179	0.424179	0.424179	0.424179	0.424179
	10	0.537932	0.537932	0.537932	0.537932	0.537932
	100	0.561324	0.561324	0.561324	0.561324	0.561324
	1000	0.56390	0.56390	0.56390	0.56390	0.56390
1.0	1	0.442193	0.442193	0.442193	0.442193	0.442193
	10	0.596084	0.596084	0.596084	0.596084	0.596084
	100	0.630603	0.630603	0.630603	0.630603	0.630603
	1000	0.634477	0.634477	0.634477	0.634477	0.634477

Tabela 6: Comparação dos resultados numéricos para o coeficiente *B** em L=1.0cm com os resultados publicados em (GARCIA; SIEWERT, 1982).

Fonte: do autor.

w_0	s	F_N	N=101	N=201	N=401	N=801
0.7	1	0.444660E-2	0.444660E-2	0.444660E-2	0.444660E-2	0.444660E-2
	10	0.101850E-1	0.101849E-1	0.101850E-1	0.101850E-1	0.101850E-1
	100	0.169413E-1	0.169412E-1	0.169413E-1	0.169413E-1	0.169413E-1
	1000	0.182531E-1	0.182529E-1	0.182531E-1	0.182531E-1	0.182531E-1
0.9	1	0.470936E-2	0.470936E-2	0.470936E-2	0.470936E-2	0.470936E-2
	10	0.187395E-1	0.187394E-1	0.187395E-1	0.187395E-1	0.187395E-1
	100	0.554371E-1	0.554365E-1	0.554370E-1	0.554371E-1	0.554371E-1
	1000	0.666423E-1	0.666415E-1	0.666422E-1	0.666423E-1	0.666423E-1
1.0	1	0.486873E-2	0.486873E-2	0.486873E-2	0.486873E-2	0.486873E-2
	10	0.291545E-1	0.291543E-1	0.291545E-1	0.291545E-1	0.291545E-1
	100	0.163099	0.163097	0.163098	0.163099	0.163099
	1000	0.234432	0.234430	0.234432	0.234432	0.234432

Tabela 7: Comparação dos resultados numéricos para o coeficiente *B** em L=5.0cm com os resultados publicados em (GARCIA; SIEWERT, 1982).

Fonte: do autor.

w_0	s	F_N	N=101	N=201	N=401	N=801
0.7	1	0.169928E-4	0.169928E-4	0.169928E-4	0.169928E-4	0.169928E-4
	10	0.515608E-4	0.515594E-4	0.515606E-4	0.515608E-4	0.515608E-4
	100	0.210501E-3	0.210481E-3	0.210498E-3	0.210500E-3	0.210501E-3
	1000	0.280169E-3	0.280139E-3	0.280165E-3	0.280168E-3	0.280169E-3
0.9	1	0.179231E-4	0.179232E-4	0.179231E-4	0.179231E-4	0.179231E-4
	10	0.110683E-4	0.110683E-4	0.110683E-4	0.110683E-4	0.110683E-4
	100	0.212273E-2	0.212238-2	0.212269E-2	0.212273E-2	0.212273E-2
	1000	0.446877E-2	0.446800E-2	0.446867E-2	0.446876E-2	0.446877E-2
1.0	1	0.184882E-4	0.184882E-4	0.184882E-4	0.184882E-4	0.184882E-4
	10	0.191149E-3	0.191135E-3	0.191147E-3	0.191149E-3	0.191149E-3
	100	0.187701E-1	0.187673E-1	0.187698E-1	0.187701E-1	0.187701E-1
	1000	0.102816	0.102806	0.102814	0.102815	0.102816

Tabela 8: Comparação dos resultados numéricos para o coeficiente B^* em L=10.0cm com os resultados publicados em (GARCIA; SIEWERT, 1982).

Fonte: do autor.

Nas tabelas de 1 a 8, nós apresentamos a comparação dos resultados numéricos para os coeficientes A^* e B^* obtidos pela metodologia proposta neste trabalho com os resultados apresentados no trabalho de Garcia e Siewert (GARCIA; SIEWERT, 1982). Nossa metodologia se mostrou eficiente na determinação da solução do problema de transferência radiativa, cuja função albedo varia exponencialmente, apresentando a mesma precisão que os dados calculados por Garcia e Siewert (GARCIA; SIEWERT, 1982). Como já era esperado, quando maior o domínio considerado na simulação, mais pontos na malha são necessários para obter a convergência da solução. Nos casos cujo domínio é igual a L=0.1cm, obtemos 6 dígitos de precisão com apenas 101 pontos na malha enquanto que para domínios maiores, como L=10.0cm, foi necessário tomar N=801 pontos.

4 | CONCLUSÕES

Neste trabalho nós exploramos a solução numérica para o problema de transporte em domínio não homogêneo através de uma metodologia baseada no método de Nyström. O principal passo dessa metodologia é uma mudança de variáveis aplicada no problema original a fim de obter um problema equivalente em meio homogêneo e facilitar a solução do mesmo. O problema obtido recai em uma equação com núcleo singular e exige uma remoção de singularidade.

Como pode ser observado nos resultados numéricos, esta estratégia, aplicada juntamente com a técnica de remoção das singularidades do operador integral e a aproximação do mesmo pelo método de Nyström, apresentou um bom desempenho visto que a solução calculada tem a mesma precisão que os dados obtidos por Garcia e Siewert (GARCIA; SIEWERT, 1982).

AGRADECIMENTOS

Luana Lazzari agradece o suporte pela bolsa de doutorado do CNPq (Brasil).

REFERÊNCIAS

BARICHELLO, L. B., SIEWERT C. E. **A new version of the discrete-ordinates method.** In: Proc. of the 2nd Conf. on Comput. Heat and Mass Transfer (COPPE/EE/UFRJ), 2001, Rio de Janeiro, Brasil.

DALMOLIN, D.; DE AZEVEDO F. S.; SAUTER, E. **Nyström method in transport equation**. In: Proceeding of INAC 2017 International Nuclear Atlantic Conference, 2017, Belo Horizonte, Brasil.

DE AZEVEDO, F. S., SAUTER, E., KONZEN, P. H. A., THOMPSON, M., BARICHELLO, L. B. **Integral formulation and numerical simulations for the neutron transport equation in X-Y geometry**. *Annals of Nuclear Energy*, 112, 735-747, 2018.

DOMÍNGUEZ, D. S., BARROS, R. C. **The spectral Green's function linear-nodal method for one-speed X, Y-geometry discrete ordinates deep penetration problems**. *Annals of Nuclear Energy,* 34, 958-966, 2007.

GARCIA, R. D. M., SIEWERT, C. E. **Radiative transfer in finite inhomogeneous plane-parallel atmospheres**. *Journal of Quantitative Spectroscopy e Radiative Transfer*, 27, 141-148, 1982.

LAZZARI, L., DE AZEVEDO, F. SAUTER, E. **Simulation for non-homogeneous transport equation by Nyström method**. In: Proceeding of INAC 2019 International Nuclear Atlantic Conference, 2019, São Paulo, Brasil.

SAUTER, E., DE AZEVEDO, F. S., KONZEN, P. H. A. **Nyström Method Applied to the Transport Equation in a Semi-Reflective Rectangle**. *Journal of Computational and Theoretical Transport,* 2332-4325, 2019.

SAUTER, E., DE AZEVEDO, F., THOMPSON, M., VILHENA, M.T. **Solution of the one-dimensional transport equation by the vector green function method: Error bounds and simulation**. *Applied Mathematics and Computation,* 11291-11301, 2013.

CAPÍTULO 7

PRESERVAÇÃO DA MEMÓRIA DO ENSINO DE MATEMÁTICA: ANÁLISE DO ACERVO BIBLIOGRÁFICO DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO FLORES DA CUNHA

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 03/02/2021

Diane Catia Tomasi
Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
Porto Alegre, RS
http://lattes.cnpq.br/5455855279436309

RESUMO: O presente trabalho apresenta os resultados parciais de atividade desenvolvida no acervo bibliográfico do Instituto de Educação Flores da Cunha e no acervo bibliográfico da Associação das Ex-Alunas do Instituto de Educação Flores da Cunha, em Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Esta atividade foi realizada para atender ao Projeto de Pesquisa financiado pelo CNPq, "Estudar para ensinar: práticas e saberes matemáticos nas escolas normais do Rio Grande do Sul (1889-1970)". Este trabalho apresenta o instrumento desenvolvido para identificação dos documentos, também relata os procedimentos aplicados no processo de análise dos documentos que são objeto de estudo do projeto. Descreve também, a análise dos documentos que abrange a identificação do tipo de material e tipo de suporte, essa identificação auxiliará na etapa de reconhecimento da relevância do documento, onde será avaliada a necessidade de preservação digital e de sua disponibilização on-line.
PALAVRAS-CHAVE: Análise de documentos, Acervo bibliográfico, Memória institucional.

PRESERVATION OF THE MATHEMATICS TEACHING MEMORY: ANALYSIS OF THE BIBLIOGRAPHIC COLLECTION OF THE INSTITUTO DE EDUCAÇÃO FLORES DA CUNHA

ABSTRACT: This work presents the partial results of an activity developed in the bibliographic collection of the Flores da Cunha Education Institute and in the bibliographic collection of Associação das Ex-Alunas do Instituto de Educação Flores da Cunha, in Porto Alegre, Rio Grande do Sul. This activity was carried out to attend the Research Project financed by CNPq CNPq, "Estudar para ensinar: práticas e saberes matemáticos nas escolas normais do Rio Grande do Sul (1889-1970)". In this article, the instrument developed to identify the documents will be presented, as well as the report of the procedures applied in the process of analyzing the documents that are the object of study of the project, this identification will assist in the step of recognizing the relevance of the document, where the need for digital preservation and its availability online will be assessed.
KEYWORDS: Document analysis, Bibliographic collection, Institutional memory.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta os passos iniciais da análise e avaliação de documentos que são objeto de estudo do Projeto de Pesquisa financiado pelo CNPq, "Estudar para ensinar: práticas e saberes matemáticos nas escolas normais do Rio Grande do Sul (1889-1970)"

(BÚRIGO *et al*., 2016), mais especificamente, apresenta-se o trabalho que vem sendo realizado no acervo bibliográfico do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação Flores da Cunha e no acervo de Memória da Associação de Ex-alunas do Instituto de Educação.

Estes acervos são compostos por diversos tipos de documentos, que apresentam formas e instrumentos diversos de registro e suporte, o que possibilita transitar entre as três áreas da ciência da informação: arquivologia, biblioteconomia e museologia. Esta afirmação entra em acordo com o conceito e contextualização de documento que Dodebei nos lembra:

> Tomando-se o conceito clássico de *documento* como sendo o suporte físico da informação, idealizamos o objeto museológico, o dossiê arquivístico e o livro como objetos isolados de estudo da Museologia, da Arquivologia e da Biblioteconomia, os quais poderiam ser observados por suas semelhanças e diferenças, tanto no plano conceitual quanto nos processos de organização institucional e em sua relação com a sociedade (DODEBEI, 2010, p. 82).

Partindo deste conceito, com olhar da ciência da informação, a avaliação do acervo tem um prisma interdisciplinar, com o objetivo de preservar a memória institucional (do Instituto de Educação e da Associação de Ex-alunas do IE) e do ensino de matemática no Rio Grande do Sul, através da preservação dos documentos em formato digital e contribuindo tanto para a memória da instituição quanto para a história da educação matemática.

Os acervos analisados representam importante fonte de informação e pesquisa, pois os documentos poderão servir de suporte e apoio em estudos posteriores. Além disso, esses documentos constituem parte da história do ensino de matemática no Rio Grande do Sul que necessita ser registrada e conservada, e com as condições necessárias, compartihada. Nesse sentido, lembramos que os acervos bibliográficos, arquivísticos e museológicos servem de fonte de informação e conhecimento, sendo que a "[...] função principal é permitir aos pesquisadores e discentes conhecerem e utilizarem outros espaços, fora das universidades e escolas, que também instiguem o pensar, o conhecer e o saber" (PINHEIRO *et al*., 2009, p. 514).

Com a possibilidade de termos o acervo físico também em meio digital, será possível o acesso a qualquer hora e em qualquer lugar, pois, para que sirvam ao propósito de fonte de informação, conhecimento e pesquisa "é preciso que estejam acessíveis, a qualquer tempo, aos interessados, sejam pesquisadores ou a sociedade em geral" (MERLO, 2015, p. 27).

Portanto, para possibilitar a preservação dos documentos, além de disponibilizar acesso online e irrestrito destes acervos, é necessário que seja feita a digitalização dos documentos. Para isso, várias epatas e critérios devem ser seguidos. Iniciamos pela "triagem", onde é verificado o estado de conservação do suporte (papel sulfite, papel fotográfico, matriz de mimeógrafo, etc.) e da nitidez do material utilizado para registro (tinta esferográfica, grafite, impressão mimeográfica, impressão industrial, etc.), fatores que implicam na qualidade da digitalização. Nesta triagem também é possível avaliar o valor histórico do documento, raridade e/ou preciosidade do mesmo.

A digitalização, além da função de disponibilizar a informação, tem o propósito de contribuir para a salvaguarda de ambos os acervos. Com o material disponível digitalmente, os originais poderão ser preservados e, com certeza, será possível diminuir a deterioração causada pelo manuseio, incidência de luz, condições climáticas, e ação do tempo.

2 | ANÁLISE DOS DOCUMENTOS

Aqui são descritas as atividades desenvolvidas na etapa de análise física dos documentos.

O primeiro passo consiste na higienização dos documentos, passo importante, pois além de fazer a limpeza dos documentos também pode ser verificado o seu estado de conservação. Após a higienização, cada documento é cuidadosamente embalado e recebe um número de inventário.

Figura 1: Materiais usados na higienização. Fonte: acervo pessoal.

Figura 2: documento embalado após higienização. Fonte: acervo pessoal.

Após receber o número de inventário, é realizada a identificação de cada documento. A identificação é feita a partir do preenchimento de ficha de identificação ou ficha de inventário, onde consta descrição de dados físicos: tipo de documento, tipo de suporte, tipo de encadernação, etc.; e dados de conteúdo do documento: informações editoriais, anotações feitas no documento, assinaturas, etc.

Inicialmente usou-se uma ficha previamente elaborada (ficha de identificação) e utilizada principalmente quando se tratava de livros. Nestes casos a identificação foi mais descritiva, apontando autoria, título, editora, data e outros dados de publicação. Para os documentos soltos, foi necessária a elaboração de uma nova ficha (ficha de inventário). Esta nova ficha foi elaborada de forma que se adequasse às necessidades e peculiaridades destes documentos, além de facilitar o reconhecimento dos tipos de materiais, tipos de de suporte, e tipos de documento.

A Ficha de Inventário foi elaborada em forma de formulário de fácil preenchimento, com questões que facilitam o reconhecimento dos elementos e a padronização das descrições.

2.1 Ficha de inventário

Após receber o número de inventário, cada documento é identificado através da "ficha de inventário". Para a elaboração da ficha levou-se em conta os tipos de documentos que fazem parte do acervo, como: apostila, caderno, catálogo, recorte de jornal, plano de atividades entre outros. Considerou-se também o tipo de material e suporte, o estado de conservação, dados de autoria e impressão quando houver. E, ainda, outras observações que se julgarem relevantes (conforme Figura 3).

Essa primeira triagem é necessária para posterior avaliação de possibilidade de digitalização, pois o objetivo é a salvaguarda e disponibilização digital dos documentos que são parte da história do ensino da matemática no Rio Grande do Sul.

Esta ficha é de preenchimento objetivo, ou seja, alguns tipos de documentos e de suporte material estão elencados em colunas, onde é possível marcar um X no espaço entre parênteses que corresponde às características do documento que está sendo inventariado. A ficha apresenta também espaço para descrição básica e informações relevantes que constam no documento. Ela foi pensada com o intuito de facilitar a descrição do material por parte dos inventariantes após a etapa de higienização. A elaboração da ficha teve contribuições de alguns mebros do grupo que trabahou o acervo e foi aprovada pelas coordenadoras do projeto.

A versão atualizada da ficha é a ilustrada na Figura 3.

Ficha de inventário.

Número: **Localização:** CAIXA peq__________________________________ (e ou) CAIXA gr _____.

Tipo de documento:

( ) apostila	( ) plano de ensino	( ) texto
( ) caderno	( ) plano de trabalho	( ) trabalho em evento
( ) catálogo	( ) programa de disciplina	( ) trabalho/atividade de aula
( ) cartão	( ) programa de ensino	( ) tradução
( ) jornal/recorte de jornal	( ) resumo	( ) outros
( ) plano de atividades	( ) revista	( ) ____________________

Tipo de suporte e material:

( ) Datilografado em papel sulfite/oficio	( ) Manuscrito em matriz de mimeografo
( ) Datilografado em matriz de mimeografo	( ) Manuscrito em papel sulfite/oficio
( ) Impresso em papel jornal	( ) outros
( ) impresso em papel sulfite/oficio	( ) ______________________________

Estado de conservação:

( ) Bom ( )Regular ( )Ruim ( ) Péssimo

Descrição do documento:

Título:

Autoria/organização:

Traduzido por/organizado por:

Data:

Observações relevantes:

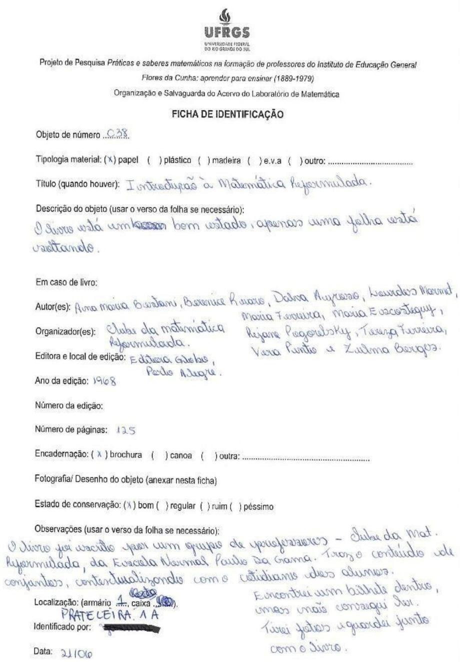
Identificado por:
Data:

Figura 3: Ficha de inventário atualizada.

Fonte: elaborada pela autora

2.2 Descrição e análise dos documentos

Os documentos devem ser analisados um a um. As descrições feitas pelos invetariantes nas fichas de identificação e fichas de inventário (Figura 4 e 5) serão utilizadas também como apoio no momento da análise efetiva dos documentos, ou seja, no momento de verificação de preciosidade (relevância do documento ou do autor do documento), raridade, historicidade.



UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Projeto de Pesquisa *Práticas e saberes matemáticos na formação de professores do Instituto de Educação General Flores da Cunha: aprender para ensinar (1889-1979)*

Organização e Salvaguarda do Acervo do Laboratório de Matemática

FICHA DE IDENTIFICAÇÃO

Objeto de número C38

Tipologia material: (X) papel ( ) plástico ( ) madeira ( ) e.v.a ( ) outro: ....

Título (quando houver): Introdução à Matemática Reformulada.

Descrição do objeto (usar o verso da folha se necessário):
O livro está em bom estado, apenas uma folha está soltando.

Em caso de livro:

Autor(es): Ana Maria Bartani, Berenice Rosario, Dalva Augusso, Lourdes Marmet, Maria Ferreira, Maria Escosteguy, Rejane Pegoralsky, Tereza Ferreira, Vera Pontes e Zulma Borges.

Organizador(es): Clube da matemática Reformulada.

Editora e local de edição: Editora Globo, Porto Alegre.

Ano da edição: 1968

Número da edição:

Número de páginas: 125

Encadernação: (X) brochura ( ) canoa ( ) outra: ....

Fotografia/ Desenho do objeto (anexar nesta ficha)

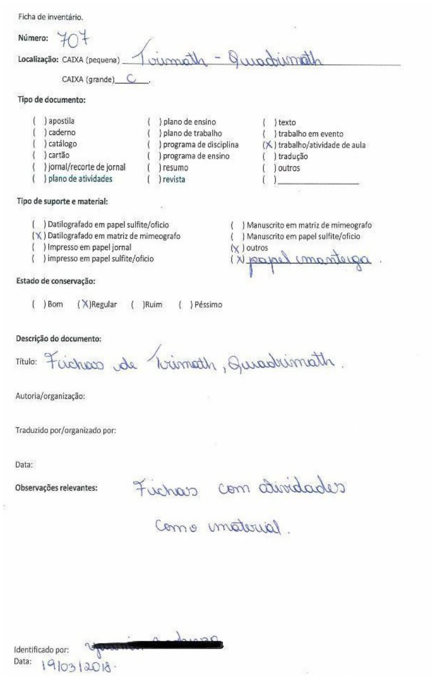
Estado de conservação: (X) bom ( ) regular ( ) ruim ( ) péssimo

Observações (usar o verso da folha se necessário):
O livro foi escrito por um grupo de professores - Clube da Mat. Reformulada, da Escola Normal Paulo Da Gama. Trazo conteúdo de conjuntos, contextualizando com o cotidiano dos alunos.
Encontrei um bilhete dentro, mas não consegui ler. Tirei fotos e guardei junto com o livro.

Localização: (armário 1, caixa ...).
PRATELEIRA 1 A

Identificado por: [redacted]

Data: 21/06



Ficha de inventário.

Número: 707

Localização: CAIXA (pequena) Trimath - Quadrimath

CAIXA (grande) C.

Tipo de documento:

( ) apostila
( ) caderno
( ) catálogo
( ) cartão
( ) jornal/recorte de jornal
( ) plano de atividades
( ) plano de ensino
( ) plano de trabalho
( ) programa de disciplina
( ) programa de ensino
( ) resumo
( ) revista
( ) texto
( ) trabalho em evento
(X) trabalho/atividade de aula
( ) tradução
( ) outros
( ) ____________

Tipo de suporte e material:

( ) Datilografado em papel sulfite/ofício
(X) Datilografado em matriz de mimeografo
( ) Impresso em papel jornal
( ) impresso em papel sulfite/ofício
( ) Manuscrito em matriz de mimeografo
( ) Manuscrito em papel sulfite/ofício
(X) outros
(X) papel manteiga.

Estado de conservação:

( ) Bom (X)Regular ( )Ruim ( ) Péssimo

Descrição do documento:

Título: Fichas de Trimath, Quadrimath.

Autoria/organização:

Traduzido por/organizado por:

Data:

Observações relevantes: Fichas com atividades como material.

Identificado por: [redacted]
Data: 19/03/2018.

Figura 4: Ficha de identificação documento livro

Fonte: acervo bibliográfico do IE Flores da Cunha

Figura 5: Ficha de inventário documentos variados

Fonte: acervo bibliográfico do IE Flores da Cunha

Levando em consideração as descrições dos materiais e observações descritas nas fichas, será possível elaborar critérios para avaliação inicial dos documentos. Esta avaliação inicial foi feita pela bolsista de apoio técnico da área de Biblioteconomia, que trouxe uma visão acerca de quais documentos são históricos, raros ou preciosos no âmbito da avaliação de acervos especiais. Futuramente, com apoio de publicações da área de preservação de acervos e de memória institucional, serão elencados critérios para cada uma das categorias (precioso, histórico, raro), como: recorte temporal, relevância do documento, relevância da edição, etc.

Posteriormente, ocorre a seleção de documentos que serão digitalizados. Essa seleção leva em conta seu valor científico, histórico, suas características relativas à preciosidade ou raridade, além do estado de conservação. Pois, para garantia de qualidade da imagem digital, é necessário que os documentos sejam legíveis, além de terem condições de passar pelo processo de digitalização sem sofrerem danos físicos.

A avaliação será feita tento em mente conceitos da área de gestão e preservação de acervos, levando em conta as peculiaridades de cada documento. Segundo Rodrigues (2006, p. 115): “O uso de critérios de raridade bibliográfica justifica-se pelo fato de que tais livros merecem tratamento diferenciado, visto seu valor histórico, cultural, monetário, e mesmo a dificuldade em obterem-se exemplares”. Portanto, considera-se importante a elaboração de uma política de avaliação com base em literatura científica da área, que servirá de guia para elencar critérios que serão adotados na avaliação de raridade, preciosidade e historicidade dos documentos.

O passo seguinte, após análise e avaliação, será a seleção definitiva de documentos que serão digitalizados e, se possível, disponibilizados no repositório institucional da Universidade Federal do Rio grande do Sul - UFRGS, o Lume.

3 I MEMÓRIA DIGITAL

Os estudos sobre memória digital e repositórios institucionais têm apresentado crescimento nos últimos anos, visto que têm se valorizado cada vez mais a importância da preservação da documentação e da memória institucional. Nesse sentido, os repositórios institucionais representam a garantia da salvaguarda de documentos para as instituições e, consequentemente, para a salvaguarda da memória institucional. A digitalização de documentos é parte essencial neste processo e sua disponibilização e acessibilidade são ações efetivas que contribuem para a alimentação dos repositórios institucionais.

Os repositórios institucionais são essenciais não só para a garantia da memória das instituições, mas também de comunidades as quais agrega. Conforme Camargo e Vidotti:

> [...] repositórios digitais podem ser considerados como locais de armazenamento de coleções de uma determinada instituição ou comunidade e utilizam sistemas de informação que possibilitam funções como: criação de comunidades e de coleções, cadastro de usuários, gerenciamento de políticas e conteúdos e auto-arquivamento de documentos (CAMARGO; VIDOTTI, 2009, p. 55).

A digitalização dos documentos e posterior disponibilização on-line, em repositório institucional, é uma forma de preservá-los, de torná-los memória digital e, desta forma, não deixá-los esquecidos. Pois, de acordo com Holanda (2011, p. 127): “Podemos aludir o saber, a lembrança e a preservação da memória ao que é conhecido, assim como a ignorância, o esquecimento e a não preservação de algo que nunca existiu ao que é desconhecido”. Da mesma forma, como lembra Santarem, o ambiente digital serve para divulgar e preservar qualquer tipo de documento:

> A sociedade convive atualmente com uma infinidade de interfaces tecnológicas que permitem não apenas a preservação de registros informacionais em redes de comunicação, mas também o seu acesso instantâneo e constante. Assim, o ambiente digital tem sido largamente utilizado como recurso para

preservar e ao mesmo tempo divulgar qualquer tipo de registro documental (SANTARÉM, 2017, p. 14).

No acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação Flores da Cunha existem muitos trabalhos de alunas e textos elaborados por professores para serem utilizados como material didático. São documentos manuscritos, mimeografados, datilografados em diversos suportes, como papel sulfite, cartolina, matriz mimeográfica, entre outros.

Estes documentos constituem-se em rico material para estudo e pesquisa, pois são únicos, são preciosos para a memória institucional, preciosos para estudos e pesquisa na área de memória documental, preciosos para estudos e pesquisa sobre a história do ensino e, principalmente, preciosos para a construção da memória do ensino da matemática no Rio Grande do Sul.

Para que esses documentos, após assegurados os direitos autorais para sua divulgação, tornem-se transmissores de informação e conhecimento, para que constituam efetivamente memória digital, é necessário que estejam depositados em repositório institucional seguro e confiável. De acordo com Pavão, Caregnato e Rocha: "Um repositório digital confiável deve ser capaz de manter autênticos os materiais digitais, de preservá-los e prover acesso a eles pelo tempo necessário" (PAVÃO; CAREGNATO; ROCHA, 2016, p. 422).

O repositório institucional Lume conta com equipe responsável pela manutenção e controle dos materiais digitais, tornando-o assim um repositório confiável e seguro. A disponibilização do acervo bibliográfico do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação Flores da Cunha e do Acervo Memória da Associação de Ex-Alunas do IE no Lume garantirá a preservação e acesso aos documentos lá depositados e possibilitará a criação da memória digital destas instituições.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo pautou-se no desdobramento de atividades e nas decisões tomadas até o momento por parte da bolsista de apoio técnico para a elaboração do instrumento de descrição dos documentos soltos, a ficha de Inventário, pertencentes ao Acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação Flores da Cunha e do Acervo Memória da Associação de ex-alunas do IE, que são objetos de estudo do projeto de pesquisa CNPq "Estudar para ensinar: práticas e saberes matemáticos nas escolas normais do Rio Grande do Sul (1889- 1970)". Também fez-se referência às atividades de higienização, preservação e descrição dos documentos, além de citar e análise documental com vistas à memória digital.

Ressaltou-se a importância dos repositórios institucionais como locais de salvaguarda de documentos e de memória digital não só das instituições, como também da sociedade em geral, considerando o repositório institucional da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o Lume, como repositório seguro e confiável.

Existe ainda a necessidade de formular critérios para a seleção do que será digitalizado, para isso é necessário apropriação de conhecimnto disponível na literatura científica da ciência da informação. Trata-se de um projeto de extrema relevância nas áreas do ensino, do ensino de matemática, da história do ensino no Rio Grande do Sul, e também do estudo da documentação, preservação de acervo e de memória digital. Ainda há muito a ser estudado e analisado, pois este projeto traz desafios e questionamentos para pesquisas nas áreas as quais abrange.

Reforça-se a importância deste projeto para estudo e pesquisa na área da ciência da informação, posto que o desafio de preservar documentos em meio digital passa por várias fases que contemplam desde o tratamento físico do documento até sua disponibilização em acesso aberto.

REFERÊNCIAS

BÚRIGO, E. Z. *et al.* **Estudar para Ensinar**: práticas e saberes matemáticos nas escolas normais do Rio Grande do Sul (1889-1970). Projeto de Pesquisa. CNPq. Porto Alegre, 2016. 41 f.

CAMARGO, L. S. A. de; VIDOTTI, S. A. B. G. Arquitetura da informação para repositórios científicos digitais. In.: SAYÃO, L. *et al.* (Org.). **Implementação e gestão de repositórios institucionais**: politicas, memória, livre acesso e preservação. Salvador: EDUFBA, 2009. p. 55-82.

DODEBEI, V. O sentido e o significa do documento para a memória digital. In: FREITAS, L. S. de; MARCONDES, C. H.; RODRIGUES, A. C. (Org.). **Documento**: gênese e contextos de uso. Niterói: EdUFF, 2010. Vol. 1. p. 81-96.

HOLANDA, A. B. de. Esquecimento: um novo enigma para os estudos sobre memória na ciência da informação. In.: PINHO, F. A. *et al.* (Org.). **Gestão da informação**: preservação da memória. Recife: Nectar, 2011. p. 127-138.

MERLO, F. Documento, história e memória: a importância da preservação do patrimônio documental para o acesso à informação. **Informação & Informação**, Londrina, v. 20, n. 1, p. 26-42, jan./abr. 2015. Disponível em: <http://www.uel.br/revistas/uel/index.php/informacao/article/view/18705/pdf_43>. Acesso em: 22 mar. 2018.

PAVÃO, C. G.; CAREGNATO, S. E.; ROCHA, R. P. da. Implementação da preservação digital em repositórios: conhecimento e práticas. **RDBCI: Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação**, Campinas, v. 14, n. 3, p. 407-425, set. 2016. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/rdbci/article/view/ 8646326/pdf>. Acesso em: 24 mar. 2018.

PINHEIRO, M. I. da S. *et al.* Pela preservação da memória documental como uma garantia do acesso à informação, à memória e à cidadania. **Revista ABC**, Florianópolis, v. 14, n. 2, p. 513-530, jul./dez. 2009. Disponível em: <https://revista.acbsc.org.br/racb/article/view/694>. Acesso em: 20 mar. 2018.

RODRIGUES, M. C. Como definir e identificar obras raras? Critérios adotados pela Biblioteca Central da Universidade de Caxias do Sul. **Ciência da Informação**. Brasília, v. 35, n. 1, p. 115-121, 2006. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0100-19652006000100012>. Acesso em: 23 mar. 2018.

SANTAREM, L. A. **Digitalização dos acervos documentais:** novas perspectivas para a memória da Universidade Federal do Rio Grande do. 2017. 108 f. Dissertação (Mestrado em Memória Social e Bens Culturais) - Programa de Pós-Graduação em Memória Social e Bens Culturais da Universidade La Salle – UNILASALLE, Canoas, 2017. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/171712/001056935.pdf?sequence=1>. Acesso em: 23 mar. 2018

CAPÍTULO 8

UM HISTÓRICO DE PROPOSTAS PARA O ENSINO DE CÁLCULO

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 05/03/2021

Guilherme Porto
Instituto Federal Farroupilha, Campus São Borja
São Borja – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/5735653099270140

Débora Marília Hauenstein
Universidade Federal de Pelotas, Faculdade de Educação
Pelotas – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/3461042376308753

RESUMO: Neste artigo investigamos propostas direcionadas ao baixo rendimento dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral nas instituições de ensino superior. Este problema é fundamentado pelos altos índices de não-aprovação apresentados na disciplina. Construímos um histórico das medidas mais significativas que já foram formuladas e aplicadas, como a reestruturação dos currículos e a modernização das metodologias utilizadas em sala de aula. Tecemos uma análise dessas propostas com o intuito de contribuir para a melhoria do panorama atual do ensino cálculo.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial e Integral, Índices de reprovação, Reforma curricular, Uso de tecnologias.

A HISTORY OF PROPOSALS FOR TEACHING CALCULATION

ABSTRACT: In this article we investigate proposals directed to the low performance of Differential and Integral Calculus courses in higher education institutions. This problem is substantiated by the high rates of non-approval presented in the discipline. We built a history of the most significant measures that were formulated and applied, such as the restructuring of curricula and the modernization of methodologies used in the classroom. We make an analysis of these proposals in order to contribute to the improvement of the current panorama of teaching calculus.

KEYWORDS: Differential and integral calculus, Failure indices, Curricular reform, Use of technologies.

1 I INTRODUÇÃO

No presente artigo investigamos propostas que contribuem com o fortalecimento do ensino nas disciplinas de cálculo diferencial e integral nas instituições de ensino superior. Como contribuição original, construímos um histórico com as medidas mais significativas que já foram formuladas e aplicadas, bem como analisamos os resultados obtidos em cada uma.

Fundamentamos a relevância dessa pesquisa demonstrando que a problematização do ensino de cálculo está cada vez mais presente nos eventos acadêmicos e científicos dedicados ao estudo da educação matemática. Além disso, apresentamos dados estatísticos que confirmam o baixo rendimento das disciplinas de cálculo nas últimas décadas, constituindo uma preocupação para as universidades e uma temática relevante para os pesquisadores.

Seguindo a linha de pesquisa de Ávila (1991) e Duclos (1992), discutimos a viabilidade de que os conteúdos do ensino médio sejam trabalhados de forma integrada com conceitos introdutórios do cálculo, dessa forma, suavizando a transição para o ensino superior.

Discutimos os cursos introdutório de cálculo, como o pré-cálculo apresentado por Doering (2004), visto que representam práticas pedagógicas desenvolvidas pelas universidades com intuito de ambientar o aluno proveniente do ensino médio ao ambiente acadêmico onde o cálculo é desenvolvido.

A modernização das práticas didáticas, incentivada por Camargo (2010), passa pelo reconhecimento de que novas tecnologias estão presentes no cotidiano de alunos e professores, sendo assim, precisam ser aproveitadas para tornar o ensino mais significativo. Nesse sentido, estudamos novas metodologias que aliem o uso da tecnologia ao ensino do cálculo e como essas práticas podem melhorar o rendimento da disciplina.

O restante do trabalho está organizado como segue. Na próxima seção, apresentamos as justificativas para o desenvolvimento deste trabalho, com ênfase para a constatação dos elevados índices de reprovação presentes nas disciplinas de cálculo. A seção 3 é dedicada ao estudo e análise das propostas pedagógicas elaboradas para contribuir com a melhoria do ensino de cálculo, sendo dividida em subseções que abordam tópicos como a reestruturação dos currículos do ensino médio e superior e a modernização das metodologias utilizadas em sala de aula.

Como conclusão, tecemos nossas observações sobre o panorama do ensino do cálculo construído ao longo do trabalho. Debatemos o baixo rendimento apresentado pelos alunos e realizamos uma análise qualitativa sobre as medidas propostas para melhorar o desempenho dos estudantes. Com isso, esperamos dar nossa contribuição para o fortalecimento do ensino de cálculo.

2 I OS ÍNDICES DE REPROVAÇÃO COMO PROBLEMA DE PESQUISA

Desde seu surgimento, o cálculo diferencial e integral vem desempenhando papel fundamental no desenvolvimento de diversas ciências e tecnologias. Suas aplicações estão presentes em praticamente todos os segmentos, indo desde a análise de dados para estudos demográficos e sociais até a elaboração de algoritmos e teorias abstratas na física, engenharia e computação.

Os programas de ensino de cálculo diferencial e integral das instituições de ensino superior tem sido um dos principais focos de pesquisa da educação matemática ao longo das últimas décadas. Utilizando os dados coletados por Fiorentini (1993) e Cury (2009), organizamos um sumário que demonstra que essa temática está cada vez mais presente em eventos acadêmicos dedicados ao estudo de matemática.

- **1991:** apenas 10 produções acadêmicas nacionais de educação matemática abordavam o ensino de cálculo.
- **1992 – 2001:** 42% dos artigos presentes nos anais do Congresso Nacional de Engenharia (COBENGE) eram dedicados ao tema.
- **2001 – 2004:** 36% das pesquisas apresentadas no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) falam sobre o ensino da disciplina.
- **2002 – 2005:** 19% dos artigos do Congresso Nacional de Matemática Aplicada (CNMAC) tratam sobre o estudo do cálculo.
- **2002 – 2006:** 49% dos trabalhos do Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM) são dedicados à temática.

Sendo assim, é inegável que o processo de ensino e aprendizagem do cálculo tem relevância para alunos, professores e pesquisadores e, portanto, está sendo constantemente problematizado, investigado e avaliado para que possa ser melhorado.

Com intuito de problematizar os resultados que estão sendo obtidos pelo panorama atual do ensino de cálculo nas universidades, pesquisadores tem apontado o baixo rendimento apresentado pelos alunos na disciplina como uma questão preocupante que necessita ser estudada.

Rafael e Escher (2015) apresentam um estudo de caso onde realizam um levantamento estatístico dos índices de aprovação e reprovação na disciplina de cálculo nos anos de 2013, 2014 e 2015 em uma universidade privada do estado do Rio de Janeiro. Por meio dos dados coletados, os autores mostram que a quantidade de alunos não aprovados em cada semestre está entre 30% e 50% do total alunos egressos durante o período avaliado, caracterizando um índice de não aprovação superior ao de outras disciplinas.

Cabe destacar que o problema não é exclusivo do panorama atual de ensino, uma vez que também vem sendo observado ao longo das últimas décadas. Já em 1995, a Sociedade Brasileira de Matemática demonstrou estar preocupada com a situação do ensino de cálculo nas universidades nacionais, publicando em um de seus boletins informativos uma nota alertando sobre os altos índices de repetência.

Em 1999, Barufi realizou um estudo quantitativo e qualitativo sobre o rendimento das turmas de cálculo diferencial e integral da Universidade de São Paulo (USP) no período entre 1990 e 1995, demonstrando que os índices de reprovação estavam entre 20% e 75%. Rezende (2003) realiza um estudo mais atual, utilizando como base os dados coletados nas turmas da Universidade Federal Fluminense (UFF) no período de 1996 a 2000, e observa resultados ainda mais alarmantes, constatando que as taxas de reprovação estavam entre 45% e 95%.

Analisando os índices de não aprovação das instituições de ensino superior estrangeiras, nos conscientizamos de que o fracasso no processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral não é exclusivo das universidades nacionais.

O volume 98 da revista American Mathematical Monthly (1991) mostra que nos EUA, a cada ano, aproximadamente 600 mil pessoas se matriculam em disciplinas de cálculo em universidades americanas, cerca de 300 mil desses estudantes realizam a matéria de cálculo em cursos de engenharia e semelhantes, e uma quantidade menor do que a metade é aprovada ao final do semestre. Para mais informações sobre estudos internacionais dessa temática, recomendamos os autores David Tall (University of Warwick – Reino Unido), Anna Sierpinska (Concordia University - Canadá) e James Robert Leitzel (Duke University - EUA).

As pesquisas estudadas demonstram que realidades idênticas ocorrem em momentos e locais distintos, bem como em instituições de ensino superior públicas e privadas. Sendo assim, podemos constatar que os problemas apresentados constituem uma mazela enraizada no histórico da disciplina durante as últimas décadas. Por fim, concluímos que o ensino de cálculo necessita ser intensamente investigado e avaliado para que possamos melhorar o rendimento dos alunos e docentes.

3 | AS CAUSAS E CONSEQUÊNCIAS DO BAIXO RENDIMENTO

Oliveira *et al* (2018) mapearam os trabalhos que abordam as problemáticas do ensino de cálculo realizados no período de 2010 a 2018, com isso, identificaram que as principais causas apontadas para o baixo rendimento na disciplina são:

- A defasagem dos conhecimentos por parte dos alunos oriundos do ensino médio;
- Falhas na estrutura curricular dos programas de cálculo diferencial e integral das instituições de ensino superior;
- A defasagem das metodologias aplicadas ao ensino de cálculo.

Além disso, os autores também constataram que as principais medidas tomadas para sanar os problemas de aprendizagem do conteúdo são:

- A inserção do cálculo no Ensino Médio;
- Realização de cursos preparatórios para introdução e desenvolvimento do cálculo no ensino superior;
- Metodologias de ensino que façam o uso da tecnologia como recurso pedagógico.

É conveniente observar que cada uma das medidas tomadas para sanar os problemas com o ensino de cálculo é direcionada para tratar ao menos uma das suas possíveis causas.

Como contribuição original dessa pesquisa, elaboramos um histórico com algumas das principais medidas já propostas para alterar o panorama que o ensino de cálculo tem vivenciado nas últimas décadas. Além disso, estudamos e analisamos os resultados obtidos por algumas das aplicações dessas propostas.

Primeiramente, debatemos os trabalhos de pesquisadores que propõem uma reforma na estrutura curricular atual, de forma que tópicos introdutórios de cálculo possam ser abordados durante o ensino médio. Em seguida, apresentamos os diferentes programas de apoio pedagógico realizados nas universidades para auxiliar os alunos nas disciplinas de cálculo. Por fim, estudamos metodologias de ensino que contextualizam a prática docente com o uso das novas tecnologias da informação integradas ao ensino dos conteúdos da disciplina.

Esperamos que nossa análise dessas propostas possa futuramente contribuir com melhorias na reestruturação dos currículos das disciplinas de cálculo, no processo de aprendizado dos alunos e nas metodologias de ensino empregadas pelos docentes.

3.1 Reforma Curricular: A Introdução do Cálculo no Ensino Médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) apontam que os conteúdos vistos no ensino médio devem preparar o aluno para continuar seus estudos em nível superior. Segundo Castro (2009), o conteúdo de funções é um dos mais problemáticos para os alunos e, ao mesmo tempo, é um dos mais importantes para a estruturação dos conteúdos do cálculo diferencial e integral. Portanto, as deficiências provenientes do ensino médio precisam ser superadas para um melhor desenvolvimento dos estudos no ensino superior.

O tempo de transição entre a conclusão do ensino médio e o ingresso no ensino superior é, geralmente, de poucos meses. Sendo assim, não é plausível supor que em tão pouco tempo ocorra um desenvolvimento intelectual tão significativo que justifique o ensino do cálculo apenas na educação universitária. Sendo assim, podemos inferir que é possível abordar tópicos introdutórios da disciplina ainda no fim do ensino médio.

Ávila (1991, p.6-7) analisou a estrutura curricular do ensino médio e criticou sua organização, observando que "[...] a ideia de que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados." Além disso, propôs mudanças significativas no ensino de funções ao declarar que "[...] o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções".

Duclos (1992) também propõe uma reforma substancial no currículo do ensino médio para que ele seja integrado ao desenvolvimento dos tópicos de cálculo do ensino superior. O autor defende que os estudos de funções e polinômios podem ser articulados com a introdução de tópicos práticos de limites e derivadas, tornando o estudo mais significativo devido a importância dos métodos aprendidos.

Ávila (2006) afirma que os professores cumprem programas curriculares longos e fragmentados que prejudicam o processo de aprendizagem. Duclos (1992) e Ávila (2006) defendem que a articulação do conteúdo com tópicos de cálculo pode contribuir para o exercício docente, uma vez que possibilita abordagens mais significativas. As aplicações práticas do cálculo podem despertar o interesse dos alunos e motivar o estudo. O conceito de derivada, por exemplo, pode ser aliado ao estudo da cinemática na disciplina de física, demonstrando sua utilidade em um contexto interdisciplinar.

Os argumentos apresentados legitimam a introdução do estudo de cálculo no ensino médio. A proposta é justificada pela transição conturbada entre o ensino médio e o superior, que pode ser considerada uma das possíveis causas dos elevados índices de repetência nas disciplinas de cálculo. Além disso, demonstramos que a viabilidade de sua aplicação está associada com a construção de um novo currículo, que permita um ensino mais integrado com as aplicações práticas que serão foco de estudo no ensino superior.

3.2 Programas Universitários de Apoio Pedagógico

Avaliações dos estudantes do ensino médio, como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), apontam que muitos alunos concluem essa etapa com graves deficiências no aprendizado da Matemática (CASTRO, 2009). Como já foi dito, tal condição dificulta a continuidade dos estudos em nível superior.

Cientes de como tal situação afeta negativamente o desempenho das turmas de cálculo, as universidades têm criado políticas de ensino voltadas tanto para a complementação dos estudos necessários para o ingresso no ensino superior, quanto para reforçar os conteúdos trabalhados nas disciplinas universitárias. Tais medidas têm como objetivo fornecer melhores condições para que o aluno realize a disciplina de cálculo e obtenha um bom desempenho.

A Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) oferece o curso de Pré-Cálculo semestralmente em período anterior ao início das aulas de cálculo. Tal medida tem como público-alvo os alunos oriundos do ensino médio que apresentaram baixo desempenho na prova de matemática do vestibular. O curso tem como objetivo desenvolver os conteúdos que são pré-requisitos necessários para a realização da disciplina de cálculo (DOERING, 2004).

A UFRGS também conta com um Programa de Apoio à Graduação (PAG-Cálculo), oferecido durante o curso da disciplina de cálculo. Seu público alvo são os alunos que apresentaram baixo desempenho nas avaliações realizadas. O programa tem como objetivo reforçar os conteúdos trabalhados por meio de aulas de revisão (DOERING, 2004).

Muitas universidades oferecem durante todo o ano programas de monitoria acadêmica dedicados ao cálculo, geralmente em turno inverso ao da realização das aulas. Seu público-alvo são os alunos que tenham interesse em esclarecer dúvidas sobre os conteúdos trabalhados na disciplina. No programa, os alunos que concluíram a disciplina com bom desempenho auxiliam no esclarecimento das dúvidas daqueles que estão cursando a mesma, sempre sob a orientação de um professor (RAFAEL; ESCHER, 2015).

Os cursos e programas de apoio pedagógico oferecidos pelas universidades possuem alguma eficiência em melhorar os índices de aprovação das disciplinas de cálculo. Essas propostas atuam recuperando os alunos que apresentam alguma defasagem de conhecimento proveniente do ensino médio ou que possuam dificuldades para compreender os conteúdos desenvolvidos ao longo do curso durante as aulas teóricas.

3.3 Tecnologias da Informação Aliadas ao Ensino de Cálculo

Do ponto de vista discente, os principais fatores que contribuem para as dificuldades de aprendizado em cálculo têm sua origem nas práticas didáticas defasadas que ainda são utilizadas. Camargo (2010) incentiva a produção de metodologias mais modernas e que possuam a capacidade de reformar o panorama do processo de ensino-aprendizagem das disciplinas de cálculo.

O surgimento de novas tecnologias exige que o processo de ensino seja integrado ao uso das mesmas, pois isso torna a aula mais atrativa, conectando a realidade escolar com o cotidiano do aluno. Palis (2010) afirma que a realização de práticas didáticas estruturadas com o uso da tecnologia permite a construção de uma aprendizagem mais imersiva, possibilitando que o aluno realize experimentos que produzem um conhecimento repleto de significado.

R. Talbert (2010) propõe a utilização do ambiente informatizado Wolfram Alpha para elaboração de práticas de ensino dedicadas ao cálculo. O autor produziu o vídeo "*Wolfram|Alpha for calculus students*" como um recurso didático, nele são apresentadas diversas funcionalidades que podem ser empregadas em metodologias de ensino voltadas para a construção dos significados associados aos conteúdos da disciplina.

Junior (2015) defende que a utilização de ferramentas visuais pode auxiliar na compreensão dos tópicos mais abstratos presentes no cálculo. O autor utiliza o software Geogebra para trabalhar conceitos e aplicações relacionados com o estudo da derivada, desenvolvendo atividades que propõem a exploração do recurso visual por meio da construção e análise de gráficos. Como avaliação, ele aponta que a visualização gráfica permite que os alunos reformulem suas interpretações errôneas dos conceitos abstratos trabalhados.

Com intuito de investigar a efetividade das tecnologias em sala de aula, Luca (2014) realizou um comparativo entre o ensino tradicional do cálculo (quadro-negro) e o ensino por meio da utilização do software Maple. O pesquisador ministrou aulas utilizando separadamente os dois recursos e avaliou o desempenho de cada um por meio da realização de provas e listas de exercícios. Por fim, o autor obteve evidências de que o uso do software contribui para a melhoria do desempenho dos estudantes e para uma compreensão mais significativa do conteúdo.

Os trabalhos discutidos aqui defendem que o uso de recursos computacionais torna o processo de ensino-aprendizagem do cálculo mais efetivo. A utilização de novas metodologias é justificada pela necessidade de modernização do exercício docente, uma vez que ele deve estar integrado ao cotidiano construído pelo avanço tecnológico. No entanto, destacamos que a falta de condições de acesso à tecnologia apropriada ainda é um tabu para muitos estudantes e muitas universidades.

4 I ANÁLISE E CONCLUSÕES

Buscando compreender o que produz o baixo rendimento das disciplinas de cálculo, analisamos suas possíveis causas e concluímos que a falta dos conhecimentos que são pré-requisitos para o ingresso no ensino superior, a pouca motivação do aluno para o estudo, a incapacidade cognitiva para compreensão de determinados conceitos e problemas de ordem social e pedagógica são alguns dos fatores mais preocupantes.

Atualmente, o aprendizado da matemática é estruturado em camadas que, conforme o aluno avança entre as etapas de ensino, vão sobrepondo os conhecimentos anteriores e desenvolvem a capacidade cognitiva que possibilita a compreensão dos conceitos mais complexos. Neste sentido, as propostas de reformulação e articulação entre os currículos do ensino médio e superior podem modernizar essa estrutura de aprendizado, com intuito de produzir um modelo que apresente melhores resultados para o ensino do cálculo.

As universidades e professores de cálculo têm trabalhado para melhorar o rendimento da disciplina por meio da realização de cursos e programas. No entanto, essas medidas apenas remediam situações enraizadas na fundamentação do processo de aprendizado da matemática e na estruturação dos currículos de ensino médio e superior. Acreditamos que os esforços devem ser direcionados para evitar o surgimento desses problemas ao invés de tentar consertá-los.

As pesquisas apresentadas neste artigo demonstram que a modernização das práticas pedagógicas, aliadas ao uso da tecnologia, podem melhorar o rendimento das disciplinas de cálculo. No entanto, apenas computadores não resolvem problemas de ensino, é necessário problematizar o uso de tecnologias como ferramentas de ensino para que possam integrar a atividade docente.

Destacamos que, mesmo que as disciplinas de cálculo ainda apresentem altos índices de não aprovação, é possível ver uma melhoria gradual decorrente da aplicação das propostas estudadas. Reconhecemos que esse é um trabalho árduo que está em sua fase inicial de desenvolvimento, mas que possui potencial para melhorar a qualidade da educação universitária como um todo, fortalecendo cada vez mais o ensino do cálculo.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.18, p.1-9, 1991.

ÁVILA, Geraldo. **Limites e Derivadas no Ensino Médio. Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro n. 60, p. 30–38, 2006.

BARUFI, Maria C. Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**, 1999**.** Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1999.

CAMARGO, Vera Lúcia Vieira. **A invenção do mapa de mercator no séc. XVI: subsídios históricos para o ensino de cálculo.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais** [...]. Salvador: SBEM, 2010.

CASTRO, Maria Helena Guimarães de. **Sistemas de avaliação da educação no Brasil: avanços e novos desafios. São Paulo em Perspectiva,** São Paulo, v. 23, n. 1, p. 5-18, jan./jun. 2009.

CURY, Helena Noronha. **COBENGE e ensino de disciplinas matemáticas nas Engenharias: um retrospecto dos últimos dez anos.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 30., 2002, Piracicaba. **Anais** [...]. Piracicaba: Unimep, 2002.

DOERING, Claus Ivo; NÁCUL, Liana Beatriz Coste; DOERING, Luísa Rodriguez. **O programa Pró-Cálculo da UFRGS.** In: CURY, Helena Noronha. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 201-223.

DUCLOS, R. C. **Cálculo no Segundo Grau. Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 20, p. 26-30, 1992.

FERRINI-MUNDY, Joan; GRAHAM, Karen Geuther. **An overview of the calculus curriculum reform effort: Issues for learning, teaching, and curriculum development. The American Mathematical Monthly**, v. 98, n. 7, p. 627-635, 1991.

FIORENTINI, Dario. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação**,1994. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1994.

JUNIOR, José Cirqueira Martins. **Ensino de derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra**, 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 2015.

LUCA, Nelson Cláudio Siqueira de. **Tecnologias aplicadas ao ensino de cálculo nas engenharias: uma pesquisa quase experimental com uso de software maple**, 2014. Dissertação (Mestrado) - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, 2014.

OLIVEIRA, Ricardo Augusto; GONÇALVES, William Vieira; PIASSON, Diego. **O uso do Geogebra para o ensino de cálculo diferencial e integral, um mapeamento de suas publicações. Revista Thema**, v. 15, n. 2, p. 466-484, 2018.

PALIS, Gilda. **A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais** [...]. Salvador: SBEM, 2010.

RAFAEL, Rosana Cordeiro; ESCHER, Marco Antonio. **Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida.** In: Encontro Mineiro de Educação Matemática, 7., 2015. Juiz de Fora. **Anais** [...]. Juiz de Fora: SBEM, 2015.

REZENDE, Wanderley Moura**. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**, 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2003.

TALBERT, Robert. **Wolframl Alpha for calculus students.** Wolframl Alpha Research Company, 2010. Video (8 min).

CAPÍTULO 9

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS USANDO PYTHON

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 04/02/2021

Filipe Alexandre Moraes Eismann
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria – RS
http://lattes.cnpq.br/0984649117272691

Pedro Fellipe Martins Pires
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria – RS
http://lattes.cnpq.br/9977903603771307

Tiago Martinuzzi Buriol
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria – RS
http://lattes.cnpq.br/5437721454089032

RESUMO: As equações diferenciais são amplamente utilizadas em matemática e física, com destaque em aplicações de engenharia por serem usadas para modelar matematicamente diversos problemas em termodinâmica e mecânica dos sólidos e fluidos. Existem diferentes técnicas, nem sempre fáceis de serem aplicadas, para obter soluções para essas equações, podendo ser métodos analíticos (fornecem a solução exata), ou métodos numéricos (fornecem soluções aproximadas). Neste trabalho será apresentada a implementação de um programa computacional para obter soluções numéricas para as Equações da Condução de Calor e de Laplace, ambas equações diferenciais parciais, pelo método das diferenças finita. Foi utilizada a linguagem de programação aberta Python com o propósito de verificar a funcionalidade e versatilidade desta linguagem como uma alternativa a pacotes comerciais de código fechado. São apresentados resultados obtidos por meio da abordagem por solução iterativa (através de uma única equação iterativa, com erro relativo predefinido). Os resultados obtidos se mostraram satisfatórios para o propósito deste trabalho, uma vez que foi possível demonstrar a aplicabilidade dessa ferramenta gratuita e livremente disponível para estudantes de engenharia ou profissionais, na resolução dos problemas apresentados.

PALAVRAS-CHAVE: Métodos Numéricos, Equações Diferenciais, Método das Diferenças Finitas, Python.

NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS THROUGH THE FINITE DIFFERENCES METHOD USING PYTHON

ABSTRACT: Differential equations are largely employed in physics and mathematics, being useful in engineering mainly due to their application in developing mathematical models and solving problems in the fields of thermodynamics and both solid and fluid mechanics. There are techniques, which are not always easy to implement, to solve such equations, these being analytical methods (that provide an exact solution) and numerical methods (that provide approximate solutions). In this project, the implementation of a computer program to obtain numerical solutions through the finite diferences method for the Heat and Laplace

equations, both partial diferencial equations, will be presented. The open-source programming language Python was used in order to verify its functionality and versatility as an alternative to closed-source, commercial tools. The results presented in this work are obtained through an iterative approach (by way of a single iterative equation, with pre-defined associated relative error), and they have shown to be satisfactory for the purpose of this research, since it was possible to demonstrate the applicability of this free-to-use instrument available to students and professionals, in solving these problems.
KEYWORDS: Numerical Methods, Differential Equations, Finite Differences Method, Python.

1 | INTRODUÇÃO

A busca por resolver problemas de engenharia cada vez maiores em complexidade gerou a necessidade de pesquisar, obter e testar soluções para modelos matemáticos de forma rápida e viáveis economicamente. Assim, considerando o fácil acesso a processadores cada vez mais rápidos e a computadores com grande capacidade de memória e armazenamento, os métodos numéricos se tornaram importantes ferramentas para resolução desses modelos matemáticos.

Para estudar e compreender esses fenômenos complexos e obter soluções de problemas práticos de engenharia, geralmente, métodos aproximados são considerados úteis e mais viáveis socioeconomicamente (ARAÚJO, 2017). A fim de estudar e aplicar métodos para equações diferenciais, buscando um melhor equilíbrio de custo e benefício, este trabalho apresenta o resultado de uma pesquisa e do desenvolvimento de programas para resolução numérica de problemas envolvendo as equações de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

e da condução de calor unidimensional:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2}$$

Estas equações são equações diferenciais parciais de segunda ordem com duas variáveis e não-lineares, sendo a de Laplace, elíptica e a da condução de calor unidimensional, parabólica.

Estas equações possuem soluções analíticas conhecidas, porém o foco deste trabalho é a implementação da solução numérica delas na linguagem Python (VAN ROSSUM, 2011) pelo Método das Diferenças Finitas.

2 | METODOLOGIA

O método das diferenças finitas (MDF) é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. A fórmula de aproximação obtém-se usando a função derivada da série de Taylor. Hoje, os MDFs são a abordagem dominante das soluções numéricas de equações diferenciais parciais (BURDEN, 2008).

2.1 Método das Diferenças Finitas

O operador de diferenças finitas para derivada pode ser obtido a partir da série de Taylor para as seguintes funções:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} + \frac{f'''(x)h^3}{6} + o(h^4) \tag{3}$$

e

$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} - \frac{f'''(x)h^3}{6} + o(h^4) \tag{4}$$

onde *h* é um incremento constante na variável independente denominado *passo.*

Portanto, pode-se escrever qualquer derivada de formas distintas como diferenças finitas mais um termo de erro, obtido ao desprezar-se termos de ordem superior (CHAPRA, 2016).

2.2 MDF para a Equação de Laplace

Para solucionar a equação diferencial parcial elíptica (1), as derivadas parciais de segunda ordem são substituídas por diferenças centradas em um ponto:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{5}$$

onde $T_{i,j}$ é a temperatura no ponto da *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna e Δx é o passo na coordenada *x*. Substituindo-se a Equação (5) aplicada nas coordenadas *x* e *y* na Equação (1) e agrupando os termos, obtemos uma equação que relaciona a temperatura de um ponto em função dos quatro nós ao seu redor:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \tag{6}$$

Esta relação, válida para todos os pontos interiores da placa, é conhecida como *equação de diferença de Laplace*. Desta maneira, é desenvolvida uma malha com *n* x *m* nós com espaçamentos Δx e Δy nas coordenadas *x* e *y* respectivamente e, ao aplicar a Equação (6) juntamente com condições de contorno, é obtido um sistema linear com (*n* - 2) x (*m* - 2) equações e (*n* - 2) x (*m* - 2) incógnitas (conforme ilustra a Figura 1), de modo que é possível solucioná-lo numericamente por métodos como *eliminação de Gauss* ou *decomposição LU*. Também é possível resolvê-lo utilizando-se uma relação iterativa para cada equação, *o método de Gauss-Seidel*, que consiste em isolar uma das variáveis de cada equação do sistema e iterar até os valores convergirem.

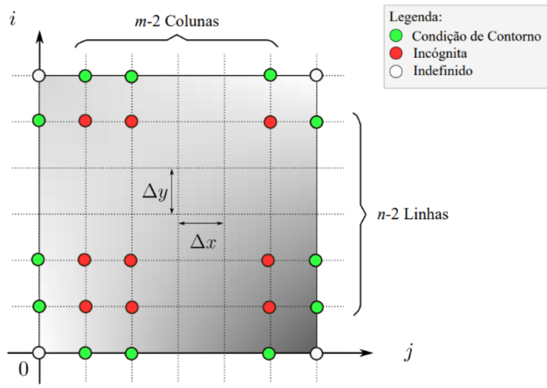


Figura 1: Ilustração da malha para o MDF aplicado à Equação de Laplace. Vale ressaltar que a malha é tecnicamente adimensional.

Fonte: dos autores.

2.3 MDF para a Equação da Condução de Calor

Do mesmo modo que com a equação de Laplace, a equação da condução de calor pode ser resolvida substituindo-se as derivadas parciais por diferenças finitas. Entretanto, devemos agora considerar variações no tempo, bem como no espaço. Devido a isso, devemos tomar em consideração questões como a estabilidade.

A equação de condução de calor exige aproximações para a segunda derivada no espaço e para a primeira derivada no tempo. A primeira é representada da mesma maneira que na equação de Laplace, por uma diferença finita centrada:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \tag{7}$$

onde T_i^l representa a temperatura do i-ésimo elemento no l-ésimo instante de tempo. Uma diferença finita progressiva é usada para obter uma aproximação da derivada no tempo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \tag{8}$$

Substituindo estas equações na equação da condução de calor e reescrevendo, temos

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \lambda\left(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l\right) \tag{9}$$

sendo

$$\lambda = \kappa \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{10}$$

onde κ é a difusibilidade térmica do material. Essa equação é válida para todos os nós interiores da barra. Ela fornece um meio explícito de calcular a temperatura em cada nó em um instante futuro baseado na sua temperatura e na de seus vizinhos no instante atual, de forma iterativa. Nesse tipo de problema haverá duas condições de contorno (uma em cada extremidade da barra) e uma condição inicial, associada à distribuição de temperaturas no instante $t = 0$.

2.4 Condições de Contorno na Derivada (Fluxo de Calor)

A implementação do fluxo de calor na direção longitudinal $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ é realizada com a construção de pontos auxiliares na malha, adjacentes aos contornos onde essa condição é prescrita, expandindo a dimensão da malha. A temperatura desse ponto será variada, de modo que a inclinação da curva de temperatura ao longo da coordenada seja mantida constante no ponto de condição de fluxo. Ao fim das iterações os contornos auxiliares são excluídos da visualização. A Figura 2 mostra o princípio dessa técnica.

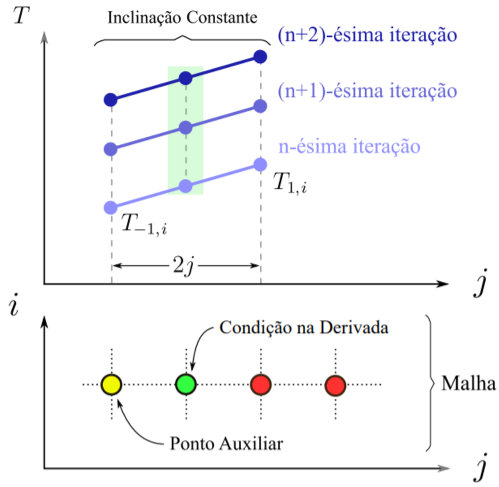


Figura 2: Ilustração dos pontos auxiliares para condições na derivada.

Fonte: dos autores.

A primeira derivada na dimensão x no lado esquerdo, por exemplo, pode ser aproximada pela diferença finita:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{1,i} - T_{-1,i}}{2\Delta x} \tag{11}$$

sendo a derivada $\frac{\partial T}{\partial x}$ fornecida como condição de contorno, a temperatura $T_{-1,i}$ no ponto auxiliar é então determinada por:

$$T_{-1,i} = T_{1,i} - 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} \tag{12}$$

3 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foram desenvolvidos programas para solucionar problemas envolvendo condução de calor em barras unidimensionais e placas bidimensionais. Os códigos dos programas desenvolvidos em Python poderão ser acessados *on-line* no GitHub mantido pelos autores no endereço: https://github.com/Pfmp-pedro/Solucoes-Numericas-para-EDPs-com-Python, e abaixo são mostradas as soluções de alguns exemplos.

3.1 Equação de Laplace

Para a Equação de Laplace, é gerado um mapa de cores representando a distribuição de temperaturas em regime permanente de uma malha bidimensional, permitindo um número arbitrário de nós, dadas com 4 condições de contorno. Essas condições podem ser de temperaturas ou fluxos prescritos, onde os fluxos são as derivadas primeiras da temperatura: $\frac{\partial T}{\partial x}$ nos contornos esquerdo e direito e $\frac{\partial T}{\partial y}$ nos superior e inferior. A solução pode ser obtida tanto pelo método de solução de sistemas como pelo método iterativo, já que ambos foram implementados no caso da equação de Laplace. Na Figura 3, foi utilizada uma malha 70x70 com temperaturas de contorno 100ºC acima, 50ºC à direita, 0ºC abaixo e 75ºC à esquerda, e a solução foi realizada através do método iterativo estipulando-se um erro relativo percentual máximo de 0,01% entre as iterações.

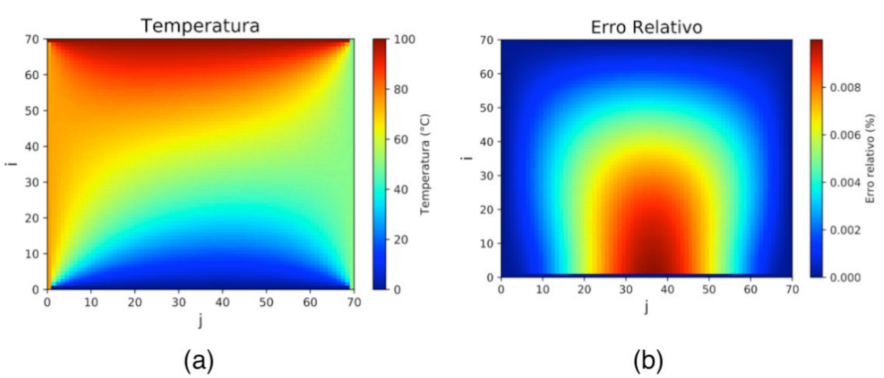
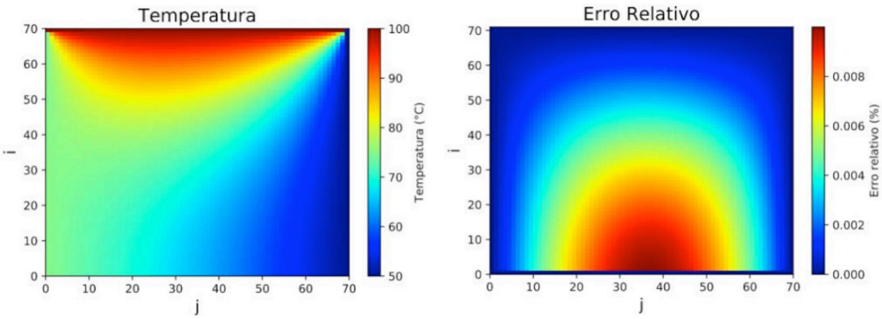


Figura 3: (a) Mapa de cores gerado pela solução iterativa da distribuição de temperaturas em uma malha bidimensional 70x70. (b) Erro relativo entre a penúltima e a última iteração.

Fonte: dos autores.

Já na Figura 4, é mostrado um exemplo de condição na derivada. A mesma placa é discretizada com o mesmo número de elementos e possui condições de contorno semelhantes à anterior exceto que, no contorno inferior, ao invés da temperatura, o fluxo de calor na direção *y* é prescrito como zero. Os resultados mostrados foram verificados e estão de acordo com os obtidos por Chapra (2016) (que usou malha com menos elementos) para os dois exemplos.



(a) (b)

Figura 4: (a) Mapa de cores gerado pela solução iterativa da distribuição de temperaturas em uma malha bidimensional 70x70 com um valor de fluxo zero no lado inferior. (b) Erro relativo entre a penúltima e a última iteração.

Fonte: dos autores.

A escolha da malha 70x70 foi feita principalmente devido ao tempo de execução (em um notebook de mercado, com especificações medianas), que mostrou ser muito mais demorado para uma malha 100x100, levando em torno de 40s de execução enquanto a malha 70x70 levou em torno de 15s, com diferença mínima entre os dois casos.

Nesse contexto, vale apontar o compromisso que sempre existe em qualquer solução numérica entre tempo de execução e qualidade do resultado, onde deve-se sempre analisar a viabilidade de se obter a solução em um domínio mais detalhado ou simplificar o problema, de modo obter resultados preliminares mais rapidamente, facilitando, por exemplo, a tomada de decisões em fases iniciais de um projeto de engenharia.

3.2 Equação da Condução de Calor

Para a equação da condução do calor unidimensional, é obtida a variação da distribuição de temperatura ao longo de uma barra de um dado material em regime transiente com uma dada distribuição (condição) inicial de temperatura e condições de contorno nos lados esquerdo e direito, tais como as discutidas no caso da Equação de Laplace. Neste caso, por ser uma equação transiente, deve-se atentar à convergência e à estabilidade da solução. Garantir a convergência significa que, quando *Δx* e *Δt* tendem a zero, a solução numérica se aproxima da solução real. Garantir a estabilidade significa que erros em qualquer estágio do cálculo não são amplificados, mas, sim, atenuados conforme as iterações progridem. Chapra (2016) comenta que o valor parâmetro λ na Equação 9 está diretamente ligado a esses aspectos e recomenda que, para se garantir a convergência e estabilidade da solução, este valor seja de $\lambda \leq \frac{1}{6}$ para minimizar o erro de truncamento.

A Figura 5 mostra a solução obtida para uma barra de alumínio (κ = 0,835 cm²/s), com 10 cm de comprimento, e temperatura mantida a 100ºC no lado esquerdo e 50ºC do lado direito, com condição inicial de 0ºC em todos os outros pontos internos. A barra foi dividida em segmentos de 2 cm, o passo de tempo foi de Δt = 0,1s (resultando em λ = 0,021) e o tempo total simulado foi limitado a aproximadamente 12s. Novamente, os resultados estão de acordo com o exemplo mostrado por Chapra (2016).

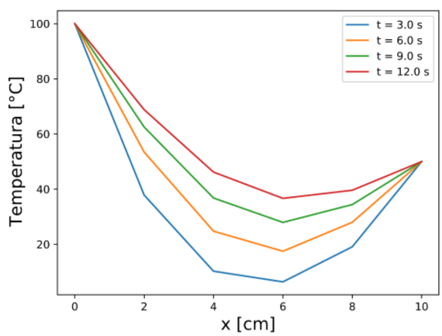


Figura 5: Solução para a condução de calor transiente unidimensional.

Fonte: dos autores.

4 I CONCLUSÕES

O método de diferenças finitas fornece uma boa base para iniciar o estudo de soluções numéricas de equações diferenciais e problemas de valores de contorno, e abre portas para o entendimento de métodos mais complexos, com maiores gamas de aplicações. Os programas desenvolvidos ainda apresentam limitações, neste trabalho por exemplo, para a equação de Laplace não foi inserida mais de uma condição de contorno de fluxo ao mesmo tempo, e para a equação de condução de calor não foi implementado esse tipo de condição.

Há mais equações que podem ser resolvidas via diferenças finitas, como a Equação da Onda, havendo, então, a possibilidade de aplicação do método a mais um tipo de problema.

Como o estudo foi realizado usando a linguagem Python, fica demonstrada a sua utilidade como ferramenta de engenharia devido a sua simplicidade, acessibilidade e potencial. Como continuação deste trabalho, planeja-se disponibilizar online e com livre acesso, todos os programas produzidos juntamente com materiais explicativos do seu funcionamento e uso.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, E. **Métodos Numéricos para Simulação na Engenharia.** Disponível em: https://www.esss.co/blog/metodos-numericos-para-simulacao-na-engenharia/. Acesso em 27 out 2020.

BURDEN, R. **Análise Numérica.** 8. Ed. Boston: Cengage Learning, 2008.

CHAPRA, S. C., CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia.** 7 Ed. New York City: McGraw-Hill, 2016.

VAN ROSSUM, G., DRAKE, F. L. **The Python Language Reference Manual.** Network Theory Ltd, 2011.

CAPÍTULO 10

UM TRATAMENTO DE CÔNICAS E QUÁDRICAS MEDIADO PELO GEOGEBRA

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 14/04/2021

Francisco Odecio Sales
http://lattes.cnpq.br/5358752623192820

RESUMO: O estudo a seguir busca investigar os procedimentos de ensino e aprendizagem da disciplina de Geometria Analítica utilizando o *Software* GeoGebra no estudo de Cônicas e Quádricas, focando o desafio e a possibilidade da implantação do ensino utilizando o *software* livre GeoGebra. As observações visam analisar as diferenças entre o ensino utilizando instrumentos convencionais e o processo de construção do conhecimento desenvolvido por meio do computador. Ao final, pretende-se avaliar se o ensino de desenho por meio dos recursos do *software* GeoGebra, possibilita otimizar a compreensão dos conteúdos de desenho construídos de um modo ativo, favorecendo a interação e colaboração entre alunos, observando como se adaptam a essa modalidade de ensino, fazendo dela um meio de aprendizado de maneira participante, colaborativa e com autonomia.
PALAVRAS-CHAVE: Desenho, GeoGebra, Autonomia, Cônicas, Quádricas.

ABSTRACT: The following study seeks to investigate the teaching and learning procedures of the Analytical Geometry discipline using the GeoGebra Software in the study of Conics and Quadrics, focusing on the challenge and the possibility of implementing teaching using the free GeoGebra software. The observations aim to analyze the differences between teaching using conventional instruments and the knowledge construction process developed through the computer. At the end, it is intended to evaluate whether the teaching of drawing through the resources of the GeoGebra software, makes it possible to optimize the understanding of drawing contents constructed in an active way, favoring the interaction and collaboration between students, observing how they adapt to this modality of education. teaching, making it a means of learning in a participatory, collaborative and autonomous way.
KEYWORDS: Drawing, GeoGebra, Autonomy, Conics, Quadrics.

1 I INTRODUÇÃO

Observando jovens alunos nas diversas situações em que se encontram lidando com equipamentos de tecnologia digital, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), a exemplo, dos telefones celulares, videogames dentre outros, percebe-se que, além de manifestarem grande interesse, demonstram facilidade em compreender as possibilidades oferecidas por tais equipamentos. Os alunos têm grande habilidade em manusear e compreender o funcionamento de tais aparelhos, superando as expectativas de seus professores. Em pouco tempo, começam a explorar as interfaces dos aparelhos e tornam-se capazes de utilizar ampla gama de recursos que oferecem com autonomia e passam a ensinar a outros colegas, pais e pessoas de gerações anteriores.

Tal afinidade se explicita por meio de exemplo convincente que encontra-se na experiência de inclusão digital, denominada “Buraco no muro”, realizada em 1999 por Sugata Mitra(2006), realizada com crianças em um bairro pobre de Nova Deli, na Índia, utilizando computador ligado à Internet para possibilitar que crianças analfabetas pudessem navegar na rede, interagindo com um monitor *“Toutch screen”*. Verificou-se que eles aprenderam a lidar com vários dos recursos disponíveis de maneira autônoma, sem instrução de terceiros, e, em aproximadamente oito horas de uso, estavam ensinando e aprendendo uns com os outros sobre o que já haviam descoberto durante o manuseio e a interação com o equipamento.

Segundo Piaget (1982), a aprendizagem passa por uma interação entre o sujeito da aprendizagem e o objeto, aqui representado como objeto o todo envolvido no processo, o computador com o *software*, os colegas e o assunto.

Numa pesquisa realizada com estudantes de 7ª e 8ª séries, Vaz (2004), utilizou um *software* de geometria dinâmica, o Cabri-Géomètre, para investigar o ensino e a aprendizagem da prova e demonstração em geometria, onde os alunos eram envolvidos em atividades que favoreciam os movimentos espontâneos. Por meio das interações dos estudantes, a autora observou a importância do dinamismo do *software* para que sejam incorporadas descobertas aprendidas por meio de atividades anteriores nas provas e demonstrações geométricas construídas pelos alunos.

Outro estudo similar, utilizando o software, o Tabulæ, Mattos (2007), apresenta a viabilidade de estratégias didáticas utilizadas em modelos de interação professor - estudante e estudante - estudante, por meio das quais descreve as funcionalidades desenvolvidas no projeto com o software Tabulæ Colaborativo. Tais estratégias, que tornaram possível a interação no ensino presencial de matemática, foram aplicadas em atividades do ensino à distância. Mattos (2007) estudou estratégias didáticas para aprendizagem colaborativa, baseadas em roteiros e apoiadas por computador, projetadas para facilitar a colaboração entre estudantes.

Pode-se perceber que os alunos participantes de tais processos tendem a desenvolver autonomia quando estão concentrados em alguma atividade que os estimulem no processo de aprendizagem.

Tais fatos reforçaram a percepção de que a tecnologia digital utilizada nesse processo oferece oportunidades convidativas, que chamam a atenção e provocam para que os usuários possam envolver-se com atividades intelectuais por meio de uma relação de uso e da exploração dos equipamentos podendo desenvolver autonomia para a aprendizagem, progredindo de acordo com os resultados obtidos a partir da própria experiência de criação.

Na visão de Castoriadis (1987), a criação é algo que só aparece no ser humano e que, a partir dela desenvolve autonomia, construindo as suas próprias significações. Por outro lado Piaget (1982) conceitua autonomia como sendo a capacidade de coordenação de diferentes perspectivas sociais com o pressuposto do respeito recíproco.

Em seu estudo, ao utilizar o GeoGebra, Freitas (2009) apresenta resultados de uma pesquisa realizada com professores de Matemática, onde se investigou a utilização do *software* educativo no ensino e aprendizagem, com enfoque nas possibilidades de representação e na interação do estudante no processo de construção do conhecimento. Ao final, a autora pode constatar que o GeoGebra possibilitou nova dimensão de contato com objetos e conceitos matemáticos não acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente, além de possibilitar o acesso e mobilização de pelo menos duas representações de registro de um mesmo objeto matemático.

A partir das observações desse estudo pretende-se investigar o que se tornou possível para o aluno fazer a partir das novas possibilidades oferecidas por um *software* de geometria dinâmica.

Para esse estudo foi escolhido o *software* GeoGebra por ser gratuito e possuir as ferramentas tradicionais de geometria dinâmica e permitir manipular as construções mais comuns e os elementos básicos da geometria: pontos, segmentos, retas e seções cônicas, permitindo aos alunos experimentar, interpretar, visualizar, e demonstrar conteúdos de geometria, bem como para o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

2 | A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Atualmente estamos cercados de novas tecnologias as quais em muitas vezes vem a facilitar e agilizar as diferentes situações a que nos deparamos no cotidiano. Neste sentido, pensamos porque não nos utilizarmos desta tecnologia no ambiente escolar visando desta forma promover uma aprendizagem em Matemática? Principalmente no ensino de Geometria nos quais avaliações nacionais como o SAEBE e o ENEM apontam dificuldades encontradas pelos alunos em relação aos conteúdos Geométricos.

É de grande relevância para classe docente repensar suas propostas de trabalho visando contribuir para que aconteça uma aprendizagem significativa recorrendo ao uso de tecnologias para o ensino, dado que a maioria das escolas estaduais possui hoje laboratório de informática equipado com computadores.

Segundo Ferreira et al (2009 p. 03) os ambientes informatizados quando direcionados á aprendizagem da Geometria possibilitam recursos capazes de fazer com que os alunos possam superar dificuldades.

Um dos recursos a que o professor pode recorrer para suas aulas de Geometria é o software Geogebra, software livre gratuito encontrado na internet e sem dificuldade de uso que possibilita aos alunos fazer construções com pontos, vetores, segmentos e retas e no nosso caso específicos cônicas e quádricas, desenvolvendo nos mesmos um raciocínio geométrico e analítico.

Albuquerque (2004) destaca que a proposta de trabalho bem como planos de aula do professor ao utilizar o software Geogebra para desenvolver os conteúdos abordados na Geometria Plana deve contemplar:

> O conteúdo a ser abordado; os objetivos a serem atingidos; os pré-requisitos matemáticos e tecnológicos; o encaminhamento metodológico que mostra de maneira detalhada como construir os objetos e como utilizar os recursos do programa e o número de aulas necessárias para desenvolver a atividade (ALBUQUERQUE : 2004; p.21).

Desta maneira o professor fará uso consciente do software como facilitador da aprendizagem, cabe destacar que nesse processo de ensino através da utilização de tecnologia como o computador segundo Albuquerque (2004, p. 14) o professor não necessita dominar todas as ferramentas do programa, entretanto é fundamental que o mesmo tenha a "humildade de aprender com o aluno", uma vez que o aluno domina e tem mais facilidade quando se trata de tecnologia. Portanto é fundamental que a classe docente saiba lidar com essa troca de conhecimentos.

Outro fator relevante que pode decorrer da exploração do software é o aluno perder o foco devido aos recursos disponíveis no programa. Cabe ao professor fazer mediação estimulando o aluno a continuar dentro dos objetivos previstos nesta aula.

Segundo Ferreira (2009, p. 03) as ações de exploração de conteúdos geométricos com a utilização do software Geogebra possibilitam criar condições para que o aluno aprenda fazendo investigações que podem oportunizar ao mesmo de fazer conjecturas, testes e analises para então, estar apto a realizar uma conclusão do conteúdo e conceito que está sendo explorado com o programa. Por fim, pode causar no mesmo um estímulo para que aconteça uma evolução no seu pensamento geométrico.

Sendo assim, acreditamos que o professor poderá promover no aluno uma superação em relação à visualização de conceitos e propriedades geométricas na medida em que o mesmo realize as construções bem como a visualização que permite compreender com facilidade as propriedades geométricas podendo ainda fazer o uso de animações, mover e observar de vários ângulos das figuras construídas no qual podem ser vistos como materiais concretos porém virtuais.

Segundo Gravina (1998 apud Gripa et al, p. 03) O aluno não deve adquirir um caráter passivo diante das atividades propostas pelo professor e sim o mesmo deve ser capaz de realizar construções no qual darão sentido e significados ao seu conhecimento matemático, sendo assim o professor deve desta maneira oportunizar ao aluno construir, experimentar, testar, visualizar, conjecturar e generalizar com o intuito de fazer demonstração.

Segundo Duval (1995, apud Ferreira 2009, p. 05) considera que não há o conhecimento que o aluno possa mobilizar sem que haja uma atividade de representação e "compreende diferentes formas de apreensão cognitiva da figura geométrica"

a) apreensão seqüencial, a solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição na reprodução de uma figura;

b) apreensão perceptiva, a que corresponde à interpretação da figura em uma situação geométrica;

c) apreensão discursiva, a relacionada à interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados;

d) apreensão operatória, que consiste numa apreensão central sobre possíveis modificações de uma figura de partida, ou seja, manipulações no desenho visando desprender e recompor novos subcomponentes do mesmo (FERREIRA, 2009, p. 05).

Acreditamos que tais apreensões destacadas pelo autor possam proporcionar um avanço para ocorrer o processo de demonstração, que por sua vez é de suma importância na medida em que o professor pretende fazer com que o aluno seja capaz de realizar conjecturas, possibilitando desta maneira a oportunidade de evoluir os seus conhecimentos geométricos com o intuito de promover um aprendizado mais significativo ao aluno. Além disso Amorim (2003 apud Albuquerque et al, 2004, p. 03) ressalta que através do uso do software para se fazer demonstrações pode possibilitar ao aluno a ter uma visão de que "a Matemática não como uma coleção de regras formais e acabadas em si mesmas, mas como uma ciência dinâmica e possível de manipulação". Sendo assim através da compreensão da Matemática o aluno pode enxergar a disciplina com outro olhar mais dinâmico e positivo perante a matéria, não tendo mais aquela percepção de que a Matemática é um bicho de sete cabeças.

3 | METODOLOGIA

O planejamento a partir do uso do Geogebra foi organizado considerando que os alunos deveriam possuir dois tipos de pré-requisitos:

a) os matemáticos, ou seja o aluno para desenvolver as atividades propostas, deveria ter uma ideia em relação a que é uma cônica e diferi-lá de uma quádrica, bem como as suas classificações de acordo com sua equação geral, reduzida e comportamento no plano cartesiano. Deve reconhecer e conceituar cada curva, assim como saber como nomeá-la e por fim, esboçar seu gráfico utilizando para tanto o GeoGebra.

b) os tecnológicos, ou seja, deveriam conhecer um computador bem como saber utilizar o Geogebra.

A metodologia consiste em que a aula acontece de maneira expositiva e dialogada, no qual o aluno será questionado em relação a cada conteúdo que está sendo trabalhado, ou seja, Cônicas e quádricas. Após isso serão encaminhados para a construção da figura geométrica, para então através da construção realizada no Geogebra, os mesmos poderem realizar as observações pertinentes da figura construída bem como conceituar.

Na sequência apresentamos o desenvolvimento do planejamento, ou seja, a sequência didática desenvolvida com os alunos usando as ferramentas do Geogebra. Optamos por organizar a sequência em forma de itens conforme apresentado abaixo.

ATIVIDADES

Em geometria, cônicas são as curvas geradas ou encontradas, na intersecção de um plano que atravessa um cone.

Numa superfície afunilada, existem três tipos de cortes que podem ser obtidos por esse processo e que resultam na:

- Elipse, que é a cônica definida na interseção de um plano que atravessa a superfície de um cone; Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (2a > 2c). Sua equação analítica é $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
- Parábola, que é a cônica também definida na intersecção de um plano que penetra a superfície de um cone. Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com F d, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto dos pontos P de α que estão a mesma distância de F e de "d". Sua equação analítica é $y^2 = 2px$
- Hipérbole, que é a cônica definida na interseção de um plano que penetra num cone em paralelo ao seu eixo. Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos P de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (0<2a < 2c). Sua equação analítica é $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

O interesse pelo estudo das cônicas remonta a épocas muito recuadas. De fato, estas curvas desempenham um papel importante em vários domínios da física, incluindo a astronomia, na economia, na engenharia e em muitas outras situações, pelo que não é de estranhar que o interesse pelo seu estudo seja tão antigo. Na astronomia, Kepler mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais têm o sol num dos focos. Também os satélites artificiais enviados para o espaço percorre trajetórias elípticas. Mas nem todos os objetos que circulam no espaço têm órbitas elípticas. Existem cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas, os quais ao passarem perto de algum planeta com grande densidade, alteram a sua trajetória para outra hipérbole com um foco situado nesse planeta. Como a parábola é um caso de equilíbrio entre a elipse e a hipérbole (lembre-se que a excentricidade da parábola é igual a um), a probabilidade de existir algum satélite com órbita parabólica é quase nula. Mas isso não impede a existência de satélites com esta trajetória.

Quádrica ou superfície quádrica é, em matemática, o conjunto dos pontos do espaço tridimensional cujas coordenadas formam um polinômio de segundo grau de no máximo três variáveis denominada de equação cartesiana da superfície. Numa visão informal, as superfícies quadráticas são as regiões formadas quando as cônicas se movimentam no espaço. A partir da equação geral do segundo grau nas três variáveis x, y, z é possível representar uma superfície quadrática. Observemos que se a superfície quadrática formada pela equação geral for cortada por um plano, a curva de interseção será uma cônica.

- Elipsóide: O traço nos planos coordenados são elipses, como também são elipses os traços em planos paralelos aos planos coordenados, que interceptam a superfície em mais de um ponto.

- Hiperbolóide de uma folha: O traço no plano xy é uma elipse, como são os traços nos planos paralelos ao plano xy. Os traços nos planos yz e xz são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a eles que não passam pelos interceptos x e y. Nestes interceptos, os traços são pares de retas concorrentes.

- Hiperbolóide de duas folhas: Não há traço no plano xy. Em planos paralelos ao plano xy que interceptam a superfície em mais que um ponto os traços são elipses. Nos planos yz, xz e nos planos paralelos a eles que interceptam a superfície em mais de um ponto, os traços são hipérboles.

- Cone Elíptico: O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos xz e yz são pares de retas que se interceptam na origem. Os traços em planos paralelos a estes são hipérboles.

- Parabolóide elíptico: O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos e acima dele são elipses. Os traços nos planos xz e yz, bem como em planos paralelos a eles são parábolas.

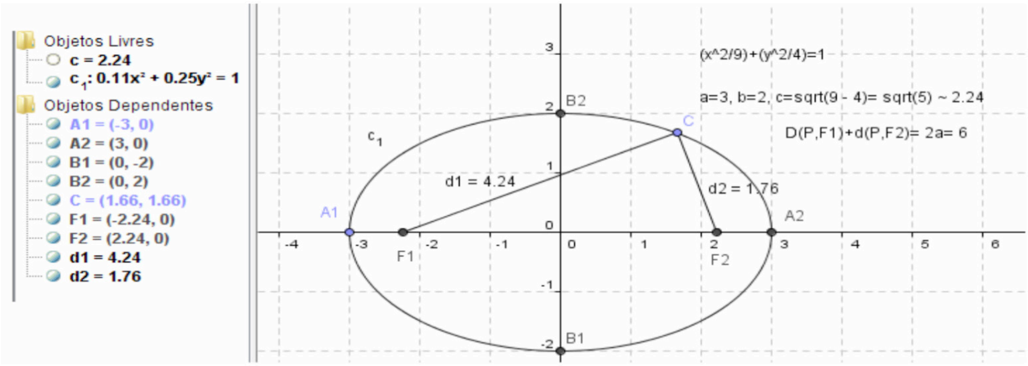
- Parabolóide Hiperbólico: O traço no plano xy é um par de retas que se cruzam na origem. Os traços em planos paralelos ao plano xy são hipérboles. As hipérboles acima do plano xy abrem se na direção de x e as abaixo na direção de y. Os traços nos planos yz e xz são parábolas, assim como os traços nos planos paralelos a estes.

***Atividade* 1:** Representar geometricamente as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$ **(b)** $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

Solução:

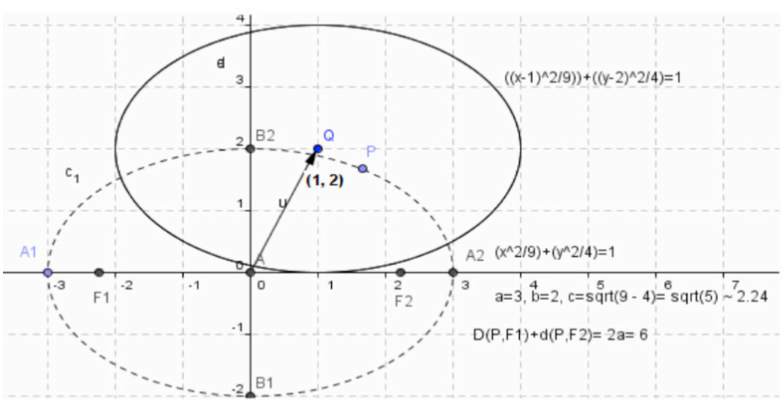
(a)



Conhecendo os *focos* e *um ponto* da elipse, podemos usar o ícone/ferramenta *Elipse* para obter a sua representação geométrica. No caso os focos são F1=(- 5 ,0) e F2=(5 ,0), e tomaremos como ponto da elipse o vértice B2=(0,2). ***Para representar os focos*** entre na *Janela Algébrica* com os pontos (-sqrt(5),0) e depois (sqrt(5),0).

Para ***renomear os pontos*** (ou ***objetos***) clique com o botão do mouse direito na letra/ nomenclatura existente, selecione ***Renomear*** na caixa que irá abrir e em seguida ***digite o novo nome****/ letra* desejada. Os ***focos*** (***vértices***) podem ser ainda obtidos digitando no campo *Entrada* Foco[c] (Vértice [c]), onde c é a letra que indica/nomea a elipse na tela de trabalho.

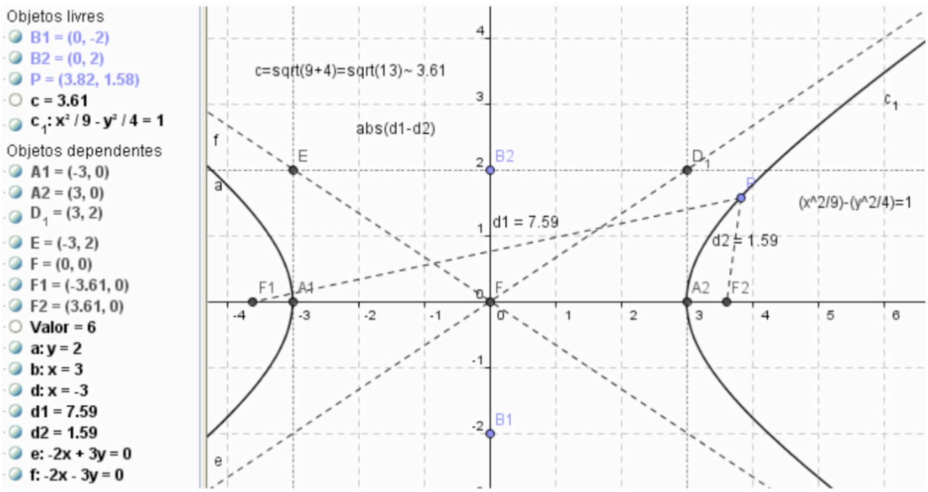
(b)



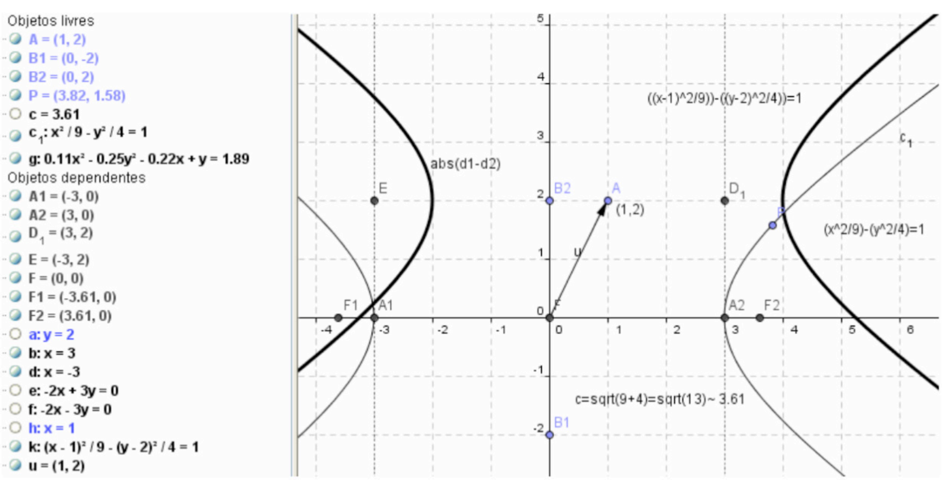
Atividade 2: Representar geometricamente as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}\right)=1$, **(b)** $\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1.$

(a): $4 = b^2 = c^2 - a^2 = c^2 - 9 \Rightarrow c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c \sim 3.61$

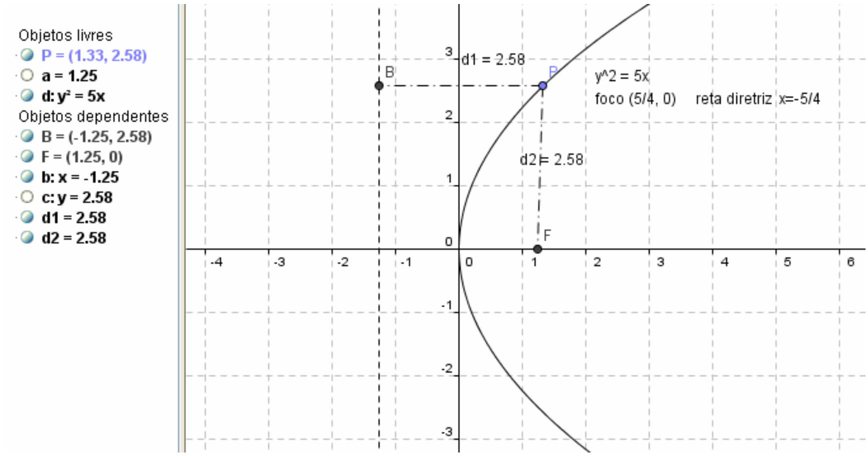


(b)

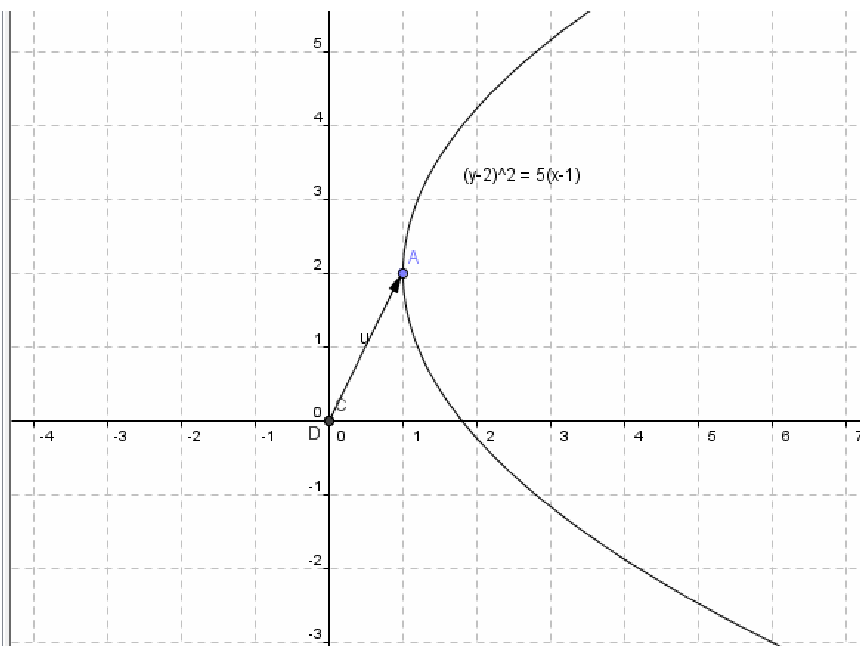


***Atividade* 3:** Representar as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $y^2 - 5x = 0$, **(b)** $(y-2)^2 - 5(x - 1) = 0$.



Note que a equação é do tipo $y^2 = 4px$, e diretriz $x = -p$. Assim o foco é $F= (5/4, 0)$ e a reta diretriz é $x = -5/4$. Tendo o foco e vértice, a parábola pode ser então obtida usando a ferramenta Parábola na caixa de nº 7

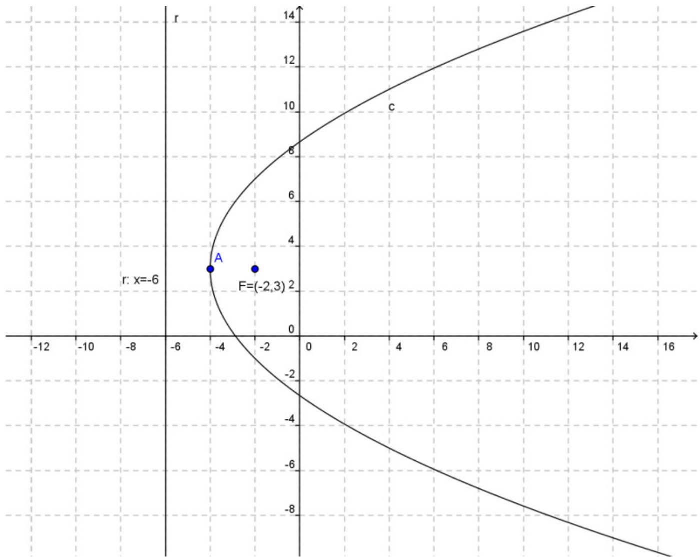


***Atividade* 4.** Dada a parábola de equação $y^2 - 8x - 6y - 23 = 0$. Represente geometricamente:

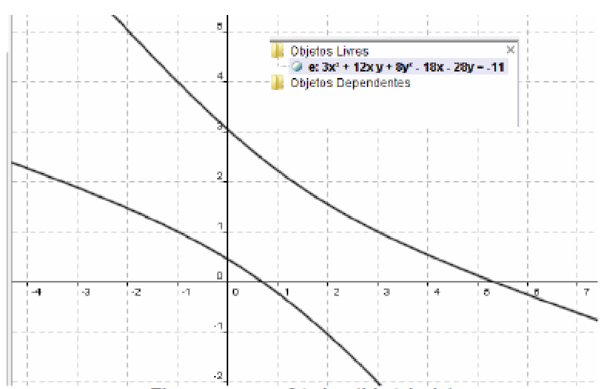
(1) usando a equação algébrica, **(2)** usando o ícone/ferramenta *Parábola*, e o *foco* e a *diretriz* (para isso complete quadrados

Solução:

$y^2 - 8x - 6y – 23 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = 8x + 23 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 8x+23+9 \Rightarrow (y-3)^2 = 8(x+4) \Rightarrow V= (- 4, 3)$, foco $F = (-2,3) = (2,0) + (- 4,3)$ e diretriz $r: x = - 6 = -2 +(-4))$.



***Atividade* 5**. Representar e classificar a cônica de equação: $3x^2 + 12xy + 8y^2 – 18x – 28y + 11 = 0$.



Verificamos que tal cônica é uma hipérbole.

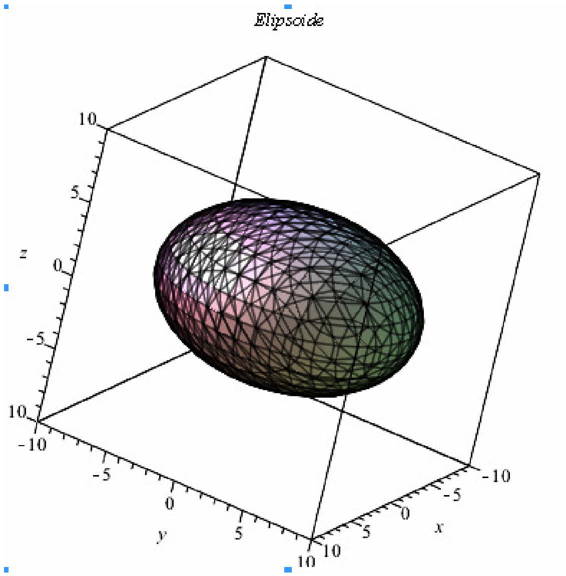
***Atividade* 6:** Representar o *elipsóide* dado pela equação $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{2}=15$

Comandos:

>**restart; with(plots): implicitplot3d(x^2/4 + y^2/5 + z^2/2 = 15, x= -10..10, y = -10..10, z = -10..10, title = 'Elipsoide', thickness = 1, numpoints = 4000);**

ou simplesmente:

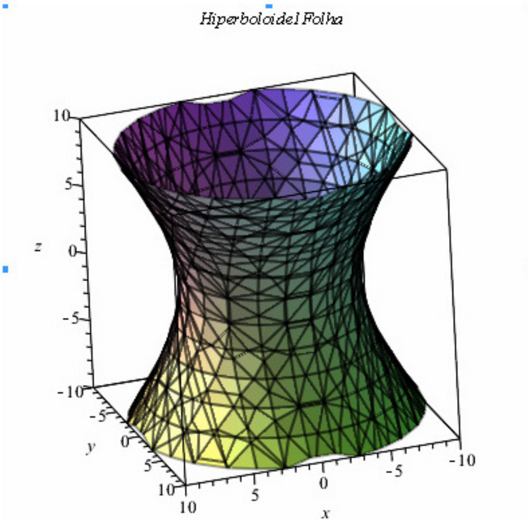
> implicitplot3d(x^2/4 + y^2/5 + z^2/2 = 15, x= -10..10, y = -10..10, z = -10..10, title = 'Elipsoide', thickness = 1, numpoints = 4000);



***Atividade* 7:** Representar o hiperboloide *de uma folha* dado pela equação $x^2/4 + y^2/5 + (z - 4)^2/2 = 15$.

Comandos:

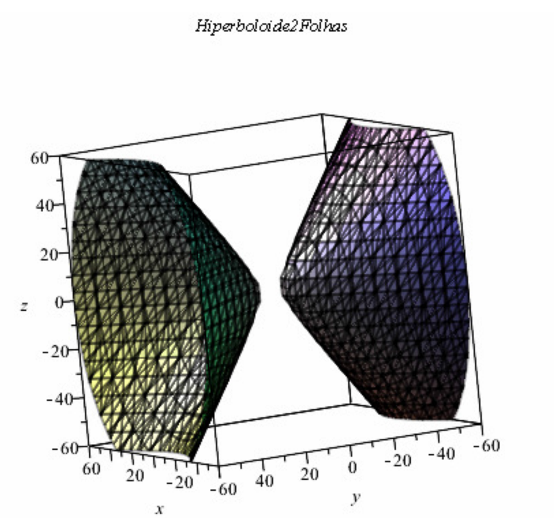
> implicitplot3d(x^2/2+y^2/2-z^2/3 = 20, x = -15..15, y = -15..15, z = -15..15, title = 'Hiperboloide1folha', thickness = 2, numpoints = 1000);



***Atividade* 8:** Representar o *hiperbolóide de duas folhas* dado pela equação $-x^2/2 + y^2/2 - z^2/3 = 20$.

Comandos:

> restart; with(plots):implicitplot3d(-x^2/2 + y^2/2 –z^2/3 = 20, x = -60..60, y = - 60..60, z = -100..100, title = 'Hiperboloide2folhas', thickness = 2, numpoints = 4000);

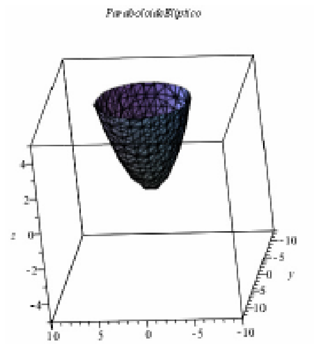


$x^2/5+y^2/6 = z$

***Atividade* 9:** Representar o *parabolóide elíptico* dado pela equação

Comandos:

> restart; with(plots):implicitplot3d(x^2/5 + y^2/6 = z, x= -10..10, y = -13..13, z = -5..5, title = 'ParaboloideEliptico', thickness = 2, numpoints = 4000);

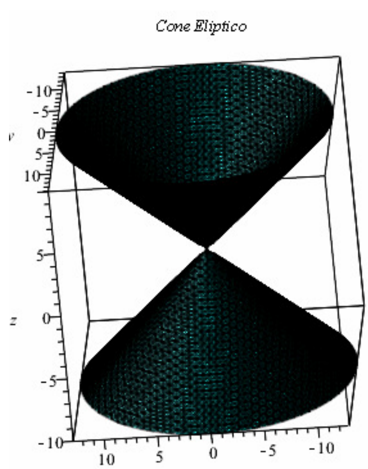


$x^2/5+y^2/6-z^2/3=0$

***Atividade* 10:** Representar o *cone elíptico* dado pela equação

Comandos:

> restart; with(plots):implicitplot3d(x^2/5 + y^2/6 – z^2/3 = 0, x = -50..50, y = -30..30, z = -20..20, title = 'Cone', thickness = 2, numpoints = 4000);



CONCLUSÃO

Acredito que com a utilização do software matemático Geogebra como uma ferramenta de ensino pudemos promover um ensino e aprendizagem mais significativos, pois na medida em que o professor faz uso de tal ferramenta para o ensino possibilita ao mesmo fazer demonstrações que com o uso do quadro e o giz seria tanto difícil. O uso do software permite aos alunos realizarem construções, manipulação, visualização de diversas formas e ângulos, conjecturas a partir da experimentação e observado facilitando desta forma a compreensão dos conceitos geométricos em relação aos elementos da aprendizagem envolvidos.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Luciane, **O uso do programa Geogebra no ensino de Geometria Plana de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental das Escolas Publicas Estaduais do Paraná**. Curitiba, 2008 disponível em: http://www.diaadiaeducacao.br.gov.br/portals/pde/arquivos/1735-6.pdf?PHSESSID=201006241052393 acessado em 07 mai.2015.

ALBUQUERQUE, Luciane, SANTOS, Carlos Henrique dos, **O programa Geogebra: relato de experiência no ensino de geometria plana de 5ª a 8ª série e na socialização com professores da rede de ensino estadual**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/17358.pdf?PHPSESSID=201006241052393 acessado em: 07 mai. 2015.

ARAUJO, Luis Claudio Lopes. **Explorando tópicos de Matemática do ensino fundamental e médio através do geogebra**. Disponível em: http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/60.pdf acessado em: 07 mai. 2015

GRIPA, Andriele et al, **Contribuições do Geogebra no ensino-aprendizagem da geometria analítica**. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscemmaand/RE/RE_11.pdf acessado em: 07 mai. 2015.

FERREIRA, Emilia Barra et al. **As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias**. Bolema, Rio Claro SP, Ano 22 nº 34, 2009, pg 185 a 2008. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/igece/matematica/bolema/site34/9%20%As%20Demonstra%C3%A7C3%B acessado em 27 abr. 2015.

BELLO, José Luiz de Paiva. **A teoria básica de Jean Piaget**. Pedagogia em Foco, Vitória, 1995. Disponível em: <http://www.pedagogiaemfoco.pro.br/per09.htm>. Acesso em: 28 abr. 2015.

BRASIL, **Lei de diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, DF: Gráfica do Senado, 1971.

COZZOLINO, Adriana Maria. **O ensino da perspectiva usando o Cabri 3D:** uma experiência com alunos do ensino médio. 2008. 185 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

FERREIRA, Luis de França *et al*. **A evolução dos ambientes de aprendizagem construtivistas**. Disponível em: <http://penta.ufrgs.br/~luis/Ativ1/Construt.html> Acesso em: 28 abr. 2015.

PAPERT, S. **Mindstorms:** Children, computers and powerful ideas. Brighton: Harvester Press, 1980.

PIAGET, Jean *et al*. **Educar para o futuro.** Trad. Rui B. Dias. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1974.

PIAGET, Jean. **Fazer e Compreender**. Edições Melhoramentos. Editora da Universidade de São Paulo, Brasil, 1978.

PIAGET, Jean. **O desenvolvimento do pensamento**: equilibração das estruturas cognitivas. Lisboa: Dom Quixote, 1977.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança.** Rio de Janeiro: Zahar, 1982.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e história das ciências**. Lisboa: Dom Quixote, 1987.

POSSANI, Rosemary Aparecida Romagnoli. **Apreensões de representações planas de objetos espaciais em um ambiente de Geometria Dinâmica**. 2002. 160 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

VIANNA, Andréa Novelino. **A utilização do computador na prática docente:** sentidos construídos por um grupo de professores de matemática de uma Instituição de Ensino Federal. 2009. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2009.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Construções geométricas, um saber escolar novamente para todos?** In: SEMANA DA PÓS-GRADUAÇÃO DA UFMG, Belo Horizonte, 2002. ***Anais***... Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

CAPÍTULO 11

OBJETO EDUCATIVO ADAPTADO POTENCIALIZANDO O ENSINO-APRENDIZAGEM DE UMA ESTUDANTE CEGA EM MATEMÁTICA NO INSTITUTO FEDERAL DO ACRE – IFAC, CAMPUS XAPURI

Data de aceite: 20/04/2021
Data de submissão: 09/02/2021

Cristhiane de Souza Ferreira
Doutoranda em Educação pela Fundação Universitária Iberoamericana (UNINI/MÉXICO-ESPANHA)

Sérgio Luiz Pereira Nunes
Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR/UFAC)

Salete Maria Chalub Bandeira
Doutora em Educaçãoem Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Acre (REAMEC/UFMT)

RESUMO: O presente artigo com abordagem qualitativa do tipo estudo de caso objetiva investigar e compreender como os materiais didáticos adaptados, mediados pela professora de Matemática, conjuntamente com o processo cognitivo da atenção podem potencializar o aprendizado de estudantes cegos. Como aporte teórico recorreu-se a Bandeira (2015); Bezerra (2017) e Cosenza e Guerra (2011). Foram construídos materiais didáticos estáticos e dinâmicos que decorreram da necessidade da referida estudante ressaltando o foco da atenção para as adaptações necessárias à potencialização do aprendizado. Para o professor, destaca-se a importância de mediar a explicação dos conceitos matemáticos com a utilização desses materiais de ensino e da neurociência aplicados à Educação Matemática. Os resultados revelam que através dos materiais didáticos adaptados e dos conhecimentos sobre atenção ser possível potencializar a aprendizagem de Matemática, envolvendo alunos cegos de maneira eficaz com a intervenção, sempre que necessária, da professora regente.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Matemática, Foco na Atenção, Materiais Didáticos Adaptados

ABSTRACT: This article with a qualitative case study approach aims to investigate and understand how the adapted teaching materials, mediated by the mathematics teacher, together with the cognitive process of attention can enhance the learning of blind students. As a theoretical contribution, Bandeira (2015) was used; Bezerra (2017) and Cosenza e Guerra (2011). Static and dynamic didactic materials were built that resulted from the student's need, emphasizing the focus of attention on the necessary adaptations to enhance learning. For the teacher, the importance of mediating the explanation of mathematical concepts with the use of these teaching materials and neuroscience applied to Mathematics Education is highlighted. The results reveal that, through the adapted didactic materials and knowledge about attention, it is possible to enhance the learning of Mathematics involving blind students effectively with the intervention, whenever necessary, of the conducting teacher.

KEYWORDS: Mathematics teaching, Focus on Attention, Adapted Teaching Materials.

INTRODUÇÃO

Ensinar Matemática aos alunos com cegueira requer, por parte dos professores dessa área, discernimento de como esses estudantes podem ter acesso ao conhecimento matemático por meio dos outros sentidos, que não seja o da visão. Assim, recorre-se a Bandeira (2015), Lira e Brandão (2013), quando esclarecem que os sentidos do tato e da audição são aqueles que irão potencializar o acesso a compreensão dessa Ciência para os estudantes com cegueira.

Durante um período significativo de prática docente em escolas públicas e privadas do Estado do Acre, a professora-pesquisadora ignorou a importância oriunda dos materiais didáticos táteis (sólidos geométricos adaptados com palitos de churrasco e jujuba, por exemplo) para a assimilação de conteúdos pelos estudantes com cegueira. Nesse período de docência os procedimentos didáticos visavam, apenas, atividades escritas no quadro magnético, embora os processos de formulações e resoluções de exercícios fossem sempre verbalizados.

No ano de 2016, a professora-pesquisadora experienciou em sua prática pedagógica o contato com uma estudante cega no Instituto Federal, mesmo ano em que a mesma ingressou como aluna no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Federal do Acre (MPECIM/UFAC). Diante do exposto, salienta-se a necessidade de se apresentar uma atenção maior, por parte dos profissionais de ensino, com o intuito de ampliar a prática pedagógica, para, assim, possibilitar a participação efetiva desses estudantes em suas aulas.

Nesse sentido, ante à situação real a ser pesquisada e vivenciada em turma e na própria prática docente, percebeu-se a necessidade de ampliar o projeto de pesquisa submetido ao MPECIM/UFAC. Deste modo, apresenta-se a pesquisa com a temática "Materiais didáticos adaptados e o foco da atenção potencializando o aprendizado de estudantes cegos em Matemática".

JUSTIFICATIVA

Nessa perspectiva, será realizada uma sondagem sobre a aprendizagem de estudantes deficientes visuais com materiais didáticos adaptados, a partir de pesquisas bibliográficas baseadas na potencialidade da inclusão social. Também será utilizada a temática de Cosenza e Guerra (2011) que mostram a importância do fenômeno da atenção e como sua compreensão pode contribuir para a consolidação da aprendizagem, tendo como público alvo alunos DV e professores do Instituto Federal do Acre – IFAC.

No que tange a referida pesquisa, a professora-pesquisadora passou por duas situações que propiciaram a expansão dos meus conhecimento no trabalho e lida com Deficientes Visuais: a primeira foi, no ano de 2016, o curso das disciplinas de MPECIM022 - Práticas de Educação em Ciências e Matemática e a Inclusão (Deficiência Visual) e MPECIM008 - Tecnologias e Materiais Curriculares para Ensino de Matemática no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre (UFAC); a segunda situação, não menos importante, de extrema relevância nesse processo, foi minha participação na Jornada do Instituto Benjamin Constant (IBC) no Instituto Federal do Acre (IFAC) cursando as oficinas pedagógicas de: Produção de material didático especializado; Orientação e mobilidade e, Introdução ao sistema braile e TA com professores especializados desse Instituto. Elementos de extrema importância na pesquisa e para as tomadas de decisões vindouras.

Na execução do trabalho, para possibilitar a ampliação da visão sobre a forma que se dá o processo educativo de estudantes com DV no Estado do Acre nas escolas públicas, houve a necessidade de se fazer uma visita ao Centro Estadual de Atendimento ao Deficiente Visual (CEADV-CAP/AC)[1].

Conforme visita, percebeu-se que o CAP/AC se organiza em três núcleos: o Núcleo de Produção Braille, o Núcleo de Capacitação e o Núcleo de Informática (BANDEIRA. 2015, p. 44). Cada núcleo foi visitado com o intuito de se estabelecer uma parceria com o CAP/AC para nos auxiliar com os materiais didáticos de Matemática a serem adaptados para atender uma estudante cega do IFAC.

PROBLEMÁTICA

Para tal atendimento, a presente pesquisa se pauta na elaboração de materiais didáticos que disponibilize e nivele o ensino-aprendizagem em Matemática de uma estudante com deficiência visual e parte da seguinte questão a ser investigada: Como os materiais didáticos adaptados ao ensino de Matemática e a neurociência com o processo cognitivo da atenção podem possibilitar o aprendizado de estudantes com cegueira?

PERGUNTAS E HIPÓTESES

Para desenvolver esta pesquisa, propõe-se como questões norteadoras, para possibilitar responder à questão principal, as seguintes indagações:

- Quais são os saberes necessários ao professor para lidar com as condições e necessidades da Educação Inclusiva de alunos cegos nas aulas de Matemática?
- Como o conhecimento da neurociência com foco na atenção pode auxiliar o professor a construir práticas que permitam o aprendizado ao estudante cego?

1. O CEADV –Centro de Atendimento ao Deficiente Visual foi inaugurado no dia 15 de outubro de 1995, no município de Rio Branco-AC. No dia 14 de dezembro de 2000 foi inaugurado o Centro de Apoio Pedagógico para Atendimento às Pessoas com Deficiência Visual do Acre (CAP/AC), funcionando no mesmo prédio do CEADV. A partir do dia 12 de dezembro de 2006, conforme a portaria nº 9485/2006, o CEADV passou a chamar-se *Centro Estadual de Atendimento ao Deficiente Visual*.

- Quais materiais didáticos e tecnológicos estão disponíveis nas/para as escolas e podem ser utilizados para o desenvolvimento de uma prática pedagógica inclusiva de alunos cegos nas aulas de Matemática?

- Quais são as dificuldades que os alunos cegos apresentam para aprender Matemática de maneira satisfatória?

- Quais estratégias os professores encontram para ensinar Matemática aos alunos cegos?

- Como os materiais adaptados auxiliam os alunos cegos na aprendizagem de Matemática?

OBJETIVO GERAL

A presente pesquisa tem por **objetivo geral** compreender como os materiais didáticos adaptados, mediados pelo professor de Matemática, e como o processo cognitivo da atenção podem potencializar o aprendizado de estudantes com cegueira.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Como **objetivos específicos,** apresentam-se:

- Participar de cursos de formação continuada, ofertados em eventos científicos, como também pelo Centro de Apoio Pedagógico para Atendimento às Pessoas com Deficiência Visual do Acre (CAP/AC) com a finalidade de realizar práticas inclusivas no IFAC – Campus Xapuri;

- Compreender como o conhecimento da neurociência aplicada a Educação Matemática e o processo cognitivo da atenção podem favorecer na aprendizagem de estudantes cegos;

- Analisar o potencial dos materiais didáticos adaptados construídos e aplicados a estudante cega sobre o conhecimento Matemático adquirido;

- Construir, planejar, aplicar, refletir e analisar as intervenções pedagógicas realizadas pela professora de Matemática do IFAC acerca do aprendizado da aluna cega;

- Construir sequências didáticas com o uso de materiais didáticos adaptados para facilitar o aprendizado de estudantes cegos.

METODOLOGIA

Este artigo tem como intento expor a metodologia aplicada no estudo das relações e percepções dos educadores e educandos de um Instituto de Rio Branco, a respeito do ensino-aprendizagem de estudantes deficientes visuais através de materiais didáticos adaptados. A perspectiva adotada possui caráter qualitativo, dado que, não busca difundir os resultados, porém dispõe como precaução o discernimento de uma instituição, de um grupo social, de uma representação política.

O método manipulado constitui em um estudo de caso por ser considerado uma forma de estudar e analisar profundamente qualquer unidade social indicada por meio de um indivíduo sozinho ou em grupo, uma organização, uma comunidade, um projeto em evolução incumbindo ao pesquisador referenciar um evento específico que mereça atenção especial. Por essa perspectiva, Yin (2005, p.32) expõe que o estudo de caso possibilita a investigação da realidade preservando suas características a partir do conhecimento de eventos cotidianos sem, contudo, manipulá-los, ou melhor dizendo, "*um estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos.*"

No que concerna a pesquisa qualitativa, Minayo (2001, p.21) sustenta que ela "*trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis*."

Uma etapa fundamental para a realização de uma investigação é a revisão de literatura, uma vez que, fornece o aporte teórico sobre o tema e a concepção do conceito que dará sustentação ao desenvolvimento da pesquisa. Dito de outra forma, é o fruto da sondagem e análises já publicadas sobre o tema da pesquisa com o intuito de contextualizar teoricamente o trabalho dentro da grande área de pesquisa.

Por esse viés, a revisão de literatura é descrita por Gil (2010) como sendo uma obra sobre material já produzido, tendo como objetivo traçar as possibilidades de um ensino que agrega o conhecimento as experiências adquiridas. Já para Trenitini e Paim (1999), a revisão bibliográfica ou revisão de literatura é a análise crítica, meticulosa e ampla das publicações correntes em uma determinada área do conhecimento.

Este tipo de pesquisa, segundo Marconi e Lakatos (2007), tem como finalidade colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto. Na concepção de Martins (2001), a pesquisa bibliográfica busca elucidar e debater um tema alicerçado em referências teóricas publicadas em livros, revistas, periódicos e outros, além de conhecer e analisar conteúdos científicos sobre determinado tema.

Após elucidar que a pesquisa apresenta um modelo metodológico de natureza qualitativa fundamentada em Minayo (2001), foi realizada uma revisão de literatura embasada em Gil (2010) imprescindível para a elaboração de um trabalho científico por sua atuação direta na qualidade do labor. O método utilizado foi o estudo de caso que consoante a Yin (2005) é considerado como um tipo de pesquisa qualitativa que favorece uma visão abrangente sobre os eventos da vida real.

A pesquisa contará com dois professores especialistas do Centro de Apoio Pedagógico ao DV como colaboradores, uma estudante cega do Ensino Médio e uma professora de Matemática do IFAC. Foram utilizados como registros (fotos e vídeos) dos acontecimentos ocorridos em sala de aula e/ou Sala de Recurso Multifuncional (SRM) uma filmadora e um tripé.

Essa investigação se apoia na Neurociência aplicada à Educação Matemática, com o foco na atenção, por permitir compreender como é possível ampliar a prática pedagógica possibilitando a aquisição de conhecimentos por parte dos estudantes com deficiência visual. Como formadora de uma Instituição de Ensino Técnico/Superior, percebeu-se nos últimos cinco anos a presença de estudantes com necessidades educacionais especiais[2] nas classes comuns do ensino regular.

Primeiro material didático adaptado

O primeiro material didático adaptado intitulado RTA abordou o conteúdo de relações trigonométricas no triângulo retângulo. Seu o intuito viabilizou construir um triângulo retângulo para trabalhar as relações trigonométricas e fazer com que os alunos com deficiência visual conseguissem identificar e usar corretamente as relações trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).

Os materiais utilizados para a confecção do RTA foram a reglete, o punção, papel A4 (40kg), prancheta, palito de churrasco, E.V.A., barbante, cola, cola em alto relevo, papel de embalagem e régua adaptada.

Para começar construiu-se um plano de aula para fazer a adaptação em braile e, em seguida, transcreveu-se o plano de aula para o braile. Na sequência, seguiu-se com a montagem do triângulo, utilizando materiais de baixo custo com as texturas mencionadas acima conforme salienta a Figura 1.

2. No inciso I, do artigo 5º, da Resolução CNE/CEB Nº 02/01, os educandos com necessidades educacionais especiais são os que apresentam dificuldades acentuadas de aprendizagem ou limitações no processo de desenvolvimento que dificultem o acompanhamento das atividades curriculares compreendidas em dois grupos: a) aquelas não vinculadas a uma causa orgânica específica; b) aquelas relacionadas a condições, disfunções, limitações ou deficiências; II –dificuldades de comunicação e sinalização diferenciados dos demais alunos, [...]; III –altas habilidades/superdotação, grande facilidade de aprendizagem [...].

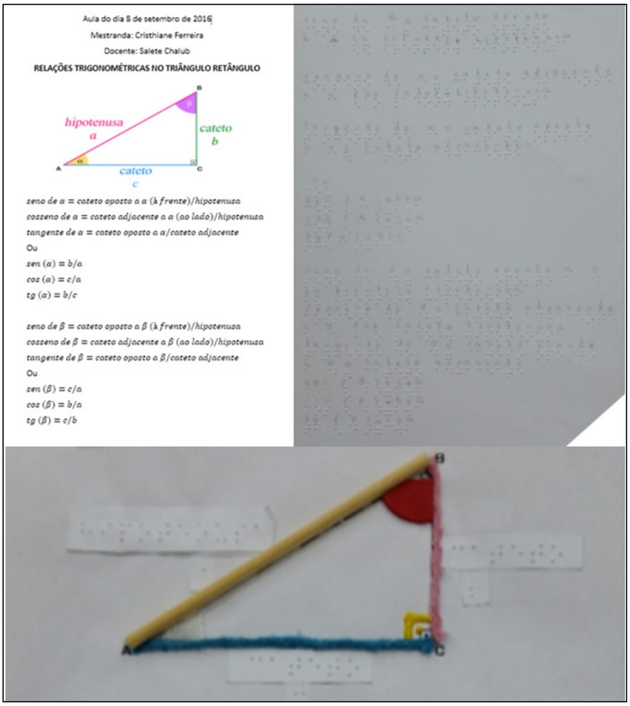


Figura 1: Plano de aula sobre relações trigonométricas no triângulo retângulo, plano de aula adaptado em braile e adaptação em alto relevo do RTA.

Fonte: Elaboração da autora com o auxílio do NAPNE, 2016.

Esse procedimento teve início na aula no dia 08 de setembro de 2016 com a explicação do conceito de triângulo retângulo e esclareceu-se o que são os catetos (representados pelo barbante nas cores azul e rosa) e a hipotenusa (identificada com o palito de churrasco), o lado maior oposto ao ângulo reto (conhecido como de 90º e representado com cola amarela em alto relevo).

Em prosa com os pensamentos de Cosenza e Guerra (2011) constatou-se que o fenômeno da atenção, pode ser entendido como uma metáfora onde uma:

> Janela aberta para o mundo, na qual dispomos de uma lanterna que utilizamos para iluminar os aspectos que mais nos interessam. É preciso lembrar que essa lanterna ilumina também nossos processos interiores quando focalizamos nossos pensamentos, resolvemos problemas ou tomamos decisões conscientes (COSENZA e GUERRA, 2011, p.42).

Dessa forma, a atenção está ligada ao nível de vigilância ou alerta em que o cérebro se encontra em determinados momentos. Por isso, a atividade cerebral sofre variações que vão desde o sono profundo, onde há prejuízos para o desenvolvimento da atenção e memória ou em estado de vigilância plena. Tal variação ocorre por motivos de ansiedade em que a atenção e o processamento cognitivo são prejudicados, assim como o despertar.

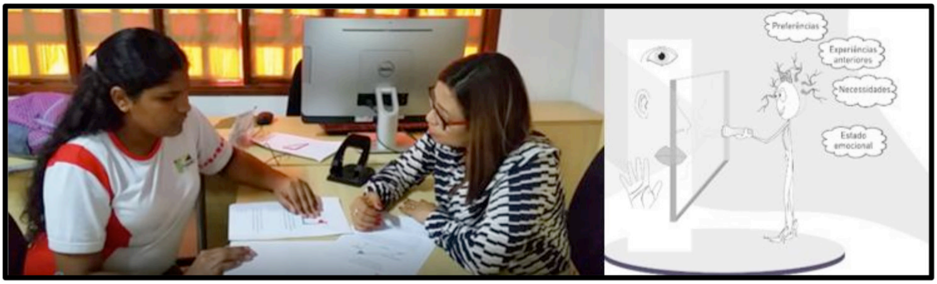


Figura 2: Material didático adaptado RTA e o processo cognitivo da atenção.

Fonte: Acervo da autora; Cosenza e Guerra (2011, p.42), 2016.

Após essa observação deu-se prosseguimento aos ensinamentos com a estudante identificando o cateto oposto e o cateto adjacente, discernidos a partir da posição dos ângulos (a marcação dos ângulos foram feitas com E.V.A. na cor vermelha, papel embalagem e com cola em alto relevo amarela para o ângulo de 90º, o que separa os catetos).

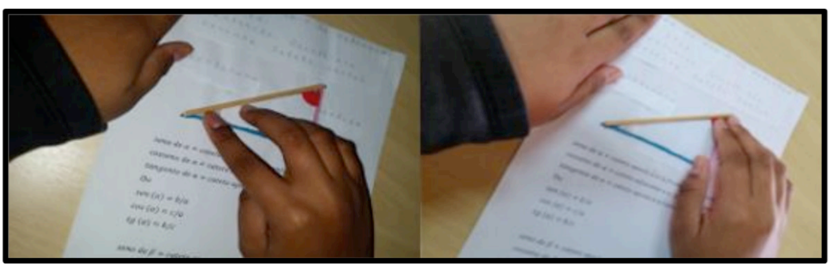


Figura 3 – Testando o material adaptado (RTA) com a aluna cega no IFAC.

Fonte: Arquivo da autora e aulas na disciplina MPECIM022, 2016.

Convém esclarecer que se testou o material didático adaptado no decorrer da disciplina MPECIM022 com os colegas do mestrado e ficou bem claro como identificar as relações trigonométricas no triângulo retângulo, isto é, os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo.

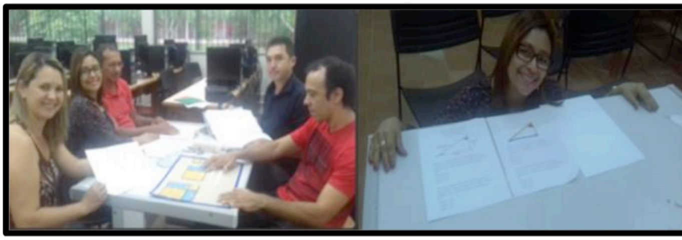


Figura 4: Produção e análise dos materiais adaptados com os colegas de mestrado.

Fonte: Acervo da autora, 2016.

A seguir apresentaremos o próximo material didático adaptado.

Segundo material didático adaptado

O segundo material didático adaptado denominado RTA1 foi adaptado com o auxílio do CAP/AC para trabalhar o mesmo assunto, relações trigonométricas no triângulo retângulo com o intuito de melhorar o primeiro material adaptado, o RTA. O plano de aula permaneceu o mesmo, mas a transcrição em braile modificada para melhor manuseio e assimilação.

Em seguida foi feita a adaptação do segundo material didático, como parte do produto educacional, em alto relevo e texturas diferentes. Tudo identificado em transcrição no português (acima da escrita em braile) para a professora e em braile para a estudante cega.

Os materiais utilizados para a confecção do RTA1 foram a reglete, o punção, papel A4 (40kg), prancheta, E.V.A., cola, cola em alto relevo, cola quente, papel cartão, fita adesiva, folha de revistas em canudo e material de sinalização de trânsito de acordo com a Figura 5.

Figura 5: Texto em braile e material didático adaptado sobre o RTA.

Fonte: Elaboração da autora com o auxílio do CAP/AC, 2016.

Esse plano foi executado no dia 11 de outubro de 2016 novamente com a explicação do que são catetos e hipotenusa. Em seguida destacou-se os catetos (representados pelas folhas de revista em canudos) e a hipotenusa (identificada com o material de sinalização de trânsito), o lado maior oposto ao ângulo reto (conhecido como de 90º e representado com E.V.A e cola preta em alto relevo). Na continuidade, distinguiu-se com a estudante o cateto oposto e o cateto adjacente, apontados a partir da posição dos ângulos (a marcação dos ângulos foram feitas com E.V.A. na cor azul e papel A4 com escrita em braile).

Em seguida, foi solicitado que a mesma tocasse o triângulo e identificasse as texturas iguais e diferentes como mostra a Figura 6. A Aluna identificou cada item representado no material com texturas diferentes.

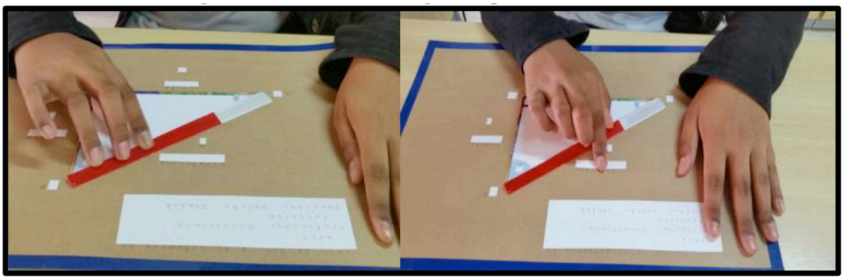


Figura 6 – Testando o segundo produto, o RTA1.

Fonte: Arquivo da autora, 2016.

Observou-se que por falta de conhecimento específico da escrita em braile do código matemático unificado no momento da leitura do material, a estudante não conseguiu ler *sen* = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$, *cos* = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$ e *tg* = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$. Então, em parceria com o coordenador do NAPNE, buscou-se uma solução para tal fato.

Para tanto, foi sugerido à estudante aulas no contraturno de Código Braille de Matemática para o Ensino Médio com o coordenador do NAPNE, o que lhe possibilitou um reforço na leitura algébrica da Matemática. Só então, foi efetuada a leitura do material didático de matemática adaptado em alto relevo e com o código Braille em Matemática, como mostra a Figura 7.

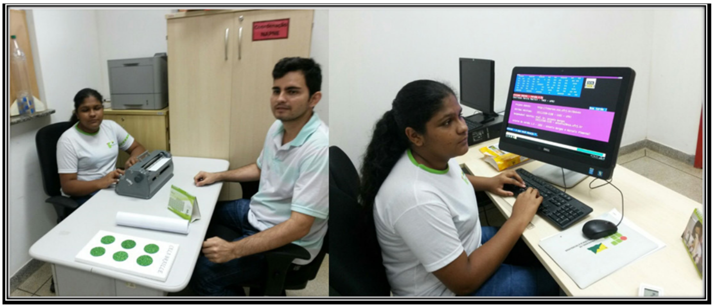


Figura 7: Atendimento da estudante no NAPNE (Núcleo de apoio à pessoas com necessidades específicas) com materiais básicos para alfabetização em braile.

Fonte: Acervo da autora, 2016.

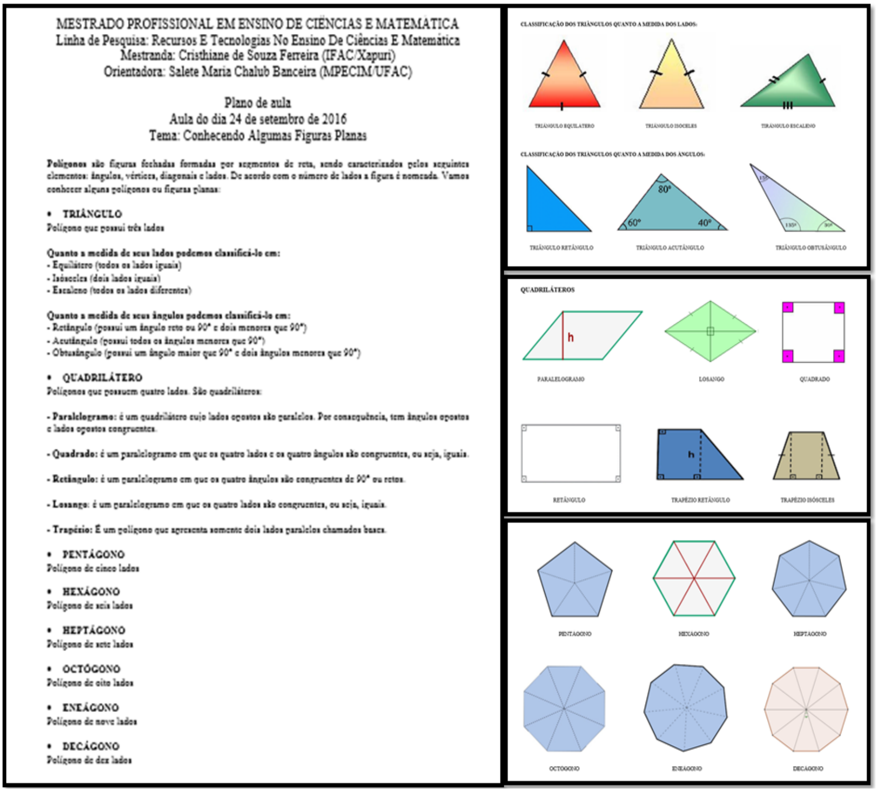
No próximo tópico, será abordado um material didático adaptado que trata da identificação de algumas figuras geométricas planas.

Terceiro material didático adaptado

No dia 24 de outubro de 2016, foi pensado na adaptação de um material para trabalhar o assunto de figuras geométricas planas. O propósito incumbiu identificar tais figuras em detrimento do desconhecimento da referida aluna sobre a temática cognominando o material de Figura Geométricas Planas Adaptadas (FGPA).

Primeiramente foi planejado a aula com o conteúdo de Geometria Plana, conforme conceitua Dante (2011). Em seguida foram construídos triângulos: equilátero, isósceles e escaleno para trabalhar a identificação quanto a medida dos lados; triângulos: retângulo, acutângulo e obtusângulo para trabalhar a identificação quanto a medida dos ângulos; quadriláteros: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio para trabalhar a identificação quanto a medida dos lados e forma de cada um dos polígonos; polígonos diversos: pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono e decágono para trabalhar a identificação quanto a medida dos lados e forma de cada um dos polígonos com o escopo de fazer com que os alunos com deficiência visual consigam identificar corretamente as figuras geométricas planas.

O delineamento propõe a elaboração de um plano de aula para fazer a adaptação em braile. Na primeira parte, tem-se o conceito de polígonos. Em seguida, passou-se para a identificação e classificação dos triângulos quanto à medida dos lados e quanto à medida dos ângulos. Seguiu-se com a identificação e classificação dos quadriláteros. Por último, foi feita a consubstanciamento de alguns polígonos quanto ao número de lados, segundo demonstra a Figura 8.



MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Linha de Pesquisa: Recursos E Tecnologias No Ensino De Ciências E Matemática
Mestranda: Cristhiane de Souza Ferreira (IFAC/Xapuri)
Orientadora: Salete Maria Chalub Banceira (MPECIM/UFAC)

Plano de aula
Aula do dia 24 de setembro de 2016
Tema: Conhecendo Algumas Figuras Planas

Polígonos são figuras fechadas formadas por segmentos de reta, sendo caracterizados pelos seguintes elementos: ângulos, vértices, diagonais e lados. De acordo com o número de lados a figura é nomeada. Vamos conhecer alguns polígonos ou figuras planas:

- **TRIÂNGULO**

Polígono que possui três lados

Quanto a medida de seus lados podemos classificá-lo em:
- Equilátero (todos os lados iguais)
- Isósceles (dois lados iguais)
- Escaleno (todos os lados diferentes)

Quanto a medida de seus ângulos podemos classificá-lo em:
- Retângulo (possui um ângulo reto ou 90° e dois menores que 90°)
- Acutângulo (possui todos os ângulos menores que 90°)
- Obtusângulo (possui um ângulo maior que 90° e dois ângulos menores que 90°)

- **QUADRILÁTERO**

Polígonos que possuem quatro lados. São quadriláteros:

- **Paralelogramo:** é um quadrilátero cujo lados opostos são paralelos. Por consequência, tem ângulos opostos e lados opostos congruentes.

- **Quadrado:** é um paralelogramo em que os quatro lados e os quatro ângulos são congruentes, ou seja, iguais.

- **Retângulo:** é um paralelogramo em que os quatro ângulos são congruentes de 90° ou retos.

- **Losango:** é um paralelogramo em que os quatro lados são congruentes, ou seja, iguais.

- **Trapézio:** É um polígono que apresenta somente dois lados paralelos chamados bases.

- **PENTÁGONO**

Polígono de cinco lados

- **HEXÁGONO**

Polígono de seis lados

- **HEPTÁGONO**

Polígono de sete lados

- **OCTÓGONO**

Polígono de oito lados

- **ENEÁGONO**

Polígono de nove lados

- **DECÁGONO**

Polígono de dez lados

Figura 8: Plano de aula com os conceitos de polígonos; classificação dos triângulos quanto a medida dos lados e quanto a medida dos ângulos; especificação dos quadriláteros; e identificação de outros polígonos quanto ao número de lados.

Fonte: Elaboração da autora, 2016.

Dando sequência na elaboração do objeto, transcrevemos o plano de aula para o braile. Os materiais utilizados para a confecção do material foram a reglete, o punção, papel A4, papel A4 (40kg), prancheta, para a escrita em braile, E.V.A. com seis texturas diferentes, cola, cola em alto relevo, fita dupla face, fita adesiva, papel cartão, papel de embalagem em duas texturas diferentes, tesoura, caneta e régua adaptada.

Inicialmente foi realizada a adaptação dos triângulos quanto a medida dos lados e quanto a medida dos ângulos; seguiu-se fazendo a adaptação dos quadriláteros; continuou-se com a adaptação dos demais polígonos conforme a Figura 9.

Figura 9: Plano de aula adaptado em braile sobre os conceitos das figuras geométricas planas (FGPA); classificação dos triângulos quanto a medida dos lados e quanto a medida dos ângulos; especificação dos quadriláteros; denominação dos demais polígonos quanto ao número de lados.

Fonte: Elaboração da autora, 2016.

A primeira construção das adaptações foi feita com o material didático estático adaptado. Agora será apresentado o material didático dinâmico conforme Figura 10.

Figura 10: Material didático dinâmico.

Fonte: Elaboração da autora, 2016.

O procedimento da aula foi exposto aos colegas do mestrado e ficou notória a constatação de cada figura geométrica em função da riqueza de detalhes contida nos materiais adaptados.

Ao apresentar o material para a aluna, foi solicitado a leitura do material em braile para alicerçar o tema proposto, seguido da explanação do mesmo. Na sequência realizou-se o contato com o material com o intuito de possibilitar discernimento com a ponta dos dedos em cada figura e reconhecimento das diferentes texturas, em conformidade com a Figura 11.

Figura 11: Aluna efetuando a leitura do plano de aula do material FGPA e identificação das respectivas figuras.

Fonte: Acervo da autora, 2016.

Os triângulos contavam com identificações específicas em E.V.A. para lados iguais e para os lados com medidas diferentes. Também tinham texturas diferentes para os ângulos como papel de embalagem lisa para ângulo menor que 90°, papel de embalagem com textura fosca para ângulo maior que 90° e cola em alto relevo para o ângulo de 90°. Segundo depoimento da estudante deficiente visual "*ficou muito mais claro aprender com o material adaptado, pois ela pôde enxergar através do tato todas as partes das figuras geométricas e identificar através das texturas o que cada figura representava*".

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O primeiro material didático adaptado intitulado RTA foi utilizado com a intenção de proporcionar à aluna deficiente visual conhecer e identificar as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Para tanto, buscou-se embasamento em Cosenza e Guerra (2011), para saber como o cérebro funciona em relação à aprendizagem, visto que é necessário saber como as informações chegam até ele. Quando a aluna com essa necessidade específica toca o material ocorrem sensações táteis que aplicadas a pele do dedo levam a informação de uma célula para outra até chegar em uma área do cérebro chamada córtex cerebral. Para Cosenza e Guerra (2011, p.17):

> A energia mecânica aplicada à pele de um dedo impressiona receptores táteis, que desencadeiam impulsos nervosos que viajam por fibras nervosas presente em nervos. Os nervos são cordões constituídos de prolongamentos de neurônios que ligam o sistema nervoso central aos órgãos periféricos. As fibras que trazem a informação tátil a conduzem até o interior do sistema nervoso (no caso a medula espinhal, situada no interior da coluna vertebral), repassam essa informação a um segundo neurônio, que tem a função de transportá-la até outras células nervosas, e finalmente atingem o córtex cerebral. Essa região especializada no processamento das informações táteis, fará com que identifiquemos a estimulação original, bem como a sua localização.

Nessa perspectiva, Piaget (*apud* WADSWORTH, 1995), afirma que aprender é uma interpretação pessoal do mundo, dito em outras palavras, é uma atividade individualizada, um processo ativo no qual o significado é desenvolvido com base em experiências e que o professor é então aquele que cria situações compatíveis com o nível de desenvolvimento cognitivo do aluno, em atividades (como a aula elaborada) que possam desafiar os alunos. Dessa forma, o aluno exerce um papel ativo e constrói seu conhecimento, sob orientação constante do professor.

> A experiência é sempre necessária para o desenvolvimento intelectual, mas eu temo que possamos cair na ilusão de ser submetido a uma experiência (uma demonstração, por exemplo) seja suficiente para que o sujeito libere as estruturas envolvidas. Muito mais do que isso é necessário. O sujeito deve ser ativo, deve transformar as coisas e deve descobrir a estrutura de suas próprias ações sobre objetos (PIAGET, 1964, p.4 *apud* WADSWORTH, 1995, p.160).

Vygotsky (*apud* OLIVEIRA, 2001), em sua concepção, aciona o conceito de mediação, processo que vê o homem como sujeito do conhecimento sem acesso direto aos objetos, mas com acesso mediado em situações reais, assim dizendo, o conhecimento não está sendo visto como uma relação do sujeito sobre a realidade, mas pela mediação feita por outros sujeitos.

Um dos elementos de mediação utilizados pelo autor é o instrumento elaborado para a realização de atividades humanas. Em nosso caso, a professora produz seus instrumentos para a realização de tarefas específicas, conservando os mesmos para uso posterior, além de preservar e transmitir sua função aos educandos e, também, aperfeiçoar instrumentos e criar novos como far-se-á com o próximo material didático.

De acordo com Bezerra (2017, p.145), o aprendizado do aluno está associado a um processo de compensação que será determinado por dois componentes imprescindíveis: "*de um lado, a amplitude, a dimensão da falta da adaptação da criança, o ângulo de divergência de sua conduta e os requisitos sociais formulados e planejados para sua educação; de outro lado, o fundamento, a base de compensação, a riqueza e a diversidade de funções*."

Na concepção da professora-pesquisadora, o aprendizado da aluna depende de fatores: emocionais, estímulos, vontade de aprender por parte da aluna, suporte familiar, auxílio dos colegas, auxílio do NAPNE e equipe pedagógica. Mas, também, materiais didáticos bem elaborados com: escrita em braile, adaptações texturizadas adequadas, linguagem clara e detalhada do que será ministrado.

A experiência de ter um material adaptado para ensinar o conteúdo de relações trigonométricas no triângulo retângulo despertou na aluna um interesse em aprender, posto que anteriormente suas experiências eram apenas de ouvir, sem nenhum contato com material em braile ou adaptações texturizadas. Conforme relato da estudante ao final da aula "ficou muito mais claro aprender com o material adaptado, uma vez que, pôde enxergar através do tato todas as partes do triângulo e identificar através das texturas o que cada um representava" (ALUNA, 2016).

Observou-se que ao preparar um material para a estudante deficiente visual, não só a aluna necessitou de dedicação para acomodar e assimilar o conteúdo proposto, mas a professora-pesquisadora engajou-se em busca de novos recursos e aprender, também, que "a fala detalhada é muito importante para o aprendizado, bem como, construir e saber explicar adequadamente, com riqueza de detalhes, os materiais construídos" (PROF., 2016).

Ao analisar o primeiro material notou-se que o mesmo não foi elaborado com os cuidados necessários para o alcance da eficiência de utilização do mesmo pela deficiente visual em questão, respeitando os critérios mencionados por Cerqueira e Ferreira (2000) e Sá, Campos e Silva (2007), no dia 29 de setembro de 2016, foi pensada na segunda adaptação de material para trabalhar o assunto de relações trigonométricas no triângulo retângulo, chamado de RTA1.

Em relação ao segundo material adaptado foi diligenciado auxílio do CAP/AC para trabalhar o mesmo assunto, relações trigonométricas no triângulo retângulo. Vale ressaltar que o plano de aula permaneceu o mesmo e foi realizado modificações apenas na transcrição em braile e elaboração texturizada do triângulo. Para a professora-pesquisadora foi necessário criar mecanismos para chamar a atenção da aluna, como a forma de dar aula, a fala, os materiais, a relação de afetividade e o atendimento individualizado. A mesma mostrou-se disposta a participar da aula e a testar os materiais, pois mostrou motivação.

Ao conferir o pensamento de Cosenza e Guerra (2011), constatou-se que muitas informações que chegam ao cérebro não são processadas porque algumas informações são desnecessárias e, nem tampouco, ele possui capacidade para examinar tudo ao mesmo tempo. Para estes autores (p.41) "*Por isso, a natureza nos dotou de mecanismos que permitem selecionar a informação que é importante. Através do fenômeno da atenção somos capazes de focalizar em cada momento determinados aspectos do ambiente, deixando de lado o que for dispensável.*"

Sendo assim, o fenômeno da atenção para a aluna deficiente visual pode ser vista como uma abertura para o mundo iluminado por um farol para identificar os aspectos que a interessam. Entretanto, torna-se necessário que o cérebro mantenha um certo nível de vigilância para manter a atenção. E, esse fato ocorre no momento da mediação da professora-pesquisadora com a explicação dos conceitos utilizando os materiais didáticos adaptados.

Para a estudante ocorre a chamada vigilância em que o foco da atenção está direcionado para os materiais didáticos e a utilização dos lóbulos parietais (ao tocar o material) e o temporal (ao ouvir a explicação da professora). Dessa forma, percebeu-se um despertar da aluna para a aprendizagem do conteúdo, em razão de que, a mesma manteve atenção e interesse e, ainda afirmou que "*com este material foi possível assimilar melhor o assunto proposto.*" (ALUNA, 2016).

Por fim, será analisaremos o terceiro material didático adaptado que trata da identificação de algumas figuras geométricas planas. Esse material foi planejado e confeccionado pela professor-pesquisadora em consonância com a abordagem de Dante (2011) com o escopo de fazer com que os alunos com deficiência visual consigam identificar corretamente as figuras geométricas planas.

Após a leitura e manuseio do mesmo percebe-se a importância dos cuidados necessários para construção e adaptação dos materiais didáticos para ensinar aos estudantes cegos, conforme apontado no texto por Cerqueira e Ferreira (2009).

Contudo, ao final da aula a aluna sentiu-se satisfeita com os materiais didáticos (estático e dinâmico) e muito feliz por fazer parte do processo de aprendizagem. Em seguida, discursou uma frase que não poderia deixar de ser evidenciada como ilustra a Figura 12.

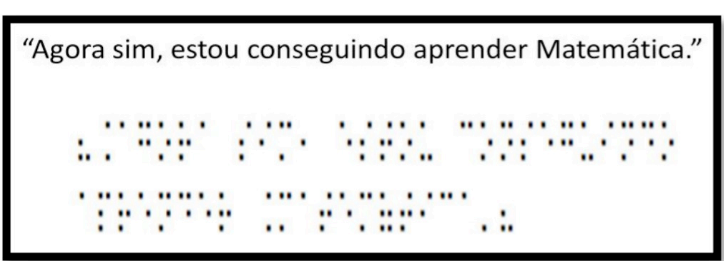


Figura 12 – Frase da aluna após a aula.

Fonte: Elaboração da autora com o auxílio do CAP/AC, 2016.

Em consonância com o exposto, as figuras planas segundo Bandeira (2015, p.95):

> Foram utilizados para a estudante perceber com o *sentido do tato* (lembrando que o lobo parietal é acionado para ver com as mãos), substituindo o sentido da visão (lobo occipital – córtex visual primário lesado) e, através da audição (sentido decodificado pelo lobo temporal) a estudante escutou com atenção a explicação.

Por intermédio do prisma da professora-pesquisadora, a motivação foi fundamental no sentido de favorecer que a aluna deficiente visual compreendesse o conteúdo, uma vez que houve incentivo, material adequado e específico para a mesma, bem como uma recompensa.

A educanda em questão, após a aula foi indagada pela professora-pesquisadora a participar da I Feira Estadual de Matemática do Acre para apresentar o conteúdo de geometria plana utilizando o material confeccionado pela docente e testar a validade do material. A alegria e satisfação foram imediatos seguidos de um imenso “SIM”.

A apresentação do material didático intitulado Figuras Geométricas Planas Adaptadas (FGPA) com a participação da estudante deficiente visual, da professora-pesquisadora e da docente da UFAC pode ser vislumbrada na Figura 13.

Figura 13 – Apresentação de trabalho na I Feira Estadual de Matemática do IFAC.

Fonte: Arquivo da autora, 2016.

O trabalho desenvolvido em parceria com aluna, professora em mestrado e orientadora Dra. Salete Maria Chalub Bandeira foi muito relevante. Sem nenhuma inibição, a aluna apresentou seu trabalho incansavelmente para alunos, professores e avaliadores sempre com um imenso sorriso no rosto. Ninguém esperava ou acreditava ser possível. Ela fez muitos chorarem de emoção e foi destaque na I Feira de Matemática do IFAC no Município de Rio Branco em 2016.

Figura 14 – Apresentação do trabalho na I Feira de Matemática e premiação.

Fonte: Acervo da autora, 2016.

Conforme a experiência com a referida estudante, percebeu-se que a aprendizagem ocorreu pela interação por meio da linguagem oral (fala) e pelo contato tátil (a linguagem da afetividade) em que podemos incluir, também, a linguagem computacional (*Dosvox*), indicando-se, dessa forma, possibilidades para a ampliação de seus contatos sociais e permitindo aprendizagens diversas.

Piaget (*apud* WADSWORTH, 1995) profere que a aprendizagem ocorre devido uma relação existente entre o que a aluna sabe e o meio físico e social que lhe é oferecido. Sem desafios não há porque buscar soluções. Logo, existe uma procura por respostas quando, esta, está diante de uma situação que necessita resolver.

Ao complementar o viés de Piaget (*apud* WADSWORTH, 1995), Vygotsky (*apud* OLIVEIRA, 2001) enfatiza que a cognição tem origem na motivação, mas que ela não brota sozinha como se a aluna tivesse com vontade e naturalmente motivada. Esse impulso para proceder em direção a algo deve ser direcionado, em outros termos, a aluna aprende aquilo que deseja aprender.

Para corroborar com a mesma ideia, Cosenza e Guerra (2011) reforçam que a motivação está relacionada com experimentos e carga emocional, já que neste momento permanecemos mais vigilantes e a atenção se voltará

> (...) para os detalhes mais importantes, pois as emoções controlam os processos motivacionais. Além disso, sabe-se que a amígdala interage com o hipocampo e pode mesmo influenciar o processo de consolidação da memória. Portanto, uma pequena excitação pode ajudar no estabelecimento e conservação de uma lembrança. (COSENZA e GUERRA, 2011, p.83)

As emoções podem acarretar resultados positivos e/ou negativos na aprendizagem. Então, enquanto a motivação realiza emoções positivas, a neurociência fornece conhecimentos que podem indicar caminhos a seguir no processo de ensino-aprendizagem.

Para finalizar o diálogo entre os autores, Bezerra (2017, p.135) enfatiza que a aprendizagem ocorre por meio de caminhos transformadores "*que orientam mudanças que não podem ocorrer de forma espontânea ou prontamente, mas de forma planejada e elaborada, adotando metodologias de trabalho compartilhadas*" com ações "representativas do desejo e da motivação de todos os envolvidos com a educação e com a escola.

O conhecimento experienciado na elaboração e execução da pesquisa possibilitou realizar intervenções e criar materiais didáticos adaptados que possam potencializar o ensino e o aprendizado de Matemática para estudantes com deficiência visual. Além do mais, possibilitar à professora de Matemática, saberes docentes para atuar em turmas com estudantes com esta necessidade específica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar a pesquisa, a professora-pesquisadora não tinha os conhecimentos necessários para ensinar estudantes com deficiência visual nas escolas regulares. Para tanto, precisou adquiri-los no caminho, destacando a Tecnologia Assistiva e a Neurociência com o foco no processo cognitivo da atenção. Também percebeu a importância de aprender a utilizar uma linguagem matemática mais detalhada para ensinar a referida estudante, ou melhor, precisou aprender para poder ensinar.

Diante do cenário, foi apresentado o problema da pesquisa: Como os materiais didáticos adaptados ao ensino de Matemática e a neurociência com o processo cognitivo da atenção possibilitam o aprendizado da estudante com cegueira?

Nessa busca, em prol de informações e descobertas sobre como se pode ensinar e aprender Matemática com materiais didáticos, encontrou-se no estudo de caso uma possibilidade de tornar mais acessível o aprendizado de alguns conteúdos em Matemática à estudantes deficientes visuais.

Ressalta-se que tornou-se imprescindível que a professora-pesquisadora aprendesse primeiro, para posteriormente ensinar. Para tanto, esquadrinhou-se em cursos de capacitação, congressos, seminários, eventos científicos, CAP/AC e nas disciplinas do MPECIM/UFAC os conhecimentos necessários para desenvolver habilidades para construir matérias adaptados, bem como, planejar e executar as aulas com um diálogo detalhado voltado para essa especificidade,

A partir dessas experiências, o problema da pesquisa desvelou-se no objetivo de compreender como os materiais didáticos adaptados, mediados pelo professor de Matemática, e como o processo cognitivo da atenção podem potencializar o aprendizado de estudantes com cegueira.

A temática “Materiais Didáticos Adaptados e o Foco da Atenção Potencializando o Aprendizado de Estudantes Cegos em Matemática” instiga a investigar e abordar a conjectura de “como o cérebro aprende” (COSENZA E GUERRA, 2011), com ênfase nos processos cognitivos da aprendizagem ao estabelecer um diálogo entre a Neurociência e à Educação Matemática, bem como, os fenômenos da atenção.

Para construir e ensinar com os materiais didáticos adaptados a estudantes deficientes visuais buscou-se em Cerqueira e Ferreira (2000) os cuidados necessários na elaboração dos materiais desenvolvidos, bem como, orientações no decorrer da disciplina MPECIM022 e CAP/AC.

Na continuidade foi feita a análise da pesquisa, posto que, na intervenção com o material didático construído, observou-se na primeira aula com o RTA, uma dificuldade com o tempo, visto que a aluna demorou muito com a leitura e não conhecia alguns símbolos.

Ao passar para a identificação das texturas do triângulo retângulo (relacionando as texturas com os conceitos matemáticos), observou-se, também, um pouco de dificuldade em relacionar os conceitos e identificar, com clareza, catetos e hipotenusa, bem como os ângulos. O papel da professora-pesquisadora foi fundamental nesse aspecto, pois precisou motivar, indagar, questionar e desafiar a aluna, mostrando alguns “macetes”.

Foi destacado para a estudante, como identificar primeiro o ângulo reto (90°), seguindo da identificação dos catetos que se unem, também, no ângulo reto e que a hipotenusa fica bem à frente do mesmo ângulo, a mesma foi tomando posse de cada detalhe para apontar cada item proposto, e com o foco da atenção para o material didático e a mediação da professora a estudante aos poucos foi aprendendo os conceitos trabalhados com o material didático.

Com relação ao segundo material didático RTA1, que tratou do mesmo assunto, foi bem mais fácil, dado que a estudante já tinha algum conhecimento sobre os conceitos abordados.

A estudante já havia tido um primeiro contato com o conteúdo proposto, também já com a atenção direcionada com as texturas utilizadas, o material reelaborado (com a colaboração dos profissionais do CAP/AC) foi mediado pela professora-pesquisadora de e dessa forma a aluna identificou rapidamente tudo que foi indagado e respondeu às perguntas da professora-pesquisadora, conhecendo as relações trigonométricas no triângulo retângulo do cosseno, do seno e da tangente de um ângulo.

O terceiro material didático adaptado que trata da identificação das figuras planas (FGPA) houve um maior empenho, tanto da professora-pesquisadora quanto da aluna. Foi planejado e construído novamente um material em braile e adaptou-se figuras planas texturizadas em alto relevo, todas com materiais diferentes, desafiando a criatividade e o empenho da aluna.

Essa aula foi proveitosa, uma vez que a aluna teve várias figuras para identificar, saber seus conceitos e diferenças tanto com material didático estático quanto com material didático dinâmico e com o foco da atenção conforme a mediação da professora. No decorrer dessa atividade não foram demonstradas maiores dificuldades.

Dessa forma, percebeu-se que com um material didático adequado e uma metodologia específica, é possível trabalhar vários conteúdos, possibilitando um maior desenvolvimento do raciocínio e uso da memória durante o aprendizado, mas é importante que o professor tenha a atenção e procure se adequar às diversas formas de ensino para diferentes alunos, com deficiência ou não, levando o conhecimento e aprendizado para a vida de todos.

Além disso, os conhecimentos da Neurociência viabilizaram evidenciar que existe a possibilidade de adaptar materiais estáticos e dinâmico, assim como, o foco da atenção oportuniza despertar na estudante os caminhos para o aprendizado da Matemática utilizando o tato (lobo parietal) e a audição (lobo temporal).

Além disso, é importante que se busque aprender novas metodologias e práticas pedagógicas inovadoras, com atitudes que vão além dos discursos vazios, em busca do sucesso de seus alunos, o que trará, sem dúvida, realização profissional e pessoal.

Com base na avaliação realizada pela colaboradora da pesquisa, pode-se afirmar que o material desenvolvido favoreceu a construção do conhecimento e desenvolvimento da aluna, pois promoveu por meio da ação mediada a formação de sistemas funcionais que levaram ao desenvolvimento desta competência e da autonomia da referida aluna.

Portanto, o produto educacional construído e apresentados foram importantes para auxiliar na aprendizagem de alunos com deficiência visual.

Sabe-se que a inclusão de alunos com deficiência visual está garantida por lei, mas para que ela possa ser realmente incluída no ambiente de ensino, como qualquer outro aluno, é essencial que o professor disponha de orientação específica e, principalmente, boa vontade.

A construção de materiais didáticos adaptados às necessidades dos estudantes que não conseguem enxergar o mundo à sua volta, mas que possuem outros sentidos disponíveis ao aprendizado e a sobrevivência, tem se constituído em importante instrumento de apoio ao ensino da Matemática.

Para construir e ensinar com materiais didáticos adaptados foi necessário participar de eventos científicos, fazer cursos de capacitação, já mencionados no capítulo 1, bem como, compreender como o cérebro aprende, leitura feita no trabalho de Cosenza e Guerra (2011) enfatizando a pesquisa nos processos cognitivos básicos da aprendizagem (percepção, atenção e memória).

A pesquisa de Bandeira (2015), auxiliou nas possibilidades de como se pode formar professores de Matemática e construir materiais didáticos de baixo custo eficazes para o aprendizado do estudante com cegueira, destacando que a Neurociência e a educação podem colaborar no processo de formação de professores tendo como ponto favorável a atenção, a mediação do professor e como ensinar com os materiais construídos.

Com embasamento nas experiências adquiridas durante o percurso da pesquisa, pode-se afirmar que os materiais didáticos adaptados construídos pela professora-pesquisadora e utilizados pela estudante DV teve um papel fundamental para que a mesma tivesse acesso ao conteúdo, assimilando e acomodando os detalhes e conceitos trabalhados com os materiais didáticos adaptados RTA, RTA1 e FGPA.

Criar o material adaptado para uso pedagógico no ensino da Matemática com deficientes visuais, exige do professor uma postura que vai muito além do domínio dos conhecimentos matemáticos, pois verificar as necessidades do aluno, pensar e criar uma ferramenta que melhor responda a essas necessidades, analisar os seus resultados e o *feedback* do aluno, são etapas que fazem parte do processo de construção e aplicação do material didático elaborado para atender aos deficientes visuais.

A experiência vivida, evidencia que inclusão implica mudança, e que, além de todas as dificuldades e barreiras encontradas, é necessário que os envolvidos persistam, acreditem e envolvam-se neste processo fazendo dos empecilhos, um motivo para continuar lutando. E, o que nos leva a prosseguir é a satisfação de dever cumprido, além de um sorriso de vitória contemplado no rosto daqueles que até bem pouco tempo, faziam apenas número em seu referido ambiente escolar, mas que agora fazem parte do processo ensino-aprendizagem mesmo que ainda minimamente, de forma lenta.

Enfim, o trabalho está apenas começando. Muitos leitores questionarão e outros encontrarão o início de sua jornada nestas páginas. Páginas que serão abertas por outras vozes que surgirão em meio a pesquisas e utilizarão desse viés, que se encerra por aqui, pelo tempo destinado a essa pesquisa, para encontrar outros caminhos no processo de ensino-aprendizagem para os DV.

REFERÊNCIAS

BANDEIRA, S. M. C. **Olhar sem olhos**: cognição e aprendizagem em contextos de inclusão – estratégias e percalços na formação inicial e docente de matemática. 2015. 489 p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso – Mato Grosso – Cuiabá, 2015.

BEZERRA, M. de L. E. **Olhos de Minerva: Caminhos da Inclusão**. Curitiba: Appris, 2017.

CERQUEIRA, J.B; FERREIRA, E.M.B. Recursos Didáticos na Educação Especial. In: **Revista IBC**, 15 ed., Abril de 2000. Disponível em: <http://www.ibc.gov.br/?itemid=102#more>. Acesso em: 04 mai. 2017.

COSENZA, R. M.; GUERRA, L. B. **Neurociência e Educação: como o cérebro aprende.** Porto Alegre: Artmed, 2011.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: atlas, 2010.

LIRA, A. K. M. de; BRANDÃO, J. **Matemática e Deficiência Visual**. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

MARCONI, M.A. & LAKATOS, E.M. **Técnicas de pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados.** 6ª edição, São Paulo: Atlas, 2007.

MARTINS, G.A. & PINTO, R.L. **Manual para elaboração de trabalhos acadêmicos**. São Paulo: Atlas, 2001.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2001.

SÁ, E. D.; CAMPOS, I. M.; SILVA, M. B. C. **Atendimento Educacional Especializado: deficiencia visual**. Gráfica e editora Cromos: Brasília, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/aee_dv.pdf .Acesso em 19 mar. 2017.

TRENTINI, M.; Paim, L. **Pesquisa em Enfermagem**. Uma modalidade convergente-assistencial. Florianópolis: Editora da UFSC, 1999.

YIN. R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

SOBRE O ORGANIZADOR

FRANCISCO ODÉCIO SALES - Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (2008) onde foi monitor de Cálculo Diferencial e Integral (2005) e bolsista de Iniciação Científico (PIBIC) financiado pelo CNPq (2005-2008) desenvolvendo pesquisa na área de Geometria Diferencial, com ênfase em Superfícies Mínimas e Equações Diferenciais Aplicadas. Licenciado Pleno em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2009). Especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2015). Mestre em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2019). Especialista em Docência na Educação Profissional, Científica e tecnológica pelo Instituto Federal do Ceará (2020). Foi professor da rede pública estadual do Ceará entre 2009 e 2019, atuando no magistério do ensino fundamental e médio. Atuo entre 2013 e 2016 como Assessor Pedagógico na Secretaria de Educação do Ceará (SEDUC/CE) onde coordenou projetos relacionados a educação Financeira, Educação Fiscal, Educação Cientifica e Formação de Professores. Representou o Ceará nas reuniões iniciais para implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na área de Matemática. Professor tutor da Universidade Aberta do Brasil (UAB/IFCE) desde de 2010 atuando na Licenciatura Plena em Matemática. Atualmente é Professor de Educação Básica, técnica e tecnológica (EBTT) do Instituto Federal do ceará (IFCE) atuando nas licenciaturas em Matemática e Física. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Geometria Diferencial. Coordena o Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) de Crateús e o Projeto de Intervenção em Matemática (PIM). Atua nas seguintes frentes de pesquisa: Superfícies Mínimas, Geometria não euclidiana, Olimpíadas de Matemática e Equações Diferenciais Aplicadas. É membro do Laboratório de Ensino de Ciências Naturais, Matemática e Música (IFCE Campus Crateús), do Grupo de Pesquisa em Matemática e Educação Matemática do IFCE e Professor Coordenador do Grupo de Pesquisa e Estudos em Ensino de Matemática do Ceará - GEPEMAC (em reconhecimento pelo CNPq). Orientador de Graduação e pós graduação (Monografia e TCC). Membro do corpo editorial das editoras Atena, DINCE e InVivo e da Revista Clube dos Matemáticos. Autor de livros na área de Matemática e Educação.

ÍNDICE REMISSIVO

N

P

R

S

T

U

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Pesquisa como Princípio Educativo:

O que podemos aprender com a Pesquisa em Matemática?

Atena Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Pesquisa como Princípio Educativo:

O que podemos aprender com a Pesquisa em Matemática?

Atena Editora
Ano 2021