

HAROLDO DA COSTA AIRES
IRENE CASTRO PEREIRA



**TÉCNICAS DE
PROBLEMAS OLÍMPICOS DE
GEOMETRIA PLANA**



Todo conteúdo deste trabalho, exceto quando houver ressalva, é publicado sob a licença **Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional**.

Copyright © 2019 Editora EditAedi Todos os direitos reservados.

Reitor

Dr. Emmanuel Zagury Tourinho

Vice-Reitor:

Dr. Gilmar Pereira da Silva

EDITORA DA ASSESSORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Membros do Conselho Editorial

Presidente:

Dr. José Miguel Martins Meloso

Diretora:

Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz

Membros do Conselho

Dr. Aldrin Moura de Figueiredo

Dr. Iran Abreu Mendes

Dra. Maria Ataíde Malcher

Autores

Haroldo da Costa Aires

Irene Castro Pereira

Capa e Editoração Eletrônica

Andreza Jackson de Vasconcelos

Editora

EditAedi

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Aires, Haroldo da Costa; Pereira, Irene Castro. **Técnicas de Problemas Olímpicos de Geometria Plana**. Belém: EditAedi/UFPA, 2019.

ISBN: 978-85-65054-91-1

1. Educação
 2. Matemática
 3. Geometria Plana
-

HAROLDO DA COSTA AIRES
IRENE CASTRO PEREIRA



**TÉCNICAS DE
PROBLEMAS OLÍMPICOS DE
GEOMETRIA PLANA**

1ª EDIÇÃO

BELÉM - PARÁ



editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2019

Lista de Figuras

2.1	o caso de congruência LAL .	20
2.2	o caso de congruência ALA .	21
2.3	o caso de congruência LLL .	21
2.4	o caso de congruência LAA_o .	22
2.5	paralelas cortadas por transversais.	23
2.6	teorema de Thales	23
2.7	demonstração teorema de Thales	24
2.8	dois triângulos semelhantes.	24
2.9	o caso de semelhança LLL .	25
2.10	prova do caso de semelhança LLL .	26
2.11	o caso de semelhança LAL .	27
2.12	prova do caso de semelhança LAL .	27
2.13	o caso de semelhança AA .	28
2.14	prova do caso de semelhança AA .	28
2.15	seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo.	30
2.16	a lei dos cossenos.	31
2.17	a relação de Stewart.	32
2.18	a lei dos senos.	33
2.19	1º caso: Triângulo acutângulo	34
2.20	2º caso: Triângulo obtusângulo	34
2.21	Razão entre áreas	35

2.22	prova fórmula de Heron	36
2.23	quadrilátero inscrito	38
2.24	prova $ABCD$ é inscrito.	38
2.25	quadrilátero inscrito II	39
2.26	quadrilátero inscrito III	39
2.27	Prova Quadrilátero Circunscrito (\implies).	40
2.28	Prova Quadrilátero Circunscrito (\impliedby).	40
2.29	duas retas secantes	41
2.30	caso 1	42
2.31	caso 2	42
2.32	uma reta secante e outra tangente	43
2.33	potência de ponto	43
2.34	eixo radical	44
2.35	propriedade do eixo radical.	45
2.36	duas circunferências interiores ou exteriores.	45
2.37	duas circunferências secantes.	46
2.38	duas circunferências tangentes.	46
2.39	prova teorema de ceva (\implies)	47
2.40	prova teorema de ceva (\impliedby)	48
2.41	Teorema de Menelaus	50
2.42	prova Teorema de Menelaus	51
2.43	prova Teorema recíproco de Menelaus	51
2.44	Observação 1	52
2.45	observação Teorema de Menelaus	53
2.46	exemplo 2.6.2	53
2.47	prova teorema de Pappus.	54
2.48	Baricentro	56
2.49	prova propriedade II	57
2.50	prova propriedade III	57
2.51	triângulo medial	58

2.52	bissetriz do ângulo \hat{A}	59
2.53	prova pontos da bissetriz equidistantes dos lados	59
2.54	prova teorema bissetriz interna	60
2.55	prova concorrência das bissetrizes internas	61
2.56	propriedade do incentro	61
2.57	teorema da bissetriz externa	62
2.58	$P \in (\text{mediatriz de } AB) \implies \overline{PA} = \overline{PB}$	63
2.59	o circuncentro de um triângulo	64
2.60	circuncírculo do $\triangle ABC$	65
2.61	ortocentro de um triângulo retângulo.	66
2.62	ortocentro de um triângulo acutângulo.	66
2.63	ortocentro de um triângulo obtusângulo	67
2.64	triângulo órtico do triângulo $\triangle ABC$	67
2.65	prova teorema de Ptolomeu.	69
2.66	prova teorema de Hiparco.	70
2.67	o círculo de Apolônio.	70
2.68	o teorema da Carnot.	71
2.69	reta de Euler.	73
2.70	Círculo dos Nove Pontos.	74
2.71	prova Reta Simson-Wallace	76
2.72	prova Reta Simson-Wallace	77
2.73	Inverso de um ponto interno à circunferência	78
2.74	Inverso de um ponto externo à circunferência	79
2.75	Inverso de um ponto pertencente à circunferência	79
2.76	Circunferências Ortogonais	80
2.77	Circunferências Ortogonais	81
2.78	P e P' conjugados harmônicos	82
2.79	Inversão de reta que não passa por O.	83
2.80	Inversão de circunferência que passa por O.	84
2.81	Circunferências C e C' inversas.	86

2.82	$\alpha = \alpha'$	86
2.83	$\alpha = \alpha'$	87
2.84	Inversão preserva tangência.	87
2.85	$r \parallel s$	88
2.86	M ponto médio de XY	89
2.87	I e I' são conjugados harmônicos de AK	90
2.88	Lema 2.9.5	91
2.89	Reta s é a inversa da Circunferência dos nove pontos.	92
2.90	Teorema de Feuerbach.	93
3.1	solução problema 3.1	94
3.2	problema 3.2	95
3.3	solução problema 3.3-1	96
3.4	solução problema 3.3-2	96
3.5	solução problema 3.3-3	97
3.6	solução problema 3.4-1	97
3.7	solução problema 3.4-2	98
3.8	solução problema 3.4-3	99
3.9	solução 1 problema 3.5	99
3.10	solução 2 problema 3.5	100
3.11	solução problema 3.6	101
3.12	solução problema 3.7	102
3.13	solução problema 3.8	103
3.14	solução problema 3.9	104
3.15	problema 3.10	105
3.16	solução problema 3.10	105
3.17	problema 3.11	106
3.18	solução problema 3.11	106
3.19	solução problema 3.12	107
3.20	problema 3.13	108
3.21	solução problema 3.13	109

3.22	solução problema 3.14	110
3.23	solução problema 3.15	111
3.24	problema 3.16	111
3.25	solução problema 3.17	113
3.26	problema 3.18	113
3.27	solução problema 3.18	114
3.28	solução problema 3.19	114
3.29	solução problema 3.20	115
3.30	solução problema 3.21	116
3.31	solução problema 3.22	117
3.32	solução problema 3.23	118
3.33	solução problema 3.24	119
3.34	solução problema 3.25	120
3.35	solução problema 3.26	121
3.36	problema 3.27	122
3.37	solução problema 3.28-1	123
3.38	solução problema 3.28-2	124
3.39	solução problema 3.28-3	124
3.40	solução problema 3.29	125
3.41	solução problema 3.30	126
4.1	problema 4.8	128

Sumário

INTRODUÇÃO	10
1 HISTÓRICO DAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA	12
1.1 Competições Internacionais	13
1.1.1 Olimpíada Internacional de Matemática - IMO	13
1.1.2 Olimpíada Iberoamericana de Matemática - OIM	13
1.1.3 Olimpíada de Maio	14
1.2 Competições Nacionais	14
1.2.1 Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM	14
1.2.2 Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas - OBMEP	16
1.3 Competição Regional	17
1.3.1 Olimpíada Paraense de Matemática - OPM	17
2 RESULTADOS BÁSICOS	19
2.1 Congruência de Triângulos	19
2.1.1 Os casos LAL , ALA , LLL e LAA_o	19
2.2 Semelhança de Triângulos	22
2.2.1 Teorema de Thales	22
2.2.2 Semelhança de Triângulos	24
2.3 Relações Métricas e Área de um Triângulo	29
2.3.1 Relações Métricas em Triângulos Retângulos	29
2.3.2 Relações Métricas em Triângulos Quaisquer	30

2.3.3	Área do Triângulo	34
2.3.4	Razão entre as áreas de triângulos semelhantes	35
2.3.5	A Fórmula de Heron	36
2.4	Quadriláteros	37
2.4.1	Quadrilátero Inscritível (ou cíclico)	37
2.4.2	Quadrilátero Circunscritível (Teorema de Pitot)	39
2.5	Relações Métricas no Círculo	41
2.5.1	Duas retas secantes à circunferência:	41
2.5.2	Teorema Recíproco:	41
2.5.3	Uma reta secante e outra tangente à circunferência:	42
2.5.4	Potência de Ponto:	43
2.5.5	Eixo Radical:	44
2.6	Concorrência e Colinearidade	46
2.6.1	Teorema de Ceva	46
2.6.2	Teorema de Menelaus	50
2.6.3	Teorema Recíproco de Menelaus	51
2.6.4	Teorema de Pappus	54
2.7	Triângulos: Pontos Clássicos	55
2.7.1	Mediana e Baricentro	55
2.7.2	Bissetriz e Incentro	59
2.7.3	Teorema da Bissetriz Externa	62
2.7.4	Mediatriz e Circuncentro	63
2.7.5	Altura e Ortocentro	65
2.8	Outros Teoremas Clássicos	68
2.8.1	Teorema de Ptolomeu	68
2.8.2	Teorema de Hiparco	69
2.8.3	Circunferência de Apolônio	70
2.8.4	Teorema de Carnot	71
2.8.5	Teorema de Euler (Reta de Euler)	72
2.8.6	Teorema de Euler (Círculo dos Nove Pontos)	73

2.9 Teorema de Feurebach	78
3 PROBLEMAS OLÍMPICOS	94
4 PROBLEMAS OLÍMPICOS PROPOSTOS	127
CONCLUSÃO	129
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	130

INTRODUÇÃO

As Olimpíadas de Matemática, nos moldes atuais, são disputadas desde 1894, quando foram organizadas competições na Hungria. Com o passar dos anos, competições similares foram se espalhando pelo Leste Europeu, culminando, em 1959, com a 1ª Olimpíada Internacional de Matemática, na Romênia.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organiza desde 1979 a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e mais recentemente, em 2005, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), programa que em sua última edição (2016) teve uma participação de quase 18 milhões de alunos inscritos nos quatro cantos do país e neste ano (2017) esse número chegou a marca de exatamente 18.240.497 alunos inscritos, com a participação de 99,57% dos municípios brasileiros, esse aumento se deu pelo fato de que tivemos a participação de alunos das escolas particulares. Nesse contexto é natural que surja a necessidade de elaboração de materiais escritos em português que sirvam de apoio para a preparação dos alunos para estas competições.

VIANA, Marcelo (2017), diretor geral do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), relata a história do professor Cícero Rufino de Goes, da rede municipal de Brankinha - AL, fã da OBMEP, onde este afirma que “as olimpíadas de matemática vêm, ao longo dos anos, transformando a maneira de ensinar e aprender os conteúdos da referida área nas escolas públicas e particulares”. Entre os benefícios da Obmep, destaca “melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem de matemática, resgatar o interesse pelos estudos e a autoestima dos alunos e professores”.

Dentro deste panorama, resolvemos elaborar este trabalho apresentando algumas técnicas

de resoluções de problemas olímpicos de geometria plana para o meio acadêmico, de forma que almeje a melhoria na qualidade de Ensino da Matemática e sirva como instrumento de estímulo à busca de novos conhecimentos.

Para isso dividimos o trabalho em quatro capítulos distribuídos como segue:

No capítulo 1 apresentaremos um breve histórico das olimpíadas de Matemática no Brasil e no mundo citando olimpíadas internacionais das quais o Brasil participa e destacando, no Brasil, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), não deixando de falar da Olimpíada Paraense de Matemática (OPM).

Em seguida, no segundo capítulo abordaremos os conceitos básicos necessários para a resolução dos problemas olímpicos de geometria plana propostos no trabalho. No capítulo 3 serão expostos alguns problemas de competições olímpicas realizadas ao redor do mundo, com suas respectivas resoluções. No quarto capítulo deixaremos alguns outros problemas olímpicos propostos, para motivar o aprofundamento do leitor quanto a preparação olímpica.

HISTÓRICO DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos um histórico das Olimpíadas de Matemática no Brasil e no Mundo citando Olimpíadas Internacionais das quais o Brasil participa e destacando, no Brasil, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (OBMEP), passando também pela olimpíada regional, a Olimpíada Paraense de Matemática (OPM). Neste momento destacamos a respeito dessas competições, os objetivos e suas contribuições para cenário do ensino e aprendizagem de Matemática. Algumas das informações destacadas sobre as diversas olimpíadas citadas foram retiradas de suas respectivas páginas da internet, onde seus endereços estão disponibilizadas ao final de cada relato.

Na Hungria, desde 1894, são organizadas competições nos moldes que até hoje são disputadas as Olimpíadas de Matemática. Com o passar dos anos, competições similares foram se espalhando pelo Leste Europeu, culminando, em 1959, com a 1ª Olimpíada Internacional de Matemática, na Romênia.



1.1 Competições Internacionais

1.1.1 Olimpíada Internacional de Matemática - IMO

A IMO surge em 1959 na Romênia, com a participação de países daquela região. Essa competição cresceu gradualmente até ultrapassar a participação de 100 países de cinco continentes. Esses países integrantes começam então a promover suas próprias olimpíadas nacionais. Composta por seis problemas selecionados entre os propostos pelos países participantes, a competição é realizada em dois dias e como premiação os alunos que se destacam recebem medalhas de ouro, prata e bronze e menções honrosas. Em 2012, a IMO foi realizada na Argentina e em 2017 essa Olimpíada teve como seu país sede o Brasil, que participa dela desde 1979, já tendo conquistado cinco medalhas de ouro e nos últimos anos tem ficado entre os 20 países de melhor rendimento, à frente da Alemanha, Canadá, França, Inglaterra entre outros. Nesta última edição, o Brasil conquistou 02 medalhas de prata, 01 de bronze e 03 menções honrosas, ocupando a 37º posição, nosso melhor resultado foi alcançado no ano de 2016, ficamos em 15º lugar.

Site: <http://www.imo-official.org/>

1.1.2 Olimpíada Iberoamericana de Matemática - OIM

É uma competição da qual participam os países da América Latina, Espanha e Portugal, representados por equipes de até 4 estudantes que não tenham feito 18 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada e que não tenham participado anteriormente em duas OIM.

O Brasil tem participado dessa competição desde sua primeira edição em 1985 e obtido os melhores resultados entre os países participantes tendo conquistado 50 medalhas de ouro, 36 de prata e 11 de bronze. O país foi sede da OIM, pela primeira vez, em 1994 e, na 27ª

edição, realizada na Bolívia no mês de outubro de 2012, teve um resultado importante, obtendo o primeiro lugar geral. Em 2016 na 31ª edição realizada em Antofagasta no Chile, o Brasil conquistou 01 medalha de prata e 03 medalhas de ouro.

Site: <http://www.oei.es/oim/index.html>

1.1.3 Olimpíada de Maio

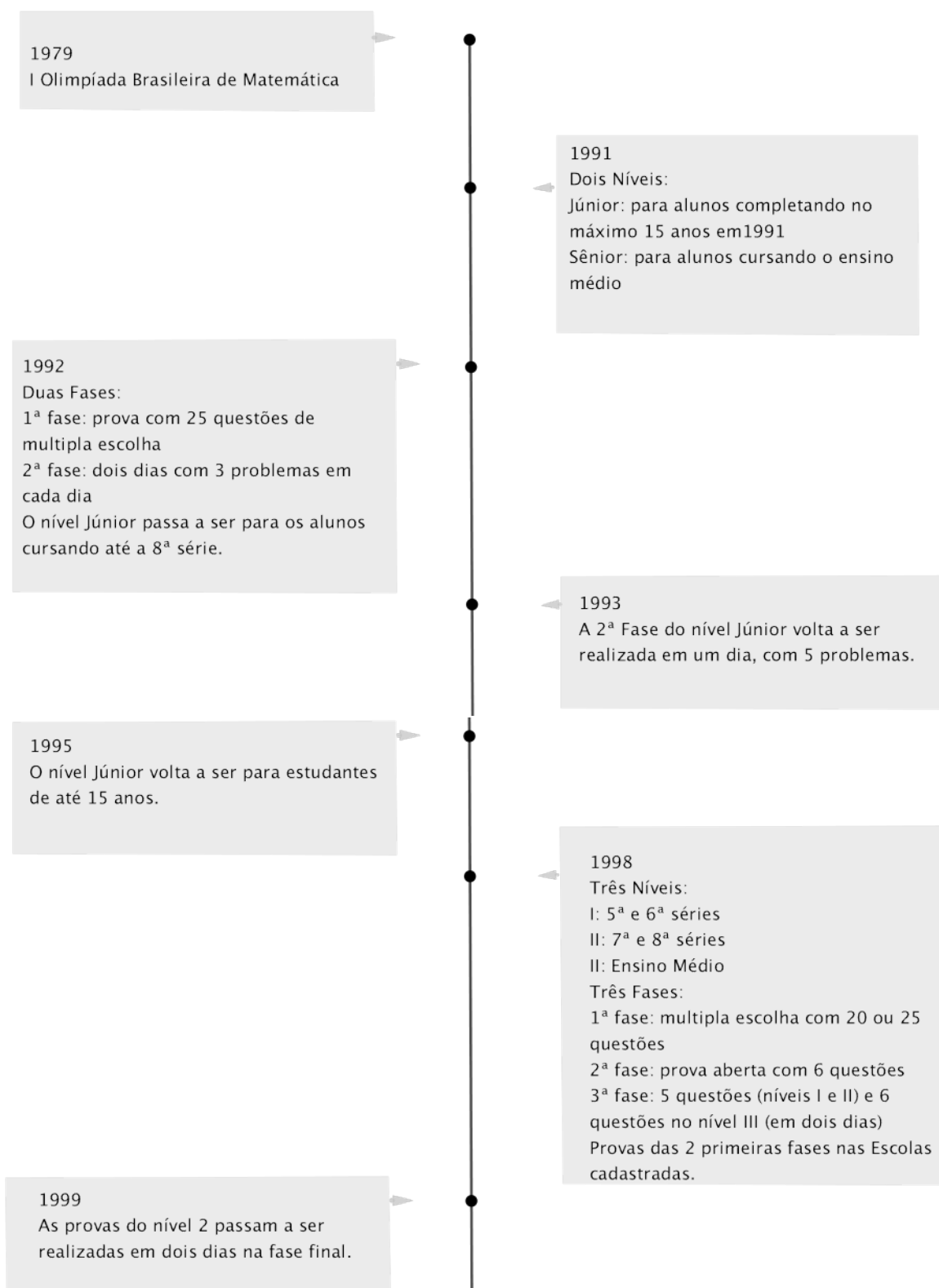
É uma competição realizada para jovens alunos, disputada em dois níveis (Nível 1: para alunos até 13 anos e Nível 2: para alunos de até 15 anos), por países da América Latina, Espanha e Portugal.

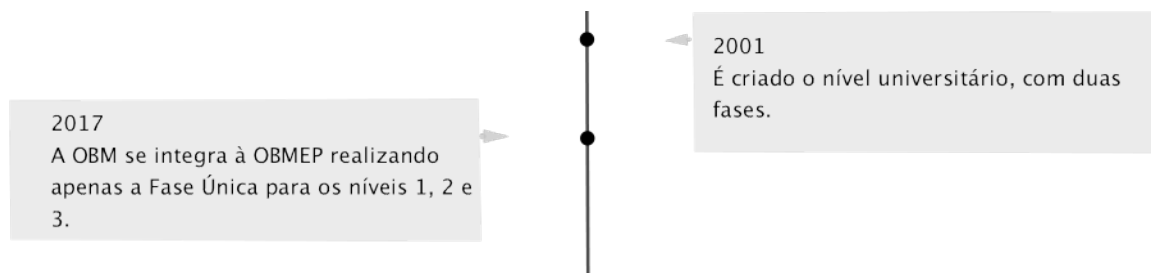
No Brasil a olimpíada de maio é aplicada apenas àqueles alunos que tenham sido premiados na OBM com medalha de ouro, prata, bronze ou menção honrosa ou tenham sido selecionados pelo coordenador regional.

1.2 Competições Nacionais

1.2.1 Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou em 1979 a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Ao longo desses anos, a OBM passou por diversas mudanças em seu formato (veja abaixo o quadro ilustrativo), mas manteve a ideia central que é a de estimular o estudo da Matemática nos alunos, desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, influenciar na melhoria do ensino, além de descobrir novos talentos.





1.2.2 Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas - OBMEP

Com objetivos de estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil entre estudantes das escolas públicas municipais, estaduais e federais, contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, possibilitando que o maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade, identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas, incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional, contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e as sociedades científicas e promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. A OBMEP é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e promoção do Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT) e do Ministério da Educação (MEC).

Lançada oficialmente no dia 19 de maio de 2005 em Brasília, pelo então presidente da República, Luiz Inácio Lula da Silva e os ministros da Ciência e Tecnologia, Eduardo Campo e da Educação, Tarso Genro, a OBMEP é dirigida aos estudantes do ensino fundamental (6º ano ao 9º ano) e alunos do Ensino Médio das escolas públicas municipais, estaduais e federais. A OBMEP está estruturada de maneira que estudantes de todas as escolas públicas do país possam participar da competição. Para isso conta com coordenadores locais em diversas localidades distribuídas em todo o território nacional.

As inscrições dos estudantes participantes da OBMEP é feita pela escola mediante o preenchimento de uma Ficha de Inscrição, disponibilizada exclusivamente na página www.obmep.org.br.

1.3 Competição Regional

1.3.1 Olimpíada Paraense de Matemática - OPM

Algumas Olimpíadas de Matemática já foram realizadas no estado do Pará na década de 80, porém com um número de participantes muito pequeno. Em geral, as olimpíadas desta época eram utilizadas para classificar os alunos paraenses que participariam da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). No início da década de 90 a realização destas olimpíadas foi interrompida, e por muitos anos o estado do Pará ficou sem uma olimpíada estadual e sem participar da OBM, somente com alguns colégios mais tradicionais (por exemplo o Colégio Nazaré) realizavam olimpíadas internas.

Em 1997, por iniciativa do prof. Leonardo Matteo D'ório (coordenador regional) a OBM voltou a ser aplicada no estado do Pará. Foram cadastrados por volta de 10 colégios, sendo que nesta época tivemos mais ou menos uns 500 alunos participando da OBM. Em 1999 o Pará ganhou mais um coordenador regional, prof. João Libonati, aumentando a capacidade de trabalho na divulgação da OBM. Por motivos particulares, no início de 2000 o prof. Leonardo Matteo D'ório transferiu seu cargo de coordenador regional para o prof. Marcelo Rufino de Oliveira, que desde então vem aplicando as provas da OBM no Pará.

Em 2000, por iniciativa da professora Ana Lúcia Carlos da Silva, a Universidade Federal do Pará (UFPA) organizou a I Olimpíada Paraense de Matemática (OPM), envolvendo aproximadamente 700 alunos, revitalizando a competição regional de matemática. Foram premiados 20 alunos, 14 do ensino médio e 6 do ensino fundamental. É impossível negar que a idéia da realização da OPM veio no rastro dos excelentes resultados alcançados pelos alunos paraenses na Olimpíada Brasileira de Matemática em 1998, 1999 e 2000, onde foram conquistadas duas medalhas de bronze e duas menções honrosas, todas no Nível 3. Em 2001 o aluno Paulo Ribeiro de Almeida Neto (medalha de bronze na OBM 2000) tornou-se o primeiro aluno paraense a participar da seletiva brasileira para a Olimpíada Internacional de Matemática. Para o ano de 2001 sentiu-se a necessidade da criação de uma Comissão Organizadora da Olimpíada Paraense de Matemática, composta de professores da UFPA e de colégios federais, particulares e estaduais de Belém. Esta Comissão é responsável pela divulgação da Olimpíada, elaboração e correção das provas.

Desde então a OPM vem crescendo de forma vertiginosa. Em 2001 (possuindo o apoio da Seduc) por volta de 3000 alunos participaram da II OPM e em 2002 aproximadamente 2500 alunos participaram da III OPM. Em nível nacional, o aluno Paulo Ribeiro de Almeida Neto ganhou mais duas medalhas de bronze na OBM, em 2001 e 2002, participando mais duas vezes também da seletiva brasileira para a Olimpíada Internacional de Matemática e Iberoamericana. Em 2002 o Pará alcança suas primeiras premiações de Nível Fundamental. O aluno Matheus de Mello Assunção foi premiado com Menção Honrosa no Nível 1 e os alunos Rodrigo Santana e Flaviano Ramos foram premiados respectivamente com Medalha de Bronze e Menção Honrosa, ambos no Nível 2. Rodrigo e Flaviano também participaram da Seletiva Brasileira para a Olimpíada de Matemática do Cone Sul de 2003, realizada no Peru. A grande novidade de 2003 foi a inédita premiação de uma aluna paraense do interior do estado. Plícia Maciel Carvalho, da cidade de Redenção, sul do estado do Pará, ganhou menção honrosa no Nível 2. Em 2003 também tivemos a premiação pela primeira vez que alunos paraenses no Nível Universitário. Estillac Borges Filho (que cursava o segundo ano do ITA) e Márcio Rodrigo Pinheiro (que cursava o quarto ano de Licenciatura em Matemática na UFPa) foram premiados com menção honrosa e medalha de bronze, respectivamente.

Site: <http://olimpiadaparaense.blogspot.com.br/p/historico.html>

RESULTADOS BÁSICOS

A partir de agora faremos uso das seguintes notações:

- Dados pontos distintos A e B sobre uma reta r , o **segmento** AB é a conjunto de pontos da reta r que estão situados de A a B . A e B são chamados de extremos. Escrevemos \overline{AB} para denotar o comprimento do segmento AB
- Sejam \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} semirretas de origem O com $A \neq 0$ e $B \neq 0$, denotamos um ângulo a reunião de \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . As semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do ângulo e escrevemos $\angle AOB$ e dizemos que a medida do ângulo $\angle AOB$ é denotada por $A\hat{O}B$

OBSERVAÇÕES:

1. Muitas vezes usaremos, por economia de notação, letras gregas minúsculas para denotar medidas de ângulos, por exemplo, escrevemos $m(A\hat{O}B) = \theta$ para significar que a medida do ângulo $\angle AOB$ é θ graus.
2. Em alguns momentos, também, escreveremos \hat{A} para denotar a medida do ângulo referente ao vértice A de um polígono qualquer.

2.1 Congruência de Triângulos

2.1.1 Os casos LAL , ALA , LLL e LAA_0

Axioma 2.1.1. (LAL)

Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

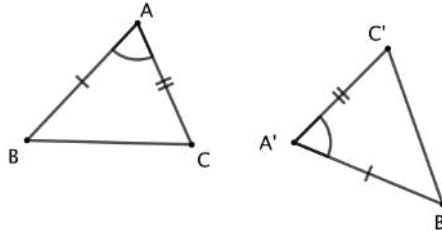


Figura 2.1: o caso de congruência *LAL*.

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, segue, daí, que

$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

Proposição 2.1.1. (*ALA*)

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos. Se,

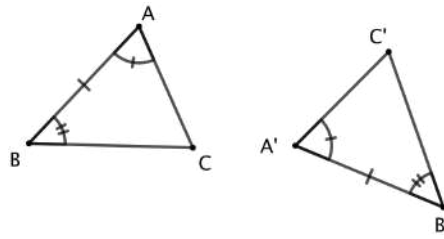
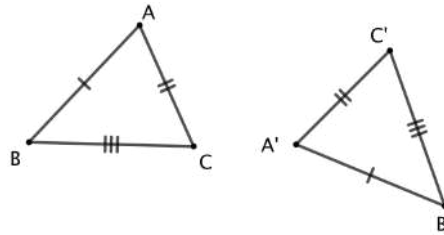
$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \overline{AB} &= \overline{A'B'} \end{aligned}$$

Então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também devemos ter

$$\hat{C} = \hat{C}', \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Proposição 2.1.2. (*LLL*)

Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 2.2: o caso de congruência ALA .Figura 2.3: o caso de congruência LLL .

Em símbolos, dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}$$

$$\overline{CA} = \overline{C'A'}$$

Então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

Em particular, também temos

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C'}$$

Corolário 2.1.1. (LAA_o)

Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Em símbolos, dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{A} = \hat{A'} \\ \hat{B} = \hat{B'} \end{array} \right\} \xrightarrow{LAA_o} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também temos

$$\hat{C} = \hat{C}', \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

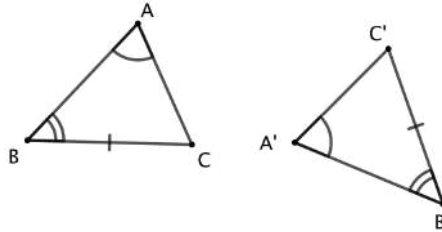


Figura 2.4: o caso de congruência LAA_o .

2.2 Semelhança de Triângulos

2.2.1 Teorema de Thales

Definições:

- Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.
- Transversal do feixe de retas paralelas é toda reta no mesmo plano do feixe que intersecta todas as retas do feixe.
- Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.
- Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes

Na figura 2.5: A e A' , B e B' , C e C' , D e D' são pares de pontos correspondentes.

\overline{AB} e $\overline{A'B'}$, \overline{CD} e $\overline{C'D'}$, \overline{BD} e $\overline{B'D'}$ são pares de segmentos correspondentes.

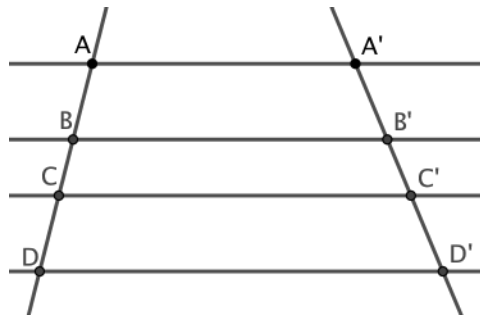


Figura 2.5: paralelas cortadas por transversais.

Teorema de Thales:

Sejam a, b, c três retas paralelas, num mesmo plano, e sejam r, s duas transversais, tais que r intersecta respectivamente a, b, c em A, B, C , e s intersecta respectivamente a, b, c em D, E e F , então $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$.

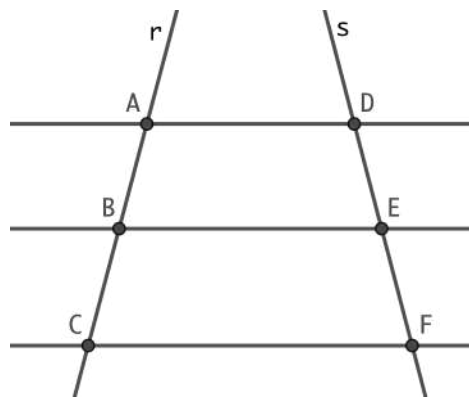


Figura 2.6: teorema de Thales

Demonstração:

Inicialmente tracemos, passando por D , uma reta r' paralela à reta r , como indicado na figura 2.7.

Sejam B' e C' as interseções de r' com BE e CF , respectivamente, H o pé da altura baixada do vértice E e G o pé da altura baixada do vértice B' .

A área do $\triangle DB'E$ pode ser calculada de duas maneiras $\frac{\overline{DB'} \cdot \overline{EH}}{2}$ ou $\frac{\overline{DE} \cdot \overline{B'G}}{2}$

Da igualdade conclui-se que $\overline{DB'} \cdot \overline{EH} = \overline{DE} \cdot \overline{B'G}$

Como $\overline{DB'} = \overline{AB}$, pois são correspondentes entre paralelas, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{B'G}}{\overline{EH}} \quad (1)$$

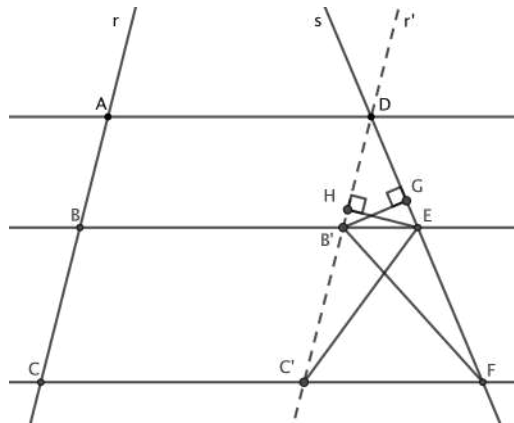


Figura 2.7: demonstração teorema de Thales

O $\triangle C'B'E$ e o $\triangle FEB'$ tem áreas iguais (mesma base $B'E$ e mesma altura).

Logo $\frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{EH}}{2} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{B'G}}{2}$. Como $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ temos

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{B'G}}{\overline{EH}} \quad (2)$$

De (1) e (2) vem

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

■

2.2.2 Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

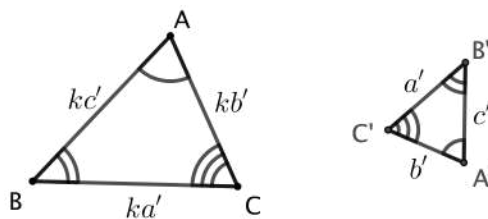


Figura 2.8: dois triângulos semelhantes.

Na figura acima, o $\triangle ABC$ e o $\triangle A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Assim, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e existe $k > 0$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

Tal real positivo k é denominado razão de semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, nessa ordem (observe que a razão de semelhança entre $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$, nessa ordem, é $\frac{1}{k}$).

Escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ para denotar que os $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

Se $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ na razão (de semelhança) k , é possível provar que k é também a razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes quaisquer dos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ (nessa ordem); por exemplo, nas notações da figura 2.8, sendo M o ponto médio de BC e M' o ponto médio de $B'C'$, temos

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{M'A'}} = \frac{a/2}{a'/2} = \frac{a}{a'} = k$$

Proposição 2.2.1. (Caso LLL de semelhança de triângulos)

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$.

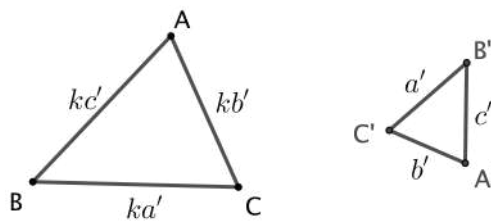
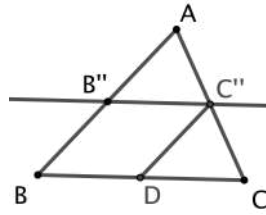


Figura 2.9: o caso de semelhança LLL.

Demonstração:

Sendo k o valor comum das razões do enunciado, temos $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}$. Suponha, sem perda de generalidade, $k > 1$ e marque o ponto $B'' \in AB$ tal que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$.

Figura 2.10: prova do caso de semelhança LLL.



Sendo C'' a interseção, com o lado AC , da reta que passa por B'' e é paralela ao lado BC , segue do teorema de Thales que

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k},$$

de maneira que $\overline{AC''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AC} = \overline{A'C'}$.

Trace, agora, a paralela ao lado AB passando por C'' , a qual intersecta o lado BC no ponto D . Então, o quadrilátero $B''C''DB$ é um paralelogramo, de sorte que, novamente pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k}.$$

Logo, $\overline{B''C''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} = \overline{B'C'}$.

A discursão acima mostrou que

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC''} = \overline{A'C'} \quad \text{e} \quad \overline{B''C''} = \overline{B'C'},$$

isto é, que os $\triangle AB''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, pelo caso *LLL* de congruência. Portanto, temos

$$\hat{B} = \hat{A}BC = \hat{A}B''C'' = \hat{A}'\hat{B}'C' = \hat{B}',$$

e, analogamente, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. ■

Proposição 2.2.2. (Caso *LAL* de semelhança de triângulos)

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{B}'.$$

Então, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

Em particular, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$.

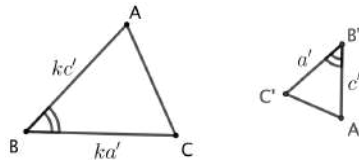


Figura 2.11: o caso de semelhança LAL.

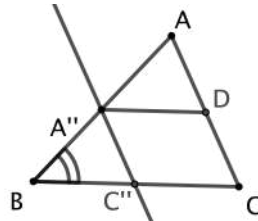


Figura 2.12: prova do caso de semelhança LAL.

Demonstração:

Suponha, sem perda de generalidade, $k > 1$ e marque o ponto $A'' \in AB$ tal que $\overline{A''B} = \overline{A'B'}$

Sendo C'' a interseção, com o lado BC , da reta que passa por A'' e é paralela ao lado AC , segue do teorema de Thales

$$\frac{\overline{BC''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA''}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{BA}} = \frac{1}{k} \implies \overline{BC''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

Uma vez que, $\overline{A''B} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC''} = \overline{B'C'}$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então os $\triangle A''BC''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, pelo caso *LAL* de congruência. Portanto, temos

$$\hat{A} = m(\hat{BAC}) = m(\hat{BA''C''}) = m(\hat{B'A'C'}) = \hat{A}'$$

e

$$\hat{C} = m(\hat{BCA}) = m(\hat{BC''A''}) = m(\hat{B'C'A'}) = \hat{C}'$$

Trace, agora, a paralela ao lado BC passando por A'' , a qual intersecta o lado AC no ponto D . Então o quadrilátero $A''C''CD$ é um paralelogramo, de sorte que, novamente pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{\overline{A''C''}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A''B}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k}$$

, Daí,

$$\overline{A''C''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AC} = \overline{A'C'} \implies \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

A discussão acima mostrou que

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

■

Proposição 2.2.3. (Caso AA de semelhança de triângulos)

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{B}'.$$

Então, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

Em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

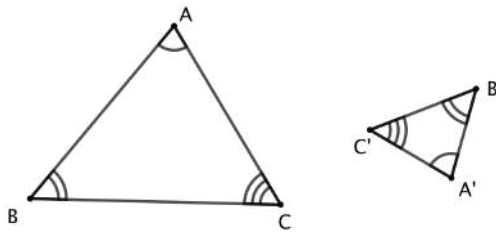


Figura 2.13: o caso de semelhança AA.

Demonstração:

Vamos supor que os triângulos não são congruentes e, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, marque o ponto $B'' \in AB$ tal que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ e o $\triangle AB''C''$ com $\hat{B}'' = \hat{B}'$ e $C'' \in AC$.

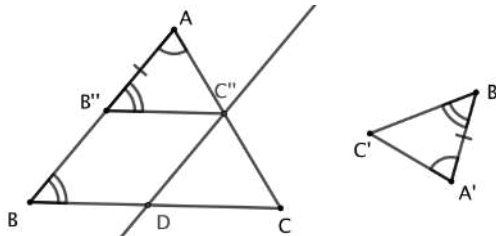


Figura 2.14: prova do caso de semelhança AA.

Uma vez que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ e $\hat{B}'' = \hat{B}'$, então o $\triangle AB''C''$ e o $\triangle A'B'C'$ são congruentes, pelo caso *ALA* de congruência (1)

Sendo $\hat{B}'' = \hat{B}' = \hat{B}$, então a reta que passa por B'' e C'' é paralela ao lado BC , segue do teorema de Tales

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$$

Trace, agora, a paralela ao lado AB passando por C'' , a qual intersecta o lado BC no ponto D . Então o quadrilátero $BB''C''D$ é um paralelogramo, de sorte que, novamente pelo teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}} \implies \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}$$

Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}$$

isto é, o $\triangle ABC$ e o $\triangle AB''C''$ são semelhantes.

A discussão acima mostrou que

$$\triangle ABC \sim \triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C' \implies \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

■

2.3 Relações Métricas e Área de um Triângulo

2.3.1 Relações Métricas em Triângulos Retângulos

Nessa seção iremos mostrar como os arcos trigonométricos podem ser relacionados de maneira simples à geometria de triângulos retângulos.

Na figura 2.15 consideremos um $\triangle ABC$, retângulo em A e tal que $\hat{ABC} = \theta$ ($0 < \theta < 90^\circ$). Usando o ponto B como origem, considere o sistema Cartesiano tal que a semirreta \overrightarrow{BA} seja o semieixo positivo das abscissas e o lado AC do triângulo fique situado no primeiro quadrante. Em seguida, trace o círculo de centro B e raio 1 e marque sua interseção P com a hipotenusa BC do $\triangle ABC$. Sendo Q o pé da perpendicular baixada de P ao eixo das abscissas, é claro que $\triangle BPQ \sim \triangle BCA$. Portanto,

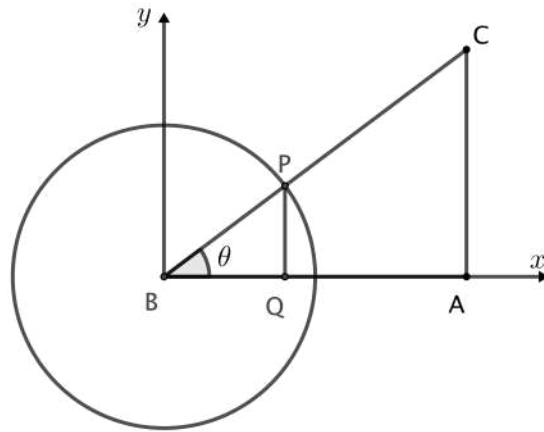


Figura 2.15: seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{BP}}, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{BP}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{QB}}$$

Mas, como

$$\overline{PQ} = \sin \theta, \quad \text{e} \quad \overline{QB} = \cos \theta,$$

as relações acima nos dão

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \sin \theta, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \cos \theta, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \tan \theta.$$

Em resumo, para um $\triangle ABC$, retângulo em A e tal que $\hat{A}BC = \theta$, temos:

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}.$$

2.3.2 Relações Métricas em Triângulos Quaisquer

A proposição a seguir generaliza o teorema de Pitágoras para triângulos quaisquer e é conhecida como **lei dos cossenos**.

Proposição 2.3.1. (*Lei dos Cossenos*):

Se $\triangle ABC$ é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Demonstração:

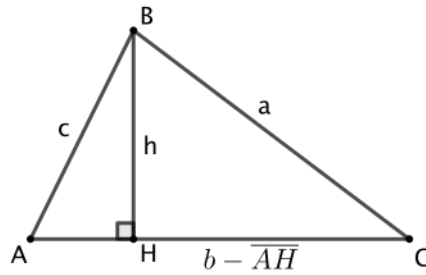


Figura 2.16: a lei dos cossenos.

Seja H o pé da altura relativa ao lado AC e h seu comprimento. Sabemos também que

$$\overline{AH} = c \cdot \cos \hat{A} \text{ e } h = c \cdot \sin \hat{A}.$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras ao $\triangle BCH$, obtemos

$$a^2 = h^2 + (b - \overline{AH})^2$$

$$a^2 = (c \cdot \sin \hat{A})^2 + (b - c \cdot \cos \hat{A})^2$$

$$a^2 = c^2 \sin^2 \hat{A} + b^2 - 2bc \cos \hat{A} + c^2 \cos^2 \hat{A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \underbrace{(\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A})}_1 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Analogamente pode-se demonstrar

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \text{ e } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

■

A proposição a seguir é conhecida como a **a relação de Stewart**.

Proposição 2.3.2. (*Relação de Stewart*):

Se $\triangle ABC$ é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Se P é um ponto sobre o lado \overline{BC} , tal que $\overline{BP} = x$, $\overline{CP} = y$ e $\overline{AP} = z$, então

$$b^2x + c^2y = a(xy + z^2).$$

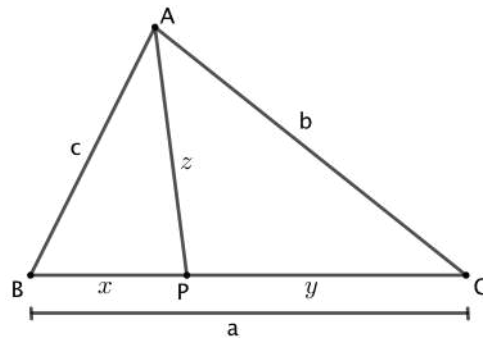


Figura 2.17: a relação de Stewart.

Demonstração:

Se $\widehat{APC} = \theta$, então $\widehat{APB} = 180^\circ - \theta$ (ver figura 2.17). Aplicando a lei dos cossenos ao $\triangle APC$ para calcular $\overline{AC} = b$, obtemos

$$b^2 = z^2 + y^2 - 2yz \cdot \cos \theta. \quad (1)$$

Por outro lado, usando que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ e aplicando novamente, agora ao $\triangle APB$, a lei dos cossenos para calcular $\overline{AB} = c$, obtemos

$$c^2 = z^2 + x^2 - 2xz \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

$$c^2 = z^2 + x^2 + 2xz \cdot \cos \theta. \quad (2)$$

Isolando $\cos \theta$ em (1) e (2) e igualando os resultados, chegamos à relação

$$\frac{z^2 + y^2 - b^2}{2yz} = \frac{c^2 - z^2 - x^2}{2xz}$$

ou, ainda, a

$$x(z^2 + y^2 - b^2) = y(c^2 - z^2 - x^2).$$

Podemos reescrever a relação acima como

$$xz^2 + yz^2 + xy^2 + x^2y = b^2x + c^2y,$$

após o que um fácil agrupamento de termos nos dá

$$(x + y)z^2 + xy(x + y) = b^2x + c^2y,$$

Por fim, substituindo $x + y = a$ chegamos ao resultado desejado

$$b^2x + c^2y = a(xy + z^2).$$

■

A outra relação fundamental que veremos na proposição a seguir é a **lei dos senos**

Proposição 2.3.3. (*Lei dos Senos*): Se R é o raio do círculo circunscrito a um triângulo de lados a , b e c , então

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

Demonstração:

Seja $\triangle ABC$ um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ (veja figura 2.18). Provaremos que $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$ (as igualdades $\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$ e $\frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ também podem ser provadas de modo análogo).

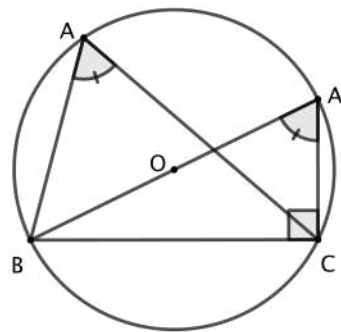


Figura 2.18: a lei dos senos.

Seja O o centro da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, e A' o simétrico de B em relação a O . Então A' pertence a circunferência, de modo que $m(\widehat{B\hat{A}'C}) = m(\widehat{B\hat{A}B}) = \hat{A}$. Por outro lado, como BA' é diâmetro da circunferência, temos $\widehat{A'CB} = 90^\circ$. Então, no triângulo retângulo $\triangle BA'C$, temos

$$\sin \hat{A} = \sin m(\widehat{B\hat{A}'C}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{a}{2R}.$$

Os outros casos são análogos.

■

2.3.3 Área do Triângulo

Observe que sempre podemos decompor um triângulo qualquer em um trapézio, onde a altura é a metade da altura do triângulo, e dois outros triângulos, que podem ser reagrupados de modo a formar um retângulo. Vamos separar em dois casos:

1º caso: Triângulo acutângulo (veja figura 2.19)

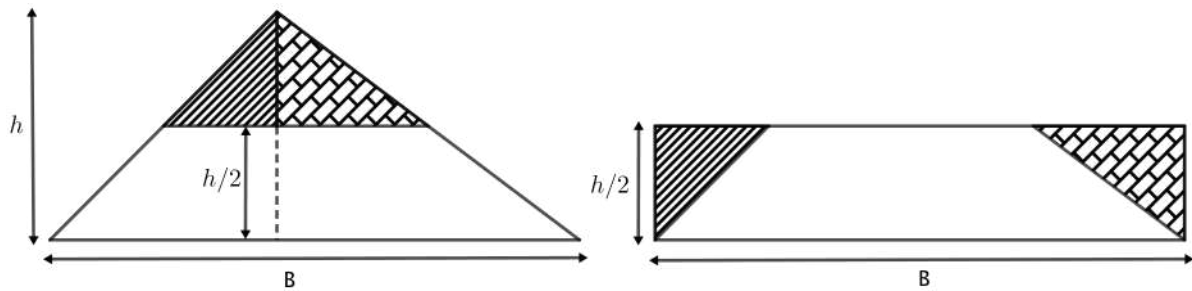


Figura 2.19: 1º caso: Triângulo acutângulo

2º caso: Triângulo obtusângulo (veja figura 2.20)

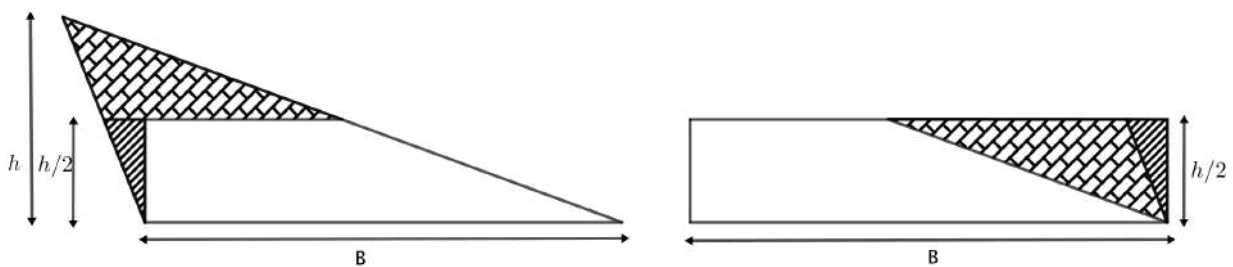


Figura 2.20: 2º caso: Triângulo obtusângulo

Assim, a área de um triângulo é dada por:

$$S = \frac{B \cdot h}{2}$$

Na verdade, como em cada triângulo existem três pares de lados e alturas relativas, podemos escrever três expressões para o cálculo da área de um $\triangle ABC$:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

onde h_a , h_b e h_c são as alturas relativas aos lados $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$, respectivamente.

Por outro lado, como $h_a = b \cdot \sin \hat{C}$, $h_b = c \cdot \sin \hat{A}$ e $h_c = a \cdot \sin \hat{B}$, podemos também escrever que:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{C}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin \hat{B}}{2}$$

As fórmulas dadas pelas igualdades acima são conhecidas como **fórmulas do seno** para a área de um triângulo.

2.3.4 Razão entre as áreas de triângulos semelhantes

Conhecendo-se a razão k entre medidas correspondentes quaisquer de dois triângulos semelhantes, é possível obter a razão k^2 entre a área desses triângulos.

Propriedade: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança k :

$$\frac{\text{Área}(\triangle ABC)}{\text{Área}(\triangle A'B'C')} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{c^2}{c'^2} = k^2$$

Demonstração:

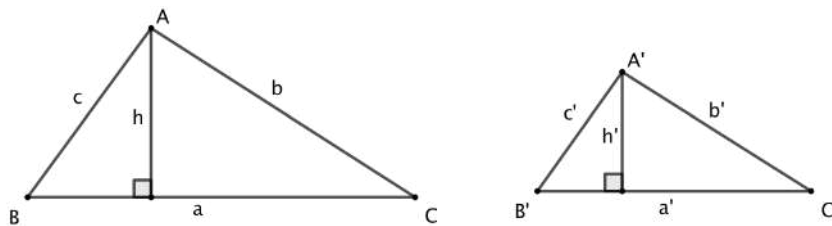


Figura 2.21: Razão entre áreas

Se $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes, então:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'} = k$$

Portanto,

$$\frac{\text{Área}(\triangle ABC)}{\text{Área}(\triangle A'B'C')} = \frac{\frac{b \cdot h}{2}}{\frac{b' \cdot h'}{2}} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{b}{b'} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{c^2}{c'^2} = k^2$$

■

2.3.5 A Fórmula de Heron

Teorema 2.3.1. A área de um $\triangle ABC$, onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e $p = \frac{a+b+c}{2}$, é igual a

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demonstração:

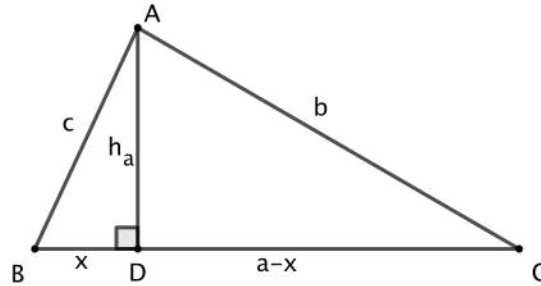


Figura 2.22: prova fórmula de Heron

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABD$, temos:

$$x^2 + (h_a)^2 = c^2 \quad (1)$$

Novamente pelo teorema de Pitágoras, agora no $\triangle ACD$:

$$\begin{aligned} (a-x)^2 + (h_a)^2 = b^2 &\implies a^2 - 2ax + \underbrace{x^2 + (h_a)^2}_{c^2} = b^2 \implies \\ a^2 - 2ax + c^2 = b^2 &\implies x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad (2) \end{aligned}$$

Substituindo (2) em (1)

$$\begin{aligned} (h_a)^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \implies \\ (h_a)^2 &= \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right) \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \implies \\ (h_a)^2 &= \left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right) \left(\frac{-b^2 + (a+c)^2}{2a}\right) \implies \\ h_a &= \frac{\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)(a+b+c)}}{2a} \implies \\ h_a &= \frac{\sqrt{(b+c+a-a-a)(a+b+c-c-c)(a+c+b-b-b)(a+b+c)}}{2a} \implies \end{aligned}$$

$$h_a = \frac{\sqrt{(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)(2p)}}{2a}$$

$$h_a = \frac{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 (p-a)(p-c)(p-b)p}}{2a}$$

$$h_a = \frac{4\sqrt{(p-a)(p-c)(p-b)p}}{2a}$$

$$h_a = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-c)(p-b)p}}{a}$$

Analogamente pode-se demonstrar que:

$$h_b = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-c)(p-b)p}}{b} \quad h_c = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-c)(p-b)p}}{c}$$

Como a área S do $\triangle ABC$ é igual a $\frac{a \cdot h_a}{2}$, então

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

■

2.4 Quadriláteros

2.4.1 Quadrilátero Inscritível (ou cíclico)

Definição 2.4.1. Um quadrilátero é inscritível a um circunferência se, e somente se, seus vértices pertencem à circunferência.

Teorema 2.4.2. O quadrilátero $ABCD$ é inscritível (ou cíclico) se, e somente se, $\alpha + \beta = \theta + \gamma = 180^\circ$, onde $\alpha = m(\widehat{DAB})$, $\beta = m(\widehat{DCB})$, $\theta = m(\widehat{CBA})$ e $\gamma = m(\widehat{ADC})$, ou seja, um quadrilátero é inscritível se, e somente se, os ângulos opostos são suplementares.

Demonstração:

(\implies) Se $ABCD$ é inscritível então $\alpha + \beta = \theta + \gamma = 180^\circ$.

Como α e β correspondem aos arcos BCD e BAD , respectivamente, então:

$$2\alpha = 360^\circ - 2\beta \implies \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Analogamente, pode-se demonstrar que $\theta + \gamma = 180^\circ$.

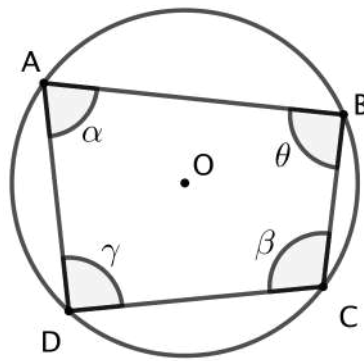


Figura 2.23: quadrilátero inscrito

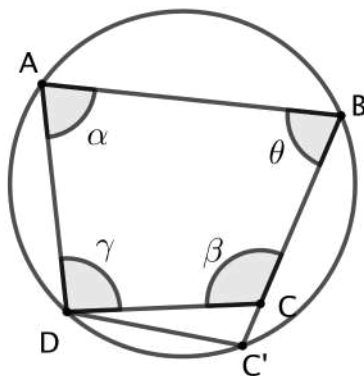


Figura 2.24: prova $ABCD$ é inscrito.

(\Leftarrow) Se $\alpha + \beta = \theta + \gamma = 180^\circ$ então $ABCD$ é inscrito.

Tracemos a circunferência λ que passa pelos pontos A , B e D . Seja C' a interseção da reta BC com λ (ver figura 2.24).

Como $ABC'D$ é inscrito então $m(\widehat{ADC'}) + m(\widehat{ABC'}) = 180^\circ$. Como C' pertence a reta BC temos que $m(\widehat{ABC'}) = \theta$. Entretanto sabemos que

$$\gamma + \theta = 180^\circ \implies m(\widehat{ADC'}) = \gamma \implies C = C' \implies ABCD \text{ é inscrito.}$$

Observe que na figura o ponto C é interior à λ , entretanto, no caso em que C fique exterior à circunferência, a demonstração é análoga. ■

Observação: Podemos identificar um quadrilátero cíclico de outras duas maneiras:

- a) Se um ângulo interno é congruente ao ângulo externo do vértice oposto, como ilustra a Figura 2.25.

- b) Se existe um lado do quadrilátero que "olha" para dois ângulos retos conforme a figura 2.26

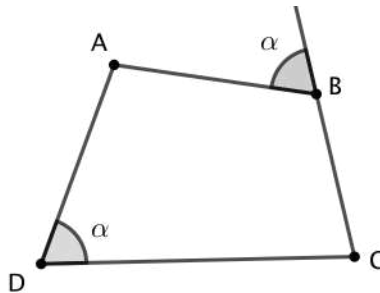


Figura 2.25: quadrilátero inscritível II

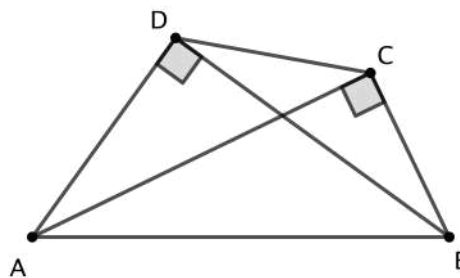


Figura 2.26: quadrilátero inscritível III

2.4.2 Quadrilátero Circunscritível (Teorema de Pitot)

Definição 2.4.3. Um quadrilátero é circunscritível a um circunferência se, e somente se, seus lados são tangentes à circunferência.

Teorema 2.4.4. O quadrilátero convexo $ABCD$ é circunscritível se, e somente se, $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$, ou seja, um quadrilátero é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos são iguais.

Demonstração:

(\implies) Suponhamos que o quadrilátero convexo $ABCD$ possui uma circunferência inscrita.

Como K, L, M e N são pontos de tangência, então:

$$\overline{AK} = \overline{AN}, \overline{BK} = \overline{BL}, \overline{CL} = \overline{CM} \text{ e } \overline{DM} = \overline{DN}.$$

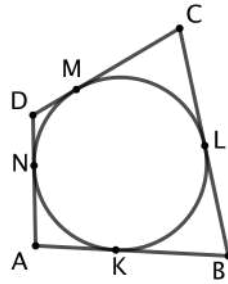


Figura 2.27: Prova Quadrilátero Circunscritível (\implies).

Assim,

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AK} + \overline{BK} + \overline{CM} + \overline{DM} = \overline{AN} + \overline{BL} + \overline{CL} + \overline{DN} = (\overline{BL} + \overline{CL}) + (\overline{AN} + \overline{DN}) = \overline{BC} + \overline{DA}$$

(\Leftarrow) Suponhamos, agora que em um quadrilátero convexo temos a relação

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$$

Tracemos a circunferência inscrita ao triângulo cujos lados estão sobre as retas que passam por A e B , B e C , C e D .

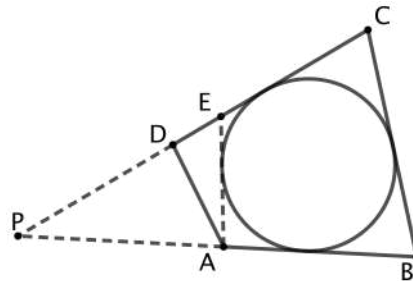


Figura 2.28: Prova Quadrilátero Circunscritível (\Leftarrow).

A partir de A trace uma tangente a esta circunferência, que encontra CD em E . Como $ABCE$ é circunscritível, temos que

$$\overline{AB} + \overline{CE} = \overline{BC} + \overline{EA} \implies \overline{AB} - \overline{BC} = \overline{EA} - \overline{CE} \implies$$

$$\overline{DA} - \overline{CD} = \overline{EA} - \overline{CE} \implies \overline{DA} = \overline{EA} + (\overline{CD} - \overline{CE}) \implies$$

$$\overline{DA} = \overline{EA} + \overline{DE} \implies \text{os pontos } D \text{ e } E \text{ coincidem} \implies ABCD \text{ é circunscritível.}$$



2.5 Relações Métricas no Círculo

2.5.1 Duas retas secantes à circunferência:

Teorema 2.5.1. *Se de um ponto P traçamos duas retas secantes a uma circunferência, intersectando esta nos pontos A, B, A' e B' , de acordo com a figura 2.29, então temos que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$.*

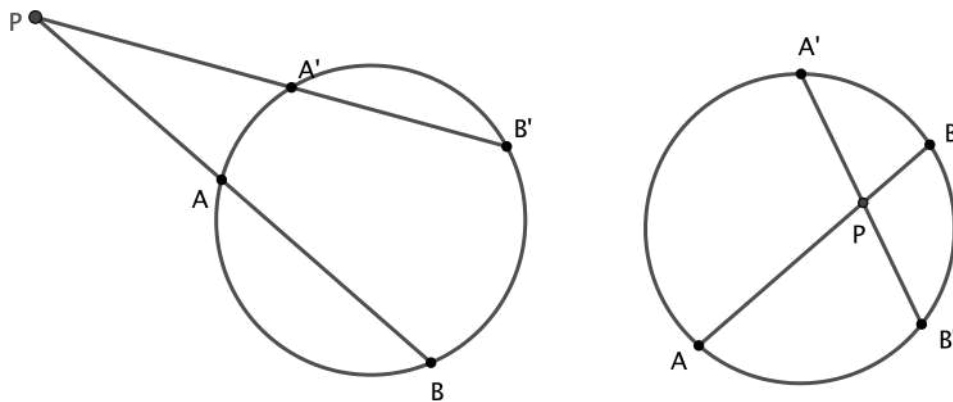


Figura 2.29: duas retas secantes

Demonstração:

Inicialmente trace $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$. Como $\widehat{PAB'} = \widehat{PA'B}$ e $\widehat{PA'A} = \widehat{PB'B}$ então

$$\triangle PAB' \sim \triangle PA'B \implies \frac{\overline{PA}}{\overline{PB'}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}} \implies \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

■

2.5.2 Teorema Recíproco:

Teorema 2.5.2. *Considere quatro pontos quaisquer A, B, A', B' em um plano, três a três não alinhados. Seja P a interseção de AB e $A'B'$. Se $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$, então A, B, A' e B' estão sobre uma mesma circunferência.*

Demonstração:

Caso 1: Como $\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}$ e $\angle APA' = \angle B'PB$ então $\triangle APA' \sim \triangle B'PB \implies m(\widehat{PA'A}) = m(\widehat{PB'B'}) \implies 180^\circ - m(\widehat{AA'B'}) = m(\widehat{A'B'B}) \implies$ o quadrilátero $AA'B'B$ é inscritível.

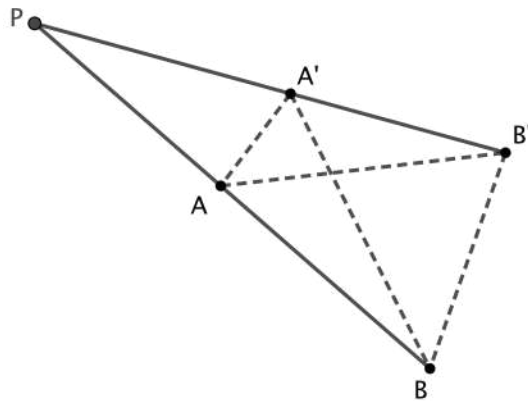


Figura 2.30: caso 1

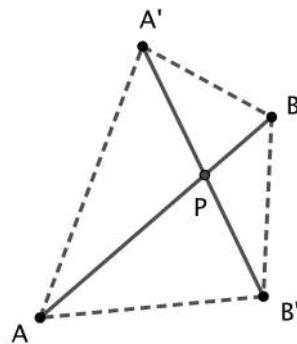


Figura 2.31: caso 2

Caso 2: Como $\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}$ e $m(\widehat{APA'}) = m(\widehat{B'PB})$ então $\triangle APA' \sim \triangle B'PB \implies m(\widehat{AA'B'}) = m(\widehat{ABB'})$ e $m(\widehat{BAA'}) = m(\widehat{BB'A})$
 $m(\widehat{AB'B}) = m(\widehat{AB'A}) + m(\widehat{BB'A}) = m(\widehat{BAA'}) + m(\widehat{BAA'}) = 180^\circ - m(\widehat{AA'B}) \implies AA'B'B$
 é inscritível. ■

2.5.3 Uma reta secante e outra tangente à circunferência:

Teorema 2.5.3. *Se de um ponto P traçamos uma reta tangente e uma reta secante a uma circunferência, de acordo com a figura 2.32, então $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.* ■

Demonstração:

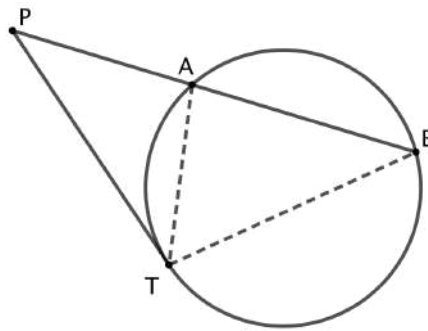


Figura 2.32: uma reta secante e outra tangente

Trace \overline{AT} e \overline{BT} . Como $m(\widehat{PTA}) = m(\widehat{PBT})$ e $m(\widehat{TPA}) = m(\widehat{BPT}) \implies \triangle PTA \sim \triangle PBT \implies \frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \implies \overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

■

2.5.4 Potência de Ponto:

Dado um ponto P e uma circunferência λ , de centro O e raio R , dá-se o nome de potência de P em relação a λ ao valor de $Pot_\lambda(P) = \overline{PO}^2 - R^2$.

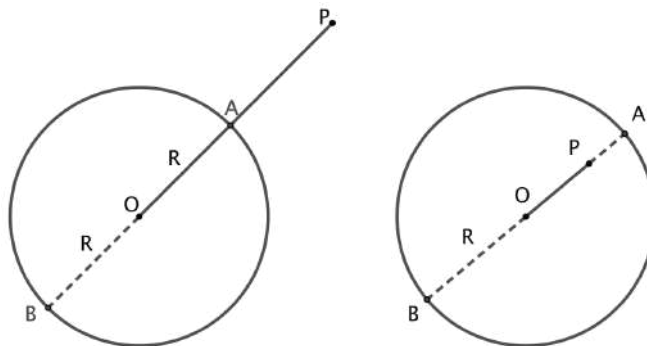


Figura 2.33: potência de ponto

Existem 3 posições possíveis do ponto P com relação à circunferência λ .

- (1) Se $P \in \lambda$ então $\overline{PO} = R$ e assim $Pot_\lambda(P) = 0$
- (2) Se P está no exterior de λ então $\overline{PO} > R$ e assim $Pot_\lambda(P) = \overline{PO}^2 - R^2 > 0$. Além disso, se A e B são as interseções da reta PO com λ , então:

$$Pot_\lambda(P) = \overline{PO}^2 - R^2 = (\overline{PO} - R)(\overline{PO} + R) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

- (3) Se P está no interior de λ então $\overline{PO} < R$ e assim $Pot_\lambda(P) = \overline{PO}^2 - R^2 < 0$. Além disso, se A e B são as interseções da reta \overline{PO} com λ , então:

$$Pot_\lambda(P) = \overline{PO}^2 - R^2 = (\overline{PO} - R)(\overline{PO} + R) = -\overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

2.5.5 Eixo Radical:

Dadas duas circunferências, λ_1 e λ_2 , definimos Eixo Radical como o lugar geométrico dos pontos do plano que possuem iguais potência de ponto em relação a λ_1 e λ_2 .

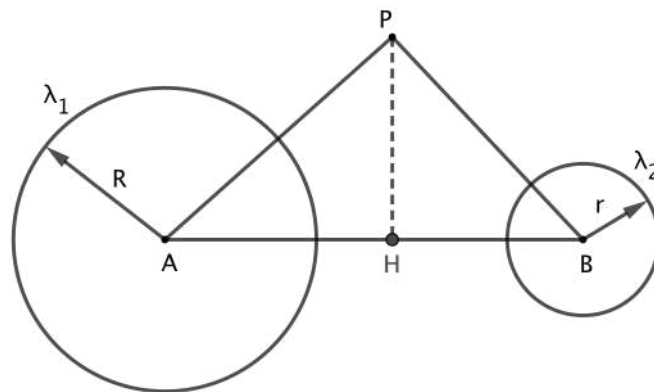


Figura 2.34: eixo radical

Considere duas circunferências distintas, uma de centro A e raio R e outra de centro B e raio r . Sejam P um ponto tal que $Pot_A P = Pot_B P$ e H a sua projeção ortogonal sobre AB . Assim

$$\overline{PA}^2 - R^2 = \overline{PB}^2 - r^2 \Rightarrow \overline{AH}^2 + \overline{PH}^2 - R^2 = \overline{BH}^2 + \overline{PH}^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$R^2 - r^2 = \overline{AH}^2 - \overline{BH}^2 = (\overline{AH} - \overline{BH})(\overline{AH} + \overline{BH}) \Rightarrow (\overline{AH} - \overline{BH}) \cdot \overline{AB} = R^2 - r^2$$

Como \overline{AB} , R e r são valores constantes, então $\overline{AH} - \overline{BH}$ também será constante, implicando que, para todo ponto P que possui igual potência de ponto em relação às circunferências, a projeção ortogonal de P sobre AB é constante. Desta forma, o lugar geométrico procurado é uma reta perpendicular à reta que une os centros das circunferências.

Propriedade:

O eixo radical de duas circunferências que se intersectam em no máximo um ponto é o lugar geométrico dos pontos P do plano, tais que os segmentos de tangentes traçadas desde

P às circunferências possuem o mesmo comprimento.

Demonstração:

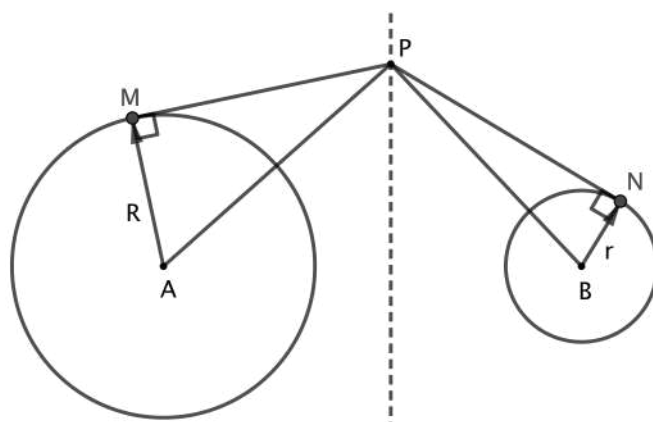


Figura 2.35: propriedade do eixo radical.

Como $Pot_{(A)}P = Pot_{(B)}P$ então:

$$\overline{PA}^2 - R^2 = \overline{PB}^2 - r^2 \Rightarrow \overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 \Rightarrow \overline{PM} = \overline{PN}$$

■

Posições Relativas:

1^a) **Duas circunferências interiores ou exteriores:** o eixo radical não intersecta nenhuma das circunferências (veja figura 2.36).

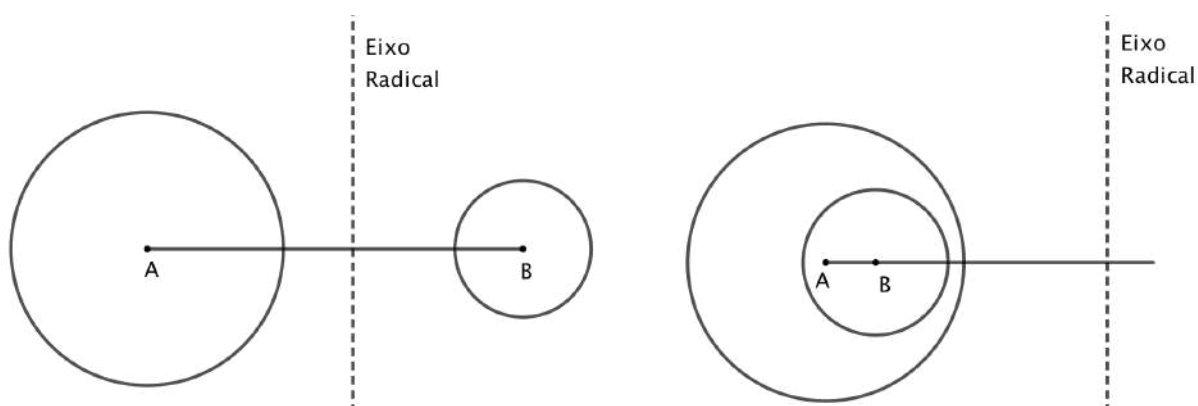


Figura 2.36: duas circunferências interiores ou exteriores.

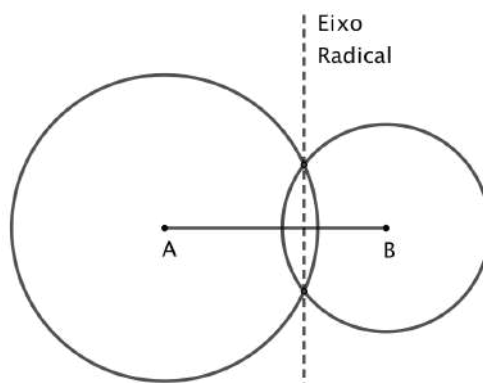


Figura 2.37: duas circunferências secantes.

2ª) **Duas circunferências secantes:** o eixo radical é a reta que passa pelos pontos de interseção das duas circunferências (ver figura 2.37).

3ª) **Duas circunferências tangentes:** o eixo radical é a tangente comum.

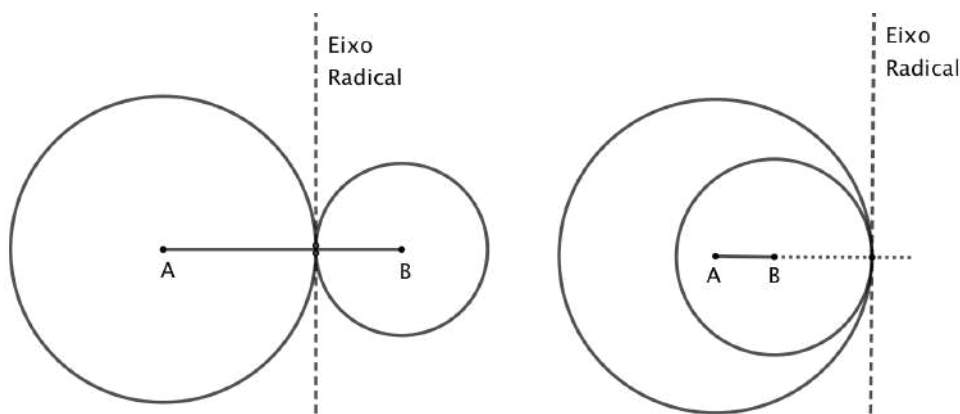


Figura 2.38: duas circunferências tangentes.

2.6 Concorrência e Colinearidade

2.6.1 Teorema de Ceva

Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e sejam M , N e P , respectivamente, pontos sobre os lados AB , BC e AC . Os segmentos AN , BP e CM são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1.$$

Demonstração:

(\implies) “Se AN , BP e CM são concorrentes então $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1$ ”

Inicialmente trace uma reta r paralela a BC passando por A . Prolongue CM e BP até cortar r , respectivamente, em C' e B' .

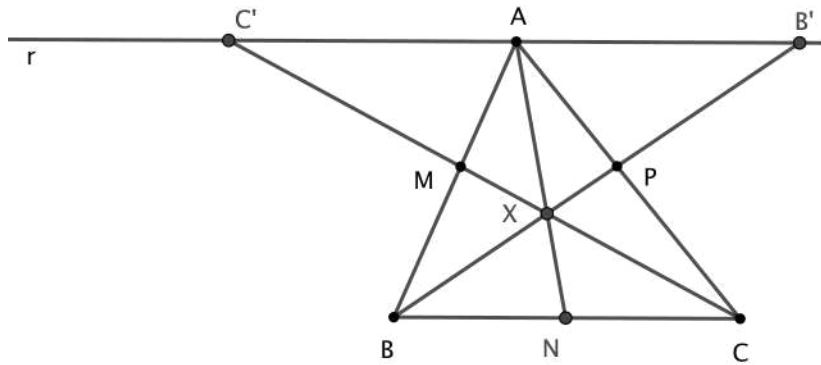


Figura 2.39: prova teorema de ceva (\implies)

Dos triângulos semelhantes formados, temos:

$$\triangle AMC' \sim \triangle CMB \implies \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC}} \quad (2.1)$$

$$\triangle APB' \sim \triangle PBC \implies \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB'}} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BXN \sim \triangle AXB' \implies \frac{\overline{AX}}{\overline{XN}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{BN}} \\ \triangle AXC' \sim \triangle CXN \implies \frac{\overline{AX}}{\overline{XN}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{CN}} \end{array} \right\} \implies \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \quad (2.3)$$

Portanto, multiplicando membro a membro, (2.1), (2.2) e (2.3), obtemos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB'}} \implies \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1$$

(\Leftarrow) “Se $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1$ então AN , BP e CM são concorrentes.”

Tracemos inicialmente AN e BP , que se cortam em X . Agora tracemos a reta que passa por C e X que corta AB em M'

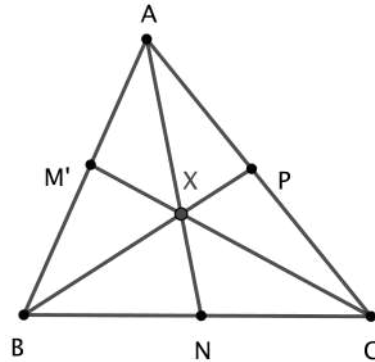


Figura 2.40: prova teorema de ceva (\Leftarrow)

Como AN , BP e CM' são concorrentes, então $\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1$

Portanto,

$$1 = \frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} \implies \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}}.$$

Como existe apenas um único ponto que divide o segmento AB numa razão dada, então $M = M'$

Exemplo 2.6.1. *Seja M um ponto no interior do triângulo $\triangle ABC$. As retas \overleftrightarrow{AM} , \overleftrightarrow{BM} , \overleftrightarrow{CM} intersectam os lados BC, CA, AB nos pontos A', B', C' , respectivamente. Denotando por $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ as áreas dos triângulos $\triangle MA'B, \triangle MA'C, \triangle MB'C, \triangle MB'A, \triangle MC'A$ e $\triangle MC'B$, respectivamente.*

Provar que, se

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3,$$

então M é o baricentro (interseção das três medianas) do triângulo $\triangle ABC$.

Solução:

Usando o Teorema de Ceva, obtemos

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1,$$

consequentemente

$$\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6} = 1 \quad (2.4)$$

Demonstração:(2.4)

Perceba que os triângulos $\triangle MC'B$ e $\triangle MC'A$ tem mesma altura h , logo

$$S_5 = \frac{\overline{BC'} \cdot h}{2} \implies h = \frac{2S_5}{\overline{BC'}} \quad (2.5)$$

$$S_6 = \frac{\overline{C'A} \cdot h}{2} \implies h = \frac{2S_6}{\overline{C'A}} \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6), temos

$$\frac{S_5}{S_6} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}}.$$

Analogamente,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} \text{ e } \frac{S_3}{S_4} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}}$$

daí,

$$\frac{S_5}{S_6} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}} \cdot \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}} = 1$$

Portanto

$$\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6} = 1$$

■

Pela condição dada segue

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3\sqrt[3]{\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6}}$$

Daí

$$\frac{\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6}}{3} = \sqrt[3]{\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6}}$$

Assim, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{S_5}{S_6} = 1$$

Isso implica

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1$$

Segue que A', B', C' são os pontos médios dos lados do triângulo $\triangle ABC$ e M é o bari-centro.

■

2.6.2 Teorema de Menelaus

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e r uma reta que intersecta BC no ponto E , AC no ponto F e a reta suporte de AB no ponto D , então

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$$

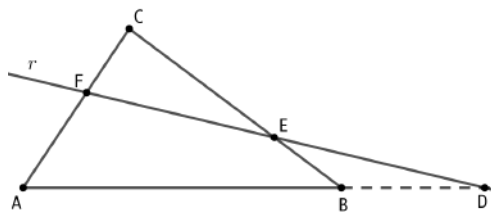


Figura 2.41: Teorema de Menelaus

Demonstração:

Consideremos o triângulo $\triangle CFE$ e altura $\overline{CN} = h_c$, o triângulo $\triangle AFD$ e altura $\overline{AM} = h_a$, e o triângulo $\triangle BDE$ e altura $\overline{BP} = h_b$

Desde que AM , BP e CN são perpendiculares ao segmentos MD , então esses três segmentos são paralelos. Assim:

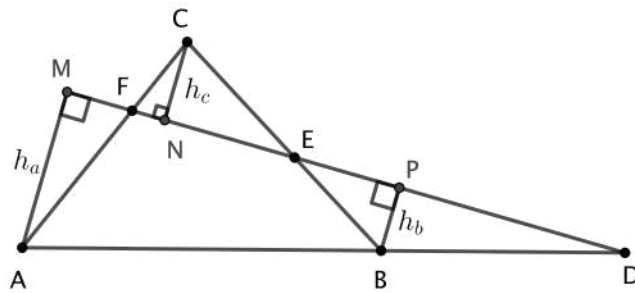


Figura 2.42: prova Teorema de Menelaus

$$\text{i) } \triangle AMD \sim \triangle BPD \implies \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{h_a}{h_b};$$

$$\text{ii) } \triangle BPE \sim \triangle CNE \implies \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{h_b}{h_c};$$

$$\text{iii) } \triangle AMF \sim \triangle CNF \implies \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{h_c}{h_a}.$$

Multiplicando: $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{h_a}{h_b} \cdot \frac{h_b}{h_c} \cdot \frac{h_c}{h_a} = 1$



2.6.3 Teorema Recíproco de Menelaus

Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Se, D, E e F são pontos sobre as retas suporte dos lados AB, BC e AC , respectivamente, e $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$ então D, E e F são colineares.

Demonstração:

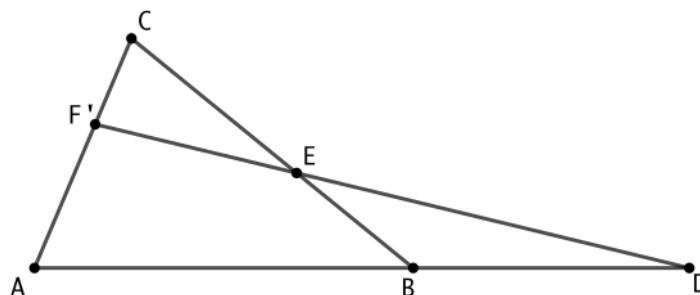


Figura 2.43: prova Teorema recíproco de Menelaus

Suponha que a reta ED corta o lado AC em F' . Pelo Teorema de Menelaus temos que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF'}}{\overline{F'A}} = 1$. Como $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$ então temos que $\frac{\overline{F'A}}{\overline{CF'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{CF}}$, como existe apenas um único ponto que divide o segmento AC numa razão dada então $F = F' \implies D$, E e F estão alinhados. ■

Observação 1: A demonstração do teorema de Menelaus foi realizada para o caso em que a transversal corta dois lados e o prolongamento do terceiro lado do triângulo. Contudo, o teorema de Menelaus também é válido quando a transversal corta o prolongamento dos três lados do triângulo, conforme figura 2.44. Neste caso, a expressão do teorema de Menelaus fica

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$$

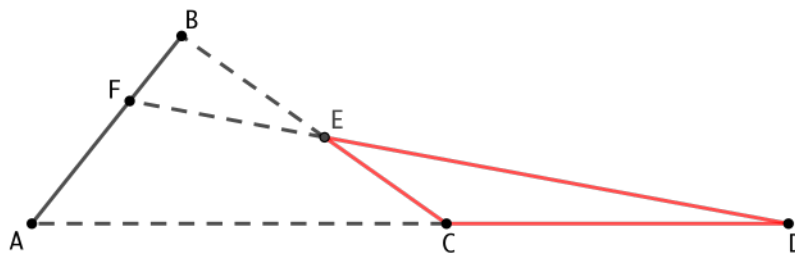


Figura 2.44: Observação 1

Observação 2: Para escrever adequadamente o Teorema de Menelaus é necessário destacar sobre qual triângulo e qual transversal (reta que intersecta as retas suportes dos lados do triângulo) o teorema está sendo aplicado. Por exemplo, aplicando o Teorema de Menelaus sobre o triângulo $\triangle ABC$ e a transversal FED tem-se $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$. Entretanto, aplicando o Teorema de Menelaus sobre o triângulo $\triangle FAD$ e a transversal CEB segue que $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CF}} = 1$.

Exemplo 2.6.2. Prove que se r é uma reta que passa pelo baricentro, G , do $\triangle ABC$, e intersecta AB em M e AC em N , então $(\overline{AM})(\overline{NC}) + (\overline{AN})(\overline{MB}) = (\overline{AM})(\overline{AN})$. (Veja Figura 2.46)

Demonstração:

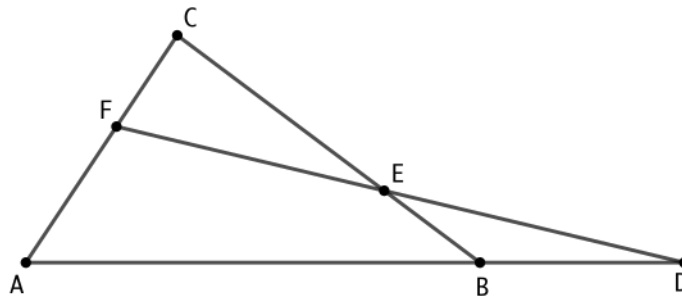


Figura 2.45: observação Teorema de Menelaus

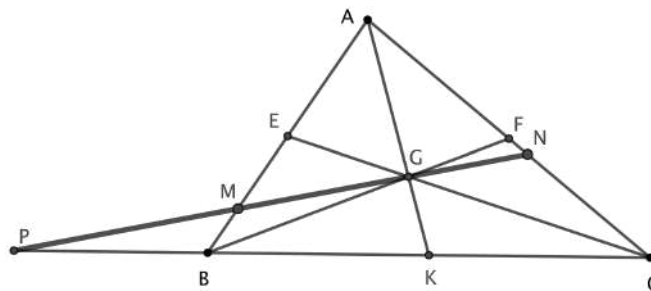


Figura 2.46: exemplo 2.6.2

Na figura 2.46, a reta \overleftrightarrow{MN} corta \overleftrightarrow{BC} em P . G é o baricentro do $\triangle ABC$. Considere \overleftrightarrow{NP} como uma transversal do $\triangle AKC$.

Pelo Teorema de Menelaus temos:

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{GK}} \cdot \frac{\overline{PK}}{\overline{CP}} = 1$$

Desde que $\frac{\overline{AG}}{\overline{GK}} = \frac{2}{1} \implies \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} \cdot \frac{2\overline{PK}}{\overline{CP}} = 1 \implies \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{PC}}{2\overline{PK}}$ (I)

Agora considere \overleftrightarrow{GMP} como uma transversal do $\triangle AKB$,

Pelo Teorema de Menelaus temos:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{GK}} \cdot \frac{\overline{PK}}{\overline{BP}} = 1$$

Desde que $\frac{\overline{AG}}{\overline{GK}} = \frac{2}{1} \implies \frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} \cdot \frac{2\overline{PK}}{\overline{PB}} = 1 \implies \frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PB}}{2\overline{PK}}$ (II)

Somando (I) e (II), resulta

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PC} + \overline{PB}}{2\overline{PK}}.$$

Sendo $\overline{PC} = \overline{PB} + 2\overline{BK}$, então $\overline{PC} + \overline{PB} = 2(\overline{PB} + \overline{BK}) = 2\overline{PK}$.

Portanto $\frac{(\overline{AM})(\overline{NC}) + (\overline{AN})(\overline{MB})}{(\overline{AM})(\overline{AN})} = 1$ e $(\overline{AM})(\overline{NC}) + (\overline{AN})(\overline{MB}) = (\overline{AM})(\overline{AN})$. ■

2.6.4 Teorema de Pappus

Os pontos A, B e C estão em uma reta e A', B' e C' estão em outra reta (em alguma ordem). Se $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{A'B}$ intersectam-se em C'' , $\overleftrightarrow{AC'}$ e $\overleftrightarrow{A'C}$ intersectam-se em B'' e $\overleftrightarrow{BC'}$ e $\overleftrightarrow{B'C}$ intersectam-se em A'' , então os pontos A'', B'' e C'' são colineares.

Demonstração:

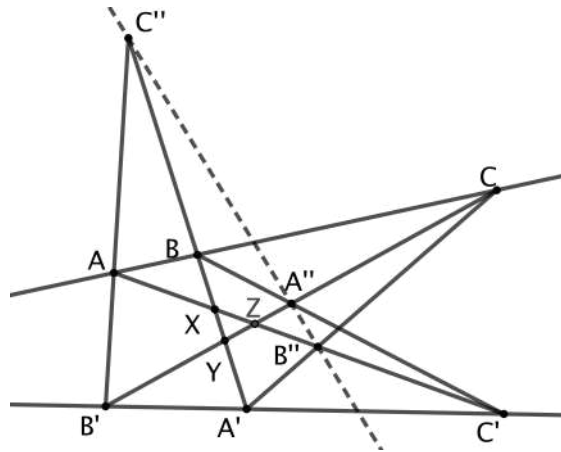


Figura 2.47: prova teorema de Pappus.

$B'C$ e $A'B$ encontram-se no ponto Y , AC' e $A'B$ encontram-se no ponto X e $B'C$ e AC' encontram-se no ponto Z . Considere $\overleftrightarrow{C''A'B'}$ como transversal do $\triangle XYZ$. Pelo Teorema de Menelaus:

$$\frac{\overline{ZB'}}{\overline{YB'}} \cdot \frac{\overline{YC''}}{\overline{XC''}} \cdot \frac{\overline{XA}}{\overline{ZA}} = 1 \quad (1)$$

Tomando $\overleftrightarrow{A'B''C}$ como transversal do $\triangle XYZ$. Novamente pelo Teorema de Menelaus:

$$\frac{\overline{YA'}}{\overline{XA'}} \cdot \frac{\overline{XB''}}{\overline{ZB''}} \cdot \frac{\overline{ZC}}{\overline{YC}} = 1 \quad (2)$$

Tomando, agora, $\overleftrightarrow{BA''C'}$ como transversal do $\triangle XYZ$. Mais uma vez pelo Teorema de Menelaus:

$$\frac{\overline{YB}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{XC'}}{\overline{ZC'}} \cdot \frac{\overline{ZA''}}{\overline{YA''}} = 1 \quad (3)$$

Como A , B e C são colineares e os pontos A' , B' e C' são colineares, podemos escrever as seguintes relações do Teorema de Menelaus (quando considerarmos cada reta como transversal do $\triangle XYZ$).

$$\frac{\overline{ZB'}}{\overline{YB'}} \cdot \frac{\overline{YA'}}{\overline{XA'}} \cdot \frac{\overline{XC'}}{\overline{ZC'}} = 1 \quad (4)$$

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{ZC}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{YB}}{\overline{XB}} = 1 \quad (5)$$

Multiplicando (1), (2) e (3)

$$\frac{\overline{ZB'}}{\overline{YB'}} \cdot \frac{\overline{YC''}}{\overline{XC''}} \cdot \frac{\overline{XA}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{YA'}}{\overline{XA'}} \cdot \frac{\overline{XB''}}{\overline{ZB''}} \cdot \frac{\overline{ZC}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{YB}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{XC'}}{\overline{ZC'}} \cdot \frac{\overline{ZA''}}{\overline{YA''}} = 1$$

Reorganizando,

$$\underbrace{\frac{\overline{ZB'}}{\overline{YB'}} \cdot \frac{\overline{YA'}}{\overline{XA'}} \cdot \frac{\overline{XC'}}{\overline{ZC'}}}_{(4)} \cdot \underbrace{\frac{\overline{XA}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{ZC}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{YB}}{\overline{XB}}}_{(5)} \cdot \frac{\overline{YC''}}{\overline{XC''}} \cdot \frac{\overline{XB''}}{\overline{ZB''}} \cdot \frac{\overline{ZA''}}{\overline{YA''}} = 1$$

Substituindo (4) e (5), obtemos

$$\frac{\overline{YC''}}{\overline{XC''}} \cdot \frac{\overline{XB''}}{\overline{ZB''}} \cdot \frac{\overline{ZA''}}{\overline{YA''}} = 1$$

Desta forma, pelo Teorema de Menelaus temos que A'' , B'' e C'' são colineares. ■

2.7 Triângulos: Pontos Clássicos

2.7.1 Mediana e Baricentro

Definição

Num triângulo, mediana é cada um dos segmento que tem por extremos um vértice e ponto médio do lado oposto.

Teorema

As três medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado baricentro (G).

Demonstração:

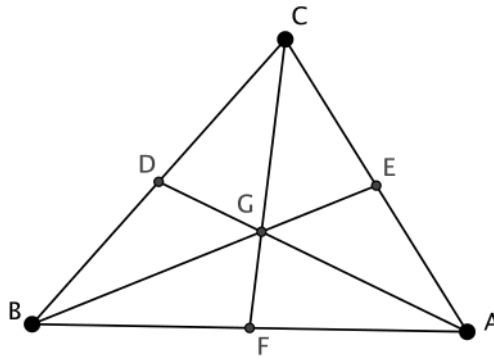


Figura 2.48: Baricentro

Sejam F , D e E os pontos médios, respectivamente, dos lados AB , BC e AC , ou seja, $\overline{AF} = \overline{FB}$, $\overline{BD} = \overline{DC}$ e $\overline{CE} = \overline{EA}$. Tracemos as três medianas: AD , BE e CF . Como $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$, pelo Teorema de Ceva temos que estas três medianas são concorrentes. ■

Propriedades do Baricentro:

- I) É o centro de gravidade do triângulo, por isso costuma-se representá-lo por G .
- II) Divide cada mediana em duas partes tal que uma é o dobro da outra;

$$\begin{cases} \overline{AG} = 2\overline{GD} \\ \overline{BG} = 2\overline{GE} \\ \overline{CG} = 2\overline{GF} \end{cases} \quad (2.7)$$

Demonstração:

Considere o $\triangle BCF$ e a transversal AD . Pelo Teorema de Menelaus:

$$1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{FG}}{\overline{CG}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = 2 \cdot \frac{\overline{FG}}{\overline{CG}} \cdot 1 \implies \frac{\overline{CG}}{\overline{GF}} = 2.$$

As outras duas relações são demonstradas de forma análoga. ■

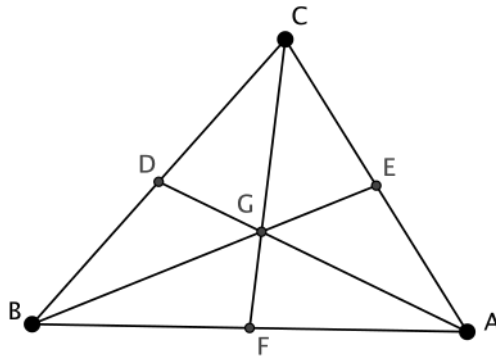


Figura 2.49: prova propriedade II

Podemos enxergar esta propriedade de outra forma, por exemplo,

$$\begin{cases} \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AD} \\ \overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{AD} \end{cases} \quad (2.8)$$

III) As três medianas de um triângulo qualquer o dividem em seis triângulos de mesma área.

Demonstração:

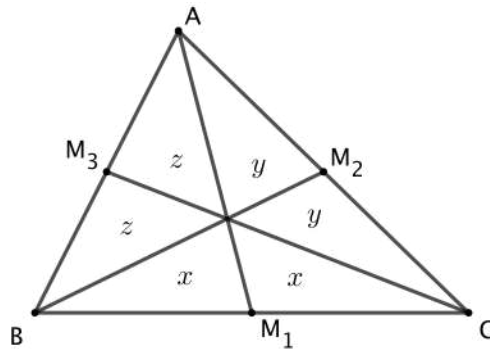


Figura 2.50: prova propriedade III

Observe que $\triangle BGM_1$ e $\triangle CGM_1$ possuem a mesma altura relativa ao vértice G (baricentro do triângulo $\triangle ABC$) e que suas bases são iguais, uma vez que $\overline{BM_1} = \overline{CM_1}$. Dessa forma as áreas dos triângulos $\triangle BGM_1$ e $\triangle CGM_1$ são iguais. Analogamente concluímos que as áreas dos triângulos $\triangle AGM_2$ e $\triangle CGM_2$ são iguais, bem como as áreas dos triângulos $\triangle AGM_3$ e $\triangle BGM_3$ também são iguais.

Da mesma forma outros pares de triângulos possuem a mesma base e a mesma altura:

i) $\triangle BAM_1$ e $\triangle CAM_1$; ii) $\triangle BCM_3$ e $\triangle ACM_3$; iii) $\triangle CBM_2$ e $\triangle ABM_2$.

Concluimos, portanto, que:

$$\begin{cases} 2z + x = 2y + x \\ 2x + y = 2z + y \\ 2y + z = 2x + z \end{cases} \iff x = y = z \quad (2.9)$$

■

Definição:

Dado um triângulo $\triangle ABC$, sejam M , N e P os pontos médios dos lados. O triângulo $\triangle MNP$ é chamado triângulo medial de $\triangle ABC$

Proposição 2.7.1. *O triângulo medial de um triângulo $\triangle ABC$ é semelhante ao triângulo $\triangle ABC$ e sua área é $1/4$ da área de $\triangle ABC$.*

Demonstração:

Sejam M , N e P os pontos médios dos lados de um triângulo $\triangle ABC$

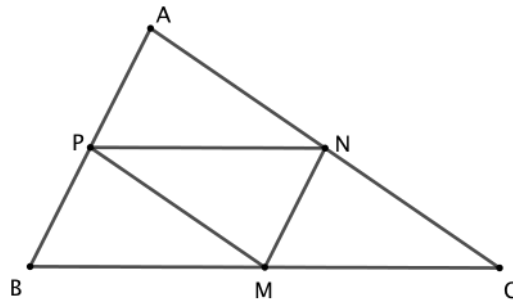


Figura 2.51: triângulo medial

Pela construção temos $MN \parallel AB \implies \triangle CMN \sim \triangle CBA \implies \overline{AB} = 2\overline{MN}$

Analogamente $\overline{MP} \parallel \overline{AC} \implies \overline{AC} = 2\overline{MP}$ e $\overline{NP} \parallel \overline{BC} \implies \overline{BC} = 2\overline{NP}$

Portanto temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = 2 \implies \triangle MNP \sim \triangle ABC$$

Também, como a razão de semelhança é 2, então

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}} = 2^2 = 4 \implies S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

■

2.7.2 Bissetriz e Incentro

Definição:

A bissetriz do ângulo \hat{A} de um triângulo $\triangle ABC$ é o segmento AD tal que $m(\hat{BAD}) = m(\hat{DAC})$.

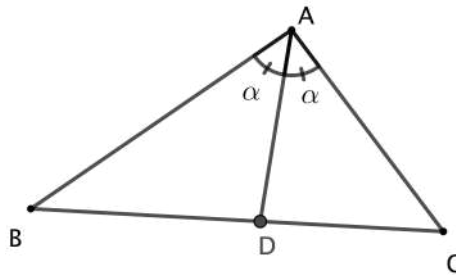


Figura 2.52: bissetriz do ângulo \hat{A}

Propriedade da Bissetriz:

Os pontos pertencentes à bissetriz AD são equidistantes dos lados AB e AC .

Demonstração:

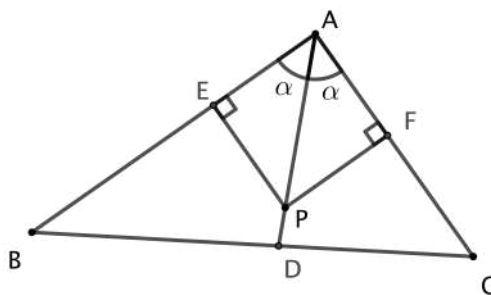


Figura 2.53: prova pontos da bissetriz equidistantes dos lados

Seja P um ponto pertencente à bissetriz AD e os pontos E e F as interseções das perpendiculares baixadas do ponto P , respectivamente aos lados AB e AC . Temos que

os triângulos $\triangle APE$ e $\triangle APF$ são congruentes, pelo caso LAA_o de congruência, portanto temos que $\overline{PE} = \overline{PF}$.

■

Teorema da Bissetriz Interna:

Se AD é a bissetriz do ângulo \hat{A} de um triângulo $\triangle ABC$ então $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Demonstração:

Prolongue, a partir de A , o segmento AB até A' de modo que $A'C \parallel AD$.

Note que sendo $A'C \parallel AD$ então $m(\hat{D}AC) = m(\hat{A}CA')$.

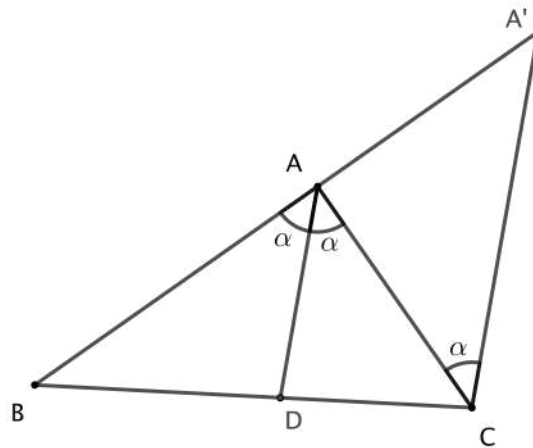


Figura 2.54: prova teorema bissetriz interna

Como $m(\hat{C}AA') = 180^\circ - 2\alpha$ então $m(\hat{AA'C}) = \alpha \implies \triangle AA'C$ é isósceles $\implies \overline{AA'} = \overline{AC}$.

Deste modo $\triangle A'BC \sim \triangle ABD \implies$

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BA'} - \overline{BA}}{\overline{BC} - \overline{BD}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} \implies \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

.

■

Incentro

As bissetrizes de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado de incentro (I).

Demonstração:

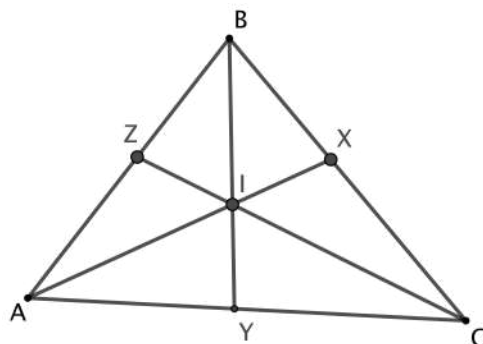


Figura 2.55: prova concorrência das bissetrizes internas

Pelo teorema da bissetriz interna temos que:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \quad \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$$

Deste modo, multiplicando membro a membro, temos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = 1$$

Portanto, pelo teorema de Ceva concluímos que as três bissetrizes internas são concorrentes:.



Propriedade do Incentro:

É o centro da circunferência inscrita no triângulo.

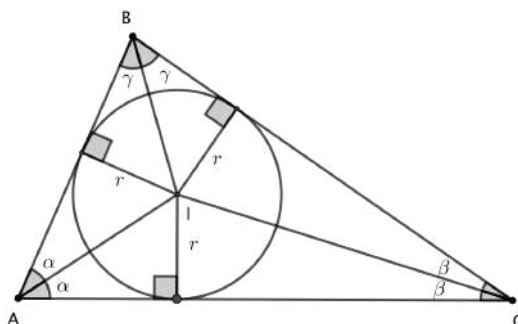


Figura 2.56: propriedade do incentro

Demonstração:

Pela propriedade da bissetriz temos que I é o ponto equidistante de AB , BC e CA . Desta forma existe uma circunferência com centro em I tangente aos três lados do triângulo, cujo raio é exatamente a distância de I aos lados AB , BC e CA . ■

Área do triângulo circunscrito

Seja S a área do triângulo $\triangle ABC$ e r o raio do seu círculo inscrito. Desta forma:

$$S = S_{\triangle BCI} + S_{\triangle ACI} + S_{\triangle ABI} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{(a + b + c)r}{2} \implies$$

$$S = p \cdot r$$

Definição:

Bissetriz externa do ângulo \hat{A} de um triângulo $\triangle ABC$ é a semi-reta que divide ao meio o ângulo externo \hat{A} .

2.7.3 Teorema da Bissetriz Externa

Se AP é bissetriz do ângulo \hat{A} de um triângulo $\triangle ABC$ então $\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}}$.

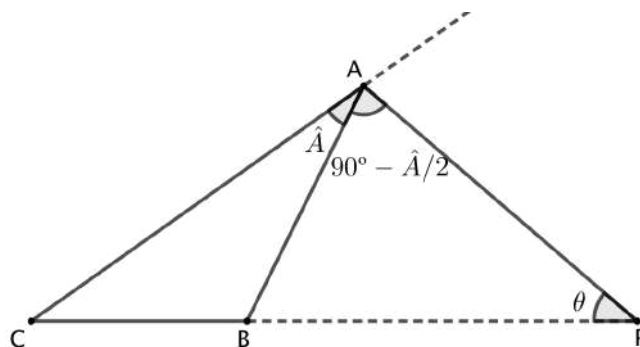
Demonstração:

Figura 2.57: teorema da bissetriz externa

Seja AP a bissetriz externa do ângulo \hat{A} . Desta forma $\hat{BAP} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$.

Aplicando a lei dos senos ao triângulo $\triangle ABP$:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = \frac{\overline{BP}}{\sin(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2})} \implies \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\sin \theta} \quad (1)$$

Aplicando novamente a lei dos senos, agora ao triângulo $\triangle ACP$:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{CP}}{\sin(90^\circ + \frac{\hat{A}}{2})} \implies \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}} = \frac{\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\sin \theta} \quad (2)$$

Portanto, concluímos a partir de (1) e (2) que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}}$$

■

2.7.4 Mediatriz e Circuncentro

Definição:

Dados os pontos A e B no plano, mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular a AB que passa por seu ponto médio.

Proposição 2.7.2. (*Caracterização da mediatriz de um segmento como lugar geométrico*)

Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e de B .

Demonstração:

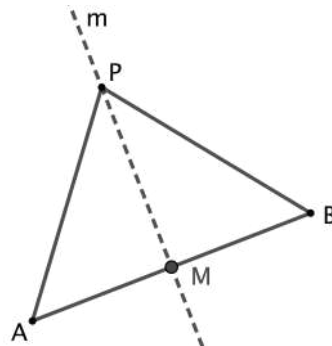


Figura 2.58: $P \in (\text{mediatriz de } AB) \implies \overline{PA} = \overline{PB}$.

Sejam M o ponto médio e m a mediatriz de AB . Se $P \in m$, então no triângulo $\triangle PAB$, PM é mediana e altura e, daí, os triângulos $\triangle PMA$ e $\triangle PMB$ são congruentes pelo caso LAL de congruência, logo o triângulo $\triangle PAB$ é isósceles de base AB . Portanto $\overline{PA} = \overline{PB}$ ■

Proposição 2.7.3. *Em todo triângulo as mediatrizes dos lados concorrem em um mesmo ponto, o **circuncentro** (O) do mesmo.*

Demonstração:

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, r , s e t , respectivamente, as mediatrizes dos lados BC , CA e AB , e O o ponto de interseção das retas r e s .

Pela caracterização da mediatriz de um segmento como lugar geométrico, temos $\overline{OB} = \overline{OC}$ (pois $O \in r$) e $\overline{OC} = \overline{OA}$ (pois $O \in s$). Portanto, $\overline{OB} = \overline{OA}$ e segue, novamente da caracterização da mediatriz como lugar geométrico, que $O \in t$.

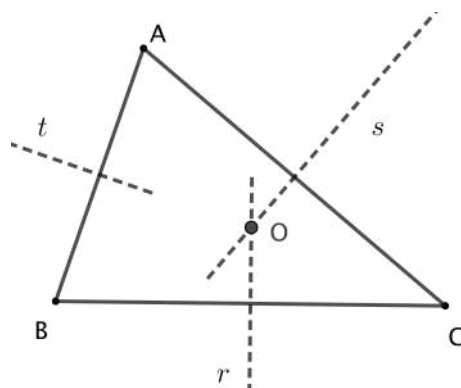
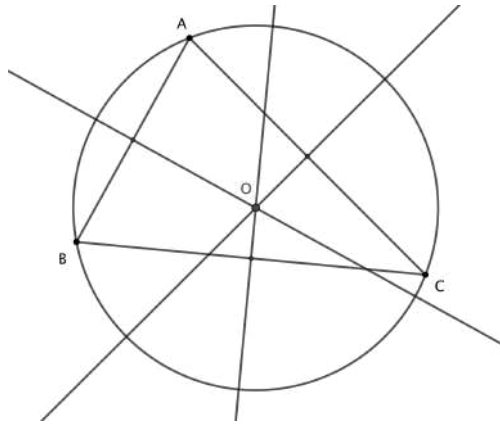


Figura 2.59: o circuncentro de um triângulo ■

Propriedades do Circuncentro:

- I) É um ponto equidistante dos vértices do triângulo.
- II) É o centro da circunferência circunscrita no triângulo.

Como O é equidistante de A , B e C , então existe um circunferência λ com centro em O e que contém os vértices do $\triangle ABC$. A esta circunferência λ que contém os vértices do $\triangle ABC$ dá-se o nome de circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Podemos dizer, também, que o triângulo $\triangle ABC$ está inscrito a λ ou que λ é o circuncírculo do $\triangle ABC$

Figura 2.60: circuncírculo do $\triangle ABC$

Área do triângulo inscrito

Se $\triangle ABC$ é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, ângulos internos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e raio do círculo circunscrito igual a R , então

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}.$$

Demonstração:

Vimos na seção 2.3.3 que a área de um triângulo $\triangle ABC$ pode ser dada pela fórmula do seno

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{C}}{2}$$

Aplicando a lei dos senos à fórmula acima, obtemos

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

■

2.7.5 Altura e Ortocentro

Definição:

Seja $\triangle ABC$ um triângulo. chamamos de altura do triângulo em relação ao lado BC , ao segmento de reta perpendicular a \overleftrightarrow{BC} que tem por extremidades A e a projeção ortogonal de A sobre \overleftrightarrow{BC} .

Proposição 2.7.4. *As três retas suportes das alturas de um triângulo concorrem em um ponto denominado de **ortocentro** (H).*

Demonstração:

Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Há três casos a considerar:

(a) $\triangle ABC$ é retângulo: suponhamos, sem perda de generalidade, que $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Então, A é o pé das alturas relativas aos lados AB e AC .

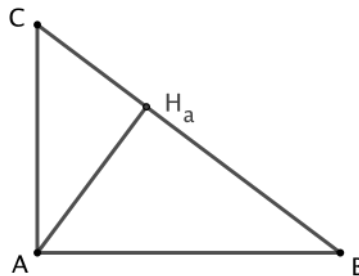


Figura 2.61: ortocentro de um triângulo retângulo.

Como a altura relativa ao lado BC passa (por definição) por A , segue que as alturas de $\triangle ABC$ concorrem em A .

(b) $\triangle ABC$ é acutângulo: trace, respectivamente por A , B e C , retas r , s e t paralelas a BC , CA e AB (também respectivamente), e sejam $r \cap s = \{P\}$, $s \cap t = \{M\}$, $t \cap r = \{N\}$. Então, os quadriláteros $ABCN$ e $ABMC$ são paralelogramos, de sorte que $\overline{CN} = \overline{AB} = \overline{CM}$ e, daí, C é o ponto médio de MN . Analogamente, B é o ponto médio de MP e A o ponto médio de NP .

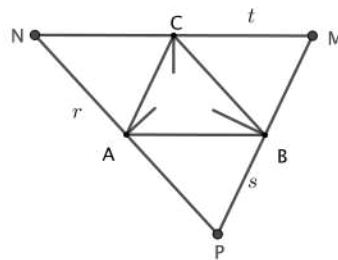


Figura 2.62: ortocentro de um triângulo acutângulo.

Por outro lado, a altura relativa a BC também é perpendicular a NP , já que \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{NP} são paralelas. Do mesmo modo, as alturas relativas a AC e AB são respectivamente

perpendiculares a MP e MN . Segue que as alturas do triângulo $\triangle ABC$ são as mediatrizes dos lados do triângulo $\triangle MNP$. Mas já provamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, de modo que as alturas de $\triangle ABC$ devem ser concorrentes.

(c) $\triangle ABC$ é obtusângulo: a prova é totalmente análoga à do caso (b.)

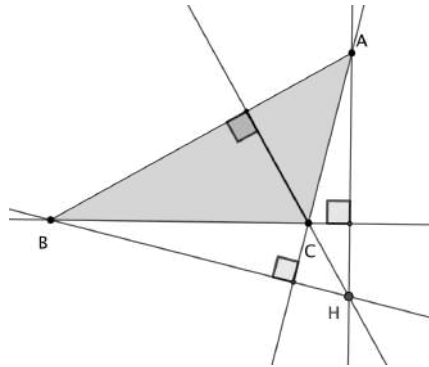


Figura 2.63: ortocentro de um triângulo obtusângulo



Propriedades do Ortocentro:

I) É o circuncentro do triângulo obtido quando traçamos pelos vértices do triângulo $\triangle ABC$ paralelas aos lados opostos (item b da proposição anterior).

II) É o incentro do triângulo cujos vértices são os pés das alturas do triângulo acutângulo $\triangle ABC$ (triângulo órtico do triângulo $\triangle ABC$)

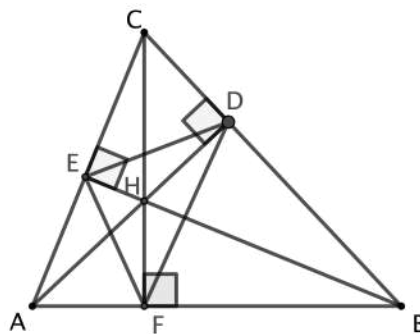


Figura 2.64: triângulo órtico do triângulo $\triangle ABC$.

Demonstração:

Note que $ECDH$ é inscrito, daí

$$m(\widehat{EDH}) = m(\widehat{ECH}) = 90^\circ - m(\widehat{BAC}) \quad (1)$$

Como $DBFH$ também é inscrito, vem

$$m(\widehat{FDH}) = m(\widehat{FBH}) = 90^\circ - m(\widehat{BAC}) \quad (2)$$

Logo, de (1) e (2) temos que

$$m(\widehat{EDH}) = m(\widehat{FDH}) \implies \text{altura AD é a bissetriz do ângulo } \angle EDF.$$

Analogamente pode-se demonstrar que:

$$m(\widehat{DEH}) = m(\widehat{FEH}) = 90^\circ - B \text{ e } m(\widehat{EFH}) = m(\widehat{DFH}) = 90^\circ - C.$$

Portanto, as alturas do triângulo $\triangle ABC$ são as bissetrizes do triângulo órtico $\triangle DEF$, isto é, H é o incentro do triângulo $\triangle DEF$. ■

2.8 Outros Teoremas Clássicos

Em seções anteriores vimos alguns teoremas clássicos, como o teorema de Ceva e o teorema de Menelaus. Aqui veremos outros teoremas clássicos.

2.8.1 Teorema de Ptolomeu

Se $ABCD$ é um quadrilátero inscrito de diagonais AC e BD , então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Demonstração:

Marque o ponto P sobre a diagonal BD , tal que $m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{CAD})$. Como $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD})$, os triângulos ABP e ACD são semelhantes pelo caso AA e, daí,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (1)$$

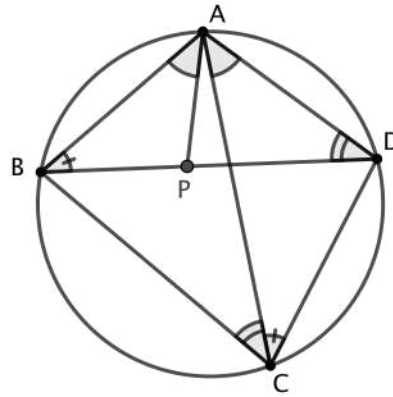


Figura 2.65: prova teorema de Ptolomeu.

Analogamente, também são semelhantes os triângulos ABC e APD , de maneira que

$$\frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC} \quad (2)$$

Agora, as relações (1) e (2) obtidas acima nos dão

$$\begin{aligned} \overline{BD} = \overline{BP} + \overline{PD} &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}} \implies \\ \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= \overline{AC} \cdot \overline{BD} \end{aligned}$$

■

2.8.2 Teorema de Hiparco

A razão das diagonais de um quadrilátero inscrito é igual a razão entre a soma dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais.

Demonstração:

Pela figura temos que

$$\begin{aligned} S_{\triangle BAC} + S_{\triangle DAC} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} \\ \frac{a \cdot b \cdot p}{4R} + \frac{c \cdot d \cdot p}{4R} &= \frac{a \cdot d \cdot q}{4R} + \frac{b \cdot c \cdot q}{4R} \\ p(a \cdot b + c \cdot d) &= q(a \cdot d + b \cdot c) \\ \frac{p}{q} &= \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d} \end{aligned}$$

■

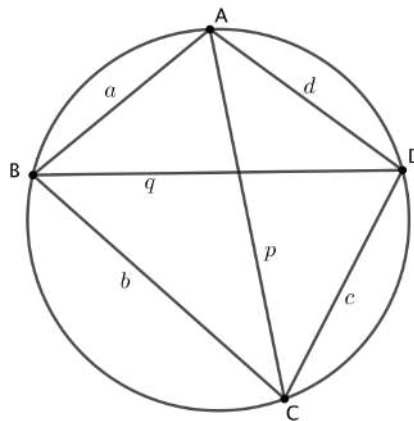


Figura 2.66: prova teorema de Hiparco.

2.8.3 Circunferência de Apolônio

Dados dois pontos distintos A e B e o real $0 < k \neq 1$, o lugar geométrico dos pontos C do plano tais que $\frac{AC}{BC} = k$ é uma circunferência cujo centro está sobre a reta AB . Este lugar geométrico é denominado circunferência de Apolônio de A e B e razão k .

Demonstração:

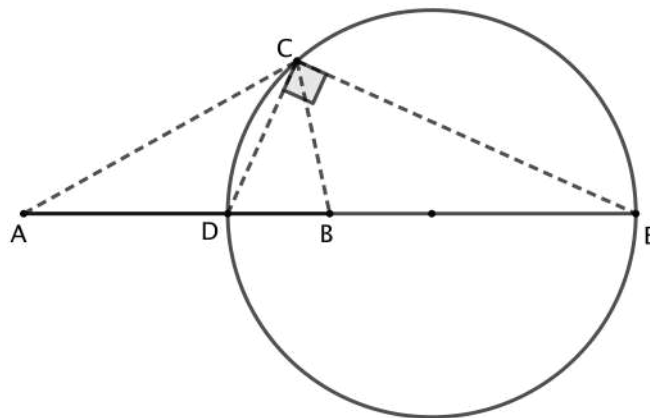


Figura 2.67: o círculo de Apolônio.

Considere que os pontos D e E dividem harmonicamente o segmento AB na razão k , ou seja, $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB} = k$. Seja C um ponto qualquer do lugar geométrico, então $\frac{AC}{BC} = \frac{DA}{DB} = k$, segue do teorema da bissetriz interna que \overline{CD} é bissetriz interna em $\triangle ABC$. Analogamente, $\frac{AC}{BC} = \frac{EA}{EB} = k$ e conclui-se, pelo teorema da bissetriz externa que CE é bissetriz externa em $\triangle ABC$, daí \overline{CD} e \overline{CE} são perpendiculares e como D e E são pontos

fixos, o lugar geométrico é o círculo de diâmetro \overline{DE} . ■

Observação: Perceba que é possível definir o círculo de Apolônio utilizando bissetriz. Seja D a interseção do lugar geométrico com o segmento AB . O círculo de Apolônio é o lugar geométrico dos pontos C de modo que CD é bissetriz interna de $\angle ACB$.

2.8.4 Teorema de Carnot

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo, O e R , respectivamente, centro e raio da circunferência circunscrita a $\triangle ABC$ e r o raio da circunferência inscrita a $\triangle ABC$. Se por O traçam-se perpendiculares aos lados de $\triangle ABC$, intersectando AB em O_1 , AC em O_2 e BC em O_3 , então:

$$\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r.$$

Demonstração:

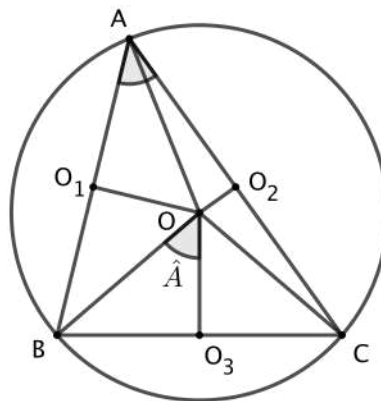


Figura 2.68: o teorema da Carnot.

Inicialmente note que $m(\widehat{BOC}) = 2m(\widehat{BAC}) = 2\hat{A}$. E como $\triangle BOC$ é isósceles de base \overline{BC} , então $\overline{OO_3}$ é altura e bissetriz, logo $m(\widehat{BOO_3}) = \hat{A}$, o que implica dizer que $\overline{OO_3} = R \cdot \cos \hat{A}$. Analogamente, $\overline{OO_2} = R \cdot \cos \hat{B}$ e $\overline{OO_1} = R \cdot \cos \hat{C}$.

A área do $\triangle BOC$ é dada por

$$S_{\triangle BOC} = \frac{a \cdot \overline{OO_3}}{2} = \frac{a \cdot R \cdot \cos \hat{A}}{2}$$

Analogamente:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{c \cdot R \cdot \cos \hat{C}}{2} \text{ e } S_{\triangle AOC} = \frac{b \cdot R \cdot \cos \hat{B}}{2}$$

Desta forma a área de $\triangle ABC$ é dada por:

$$S = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} = \frac{a \cdot R \cdot \cos \hat{A}}{2} + \frac{c \cdot R \cdot \cos \hat{C}}{2} + \frac{b \cdot R \cdot \cos \hat{B}}{2}$$

$$S = R \left(\frac{a \cdot \cos \hat{A} + b \cdot \cos \hat{B} + c \cdot \cos \hat{C}}{2} \right)$$

Em $\triangle ABC$: $a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$, $b = a \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{A}$ e $c = a \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{A}$

Somando estas equações:

$$a + b + c = (b + c) \cdot \cos \hat{A} + (a + c) \cdot \cos \hat{B} + (a + b) \cdot \cos \hat{C}$$

$$a + b + c = (a + b + c) \cdot \cos \hat{A} + (a + b + c) \cdot \cos \hat{B} + (a + b + c) \cdot \cos \hat{C} - a \cdot \cos \hat{A} - b \cdot \cos \hat{B} - c \cdot \cos \hat{C}$$

$$a + b + c = (a + b + c)(\cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C}) - (a \cdot \cos \hat{A} + b \cdot \cos \hat{B} + c \cdot \cos \hat{C})$$

$$2p = 2p \left(\frac{\overline{OO_3}}{R} + \frac{\overline{OO_2}}{R} + \frac{\overline{OO_1}}{R} \right) - \left(\frac{2S_{\triangle BOC}}{R} + \frac{2S_{\triangle AOC}}{R} + \frac{2S_{\triangle AOB}}{R} \right)$$

$$2p = 2p \left(\frac{\overline{OO_3}}{R} + \frac{\overline{OO_2}}{R} + \frac{\overline{OO_1}}{R} \right) - \frac{2S}{R}$$

$$pR = p(\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3}) - p \cdot r$$

$$\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$$

■

2.8.5 Teorema de Euler (Reta de Euler)

Em um triângulo $\triangle ABC$ o baricentro (G), o circuncentro (O) e o ortocentro (H) estão alinhados e pertencem a uma reta denominada de Euler. Além disso $\overline{HG} = 2\overline{GO}$.

Demonstração:

Inicialmente tracemos a altura relativa ao vértice A , a mediana relativa ao vértice A e a mediatriz do segmento BC . H representa o ortocentro e O o circuncentro do $\triangle ABC$.

Trace o segmento OH e seja W a interseção de OH com a mediana relativa ao vértice A .

Como H é o ortocentro do $\triangle ABC$ então BH é a altura relativa ao vértice B , ou seja, $BH \perp AC$.

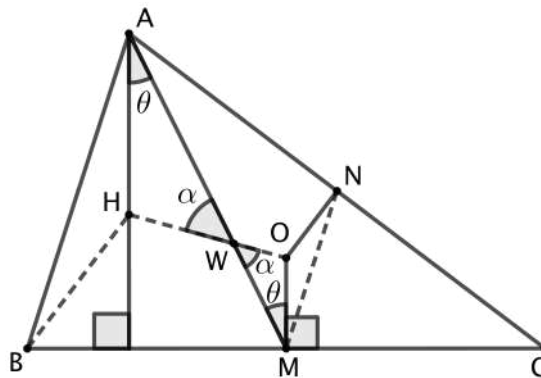


Figura 2.69: reta de Euler.

Como M e N são pontos médios, respectivamente, dos lados BC e AC , então $MN \parallel AB$ e $\overline{AB} = 2\overline{MN}$. Observe agora os triângulos $\triangle AHB$ e $\triangle MON$.

Note que: $AH \parallel OM$, $BH \parallel ON$ e $MN \parallel AB$.

Desde que dois triângulos que possuem todos os lados paralelos são semelhantes, então

$$\triangle AHB \sim \triangle MON : \frac{\overline{AH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = 2 \implies \overline{AH} = 2\overline{OM}$$

Repare agora nos triângulos $\triangle AHW$ e $\triangle MOW$. Como $\widehat{HAW} = \widehat{OMW} = \theta$ e $\widehat{AWH} = \widehat{MWO} = \alpha$, então temos que $\triangle AHW \sim \triangle MOW$. Portanto

$$\frac{\overline{AW}}{\overline{WM}} = \frac{\overline{HW}}{\overline{WO}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{OM}} = 2 \implies \overline{AW} = 2\overline{WM} \text{ e } \overline{HW} = 2\overline{WO}$$

Uma vez que W é o ponto da mediana AM tal que $\overline{AW} = 2\overline{WM}$ então W é necessariamente o baricentro do triângulo $\triangle ABC$. Assim, $W = G$, fazendo com que O , G e H estejam alinhados.

Da expressão $\overline{HW} = 2\overline{WO}$ concluímos que $\overline{HG} = 2\overline{GO}$

■

2.8.6 Teorema de Euler (Círculo dos Nove Pontos)

Em um triângulo, os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos vértices pertencem a uma mesma circunferência.

Demonstração:

Na figura, A' , B' e C' são os pontos médios dos lados do $\triangle ABC$. Uma vez que $A'B'$ é base média do $\triangle ABC$, $A'B' \parallel AB$. Portanto, o quadrilátero $A'B'C'F$ é um trapézio. $B'C'$

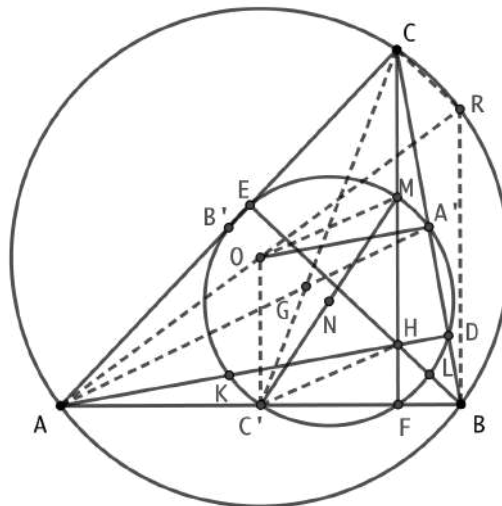


Figura 2.70: Círculo dos Nove Pontos.

é base média do $\triangle ABC$, assim $\overline{B'C'} = \frac{\overline{BC}}{2}$. Como $A'F$ é mediana do triângulo retângulo $\triangle BCF$, $\overline{A'F} = \frac{\overline{BC}}{2}$. Assim, concluímos que $\overline{B'C'} = \overline{A'F}$ e assim temos que $A'B'C'F$ é um trapézio isósceles, e como todo trapézio isóscele é inscritível, os pontos A' , B' , C' e F pertencem a mesma circunferência.

Analogamente pode-se demonstrar que os quadriláteros $A'B'C'D$ e $A'B'C'E$ são trapézios isósceles. Assim os seis pontos A' , B' , C' , D , E e F pertencem a uma mesma circunferência.

Sendo H o ortocentro do $\triangle ABC$, seja M o ponto médio de CH . Deste modo, $B'M$ é base média do $\triangle ACH$, ou seja, $B'M \parallel AH$ ou $B'M \parallel AD$. Desde que $B'C'$ é base média do $\triangle ABC$, $B'C' \parallel BC$. Desta forma, com \hat{ADC} é um ângulo reto então $\hat{MB'C'}$ é também um ângulo reto. Assim, concluímos que $MB'C'F$ é um quadrilátero inscritível, implicando que M pertence à circunferência que passa pelos pontos B' , C' e F . Analogamente, definindo L e K como os pontos médios de BH e AH , respectivamente, pode-se demonstrar que os quadriláteros $B'EA'L$ e $A'DKB'$ são inscritíveis. Uma vez que por três pontos não-alinhados passa somente uma circunferência, conclui-se que os nove pontos A' , B' , C' , D , E , F , K , L e M pertencem a uma mesma circunferência. ■

Teorema 2.8.1.

O centro do círculo dos nove pontos é o ponto médio do segmento que liga o ortocentro

ao circuncentro.

Demonstração:

Observe que $\triangle MC'F$ é um triângulo retângulo (ângulo reto em F) inscrito no círculo dos nove pontos, fazendo com que MC' seja seu diâmetro. Assim, o ponto N , médio de MC' , é o centro do círculo dos nove pontos. Seja R o ponto onde o prolongamento de AO intersecta o circuncírculo de $\triangle ABC$.

OC' é base média do $\triangle ARB$, assim $OC' \parallel RB$. Como o $\triangle ARB$ é um triângulo inscrito em uma semi-circunferência de diâmetro AR , temos que $\angle ABR$ é um ângulo reto.

Desde que RB e CF são perpendiculares a AB , então $RB \parallel CF$. Analogamente $BE \parallel CR$, onde concluímos que $CRBH$ é um paralelogramo, daí $\overline{RB} = \overline{CH}$.

Assim, $\overline{OC'} = \frac{\overline{RB}}{2} = \overline{MH}$, onde temos que $OC'HM$ é um paralelogramo (um par de lados congruentes e paralelos). Já que as diagonais de um paralelogramo intersectam em seus respectivos pontos médios, chegamos à conclusão que o ponto médio de MC' , ponto N , é também ponto médio de OH . ■

Teorema 2.8.2.

O comprimento do raio do círculo dos nove pontos é metade do comprimento do raio do circuncírculo.

Demonstração:

Na figura 2.70, observa-se que MN é base média do $\triangle OHC$. Assim, $\overline{MN} = \frac{\overline{OC}}{2}$. ■

Teorema 2.8.3. (Reta de Simson-Wallace) *Os pés das perpendiculares traçadas de um ponto da circunferência circunscrita a um triângulo aos lados desse triângulo são colineares e pertencem à reta de Simson-Wallace, relativa a esse ponto.*

Demonstração: Seja X um ponto qualquer sobre a circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$. A partir de X traçam-se perpendiculares a cada um dos lados do triângulo $\triangle ABC$, cortando BC em L , AC em M e AB em N .

Como $m(\widehat{ANX}) + m(\widehat{AMX}) = 180^\circ$ e $m(\widehat{XMC}) + m(\widehat{XLC}) = 180^\circ$, então os quadriláteros $XNAM$ e $XMLC$ são inscritíveis e como os ângulos $m(\widehat{NXA})$ e $m(\widehat{NMA})$, “enxergam” a mesma corda AN , temos que

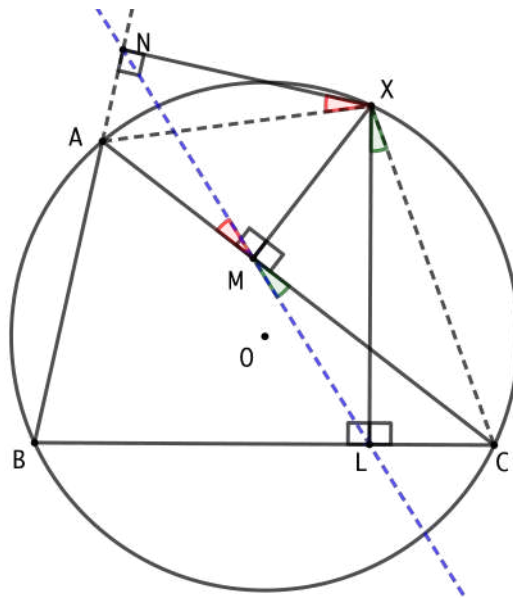


Figura 2.71: prova Reta Simson-Wallace

$$m(N\hat{X}A) = m(N\hat{M}A) \quad (2.10)$$

e analogamente

$$m(L\hat{M}C) = m(L\hat{X}C) \quad (2.11)$$

Temos, também, que o quadrilátero $ABCX$ é inscrito e como $m(B\hat{N}X) + m(X\hat{L}B) = 180^\circ$ o quadrilátero $BLXN$ também é inscrito, daí temos que

$$180^\circ - m(A\hat{B}C) = m(A\hat{X}C)$$

e

$$180^\circ - m(A\hat{B}C) = m(N\hat{X}L)$$

assim,

$$m(A\hat{X}C) = m(N\hat{X}L)$$

como

$$m(A\hat{X}C) = m(A\hat{X}L) + m(L\hat{X}C) \text{ e } m(N\hat{X}L) = m(N\hat{X}A) + m(A\hat{X}L)$$

temos,

$$m(A\hat{X}L) + m(L\hat{X}C) = m(N\hat{X}A) + m(A\hat{X}L)$$

$$m(L\hat{X}C) = m(N\hat{X}A) \tag{2.12}$$

Uma vez que os pontos A , M e C são colineares, das igualdades 2.10, 2.11 e 2.12 decorre que $m(N\hat{M}A) = m(L\hat{M}C)$ (opostos pelo vértice M), o que mostra que os pontos L , M e N são colineares, pertencendo à reta chamada reta de Simson-Wallace do triângulo ΔABC , relativa a esse ponto X .

■

Teorema 2.8.4. (Recíproco de Simson-Wallace) *Se os pés das perpendiculares de um ponto aos lados de um triângulo são colineares, então este ponto pertence à circunferência circunscrita ao triângulo.*

Demonstração:

Sejam L , M e N os pés das perpendiculares traçadas do ponto X a cada um dos lados do triângulo ΔABC , tais que pertencem a uma mesma reta r .

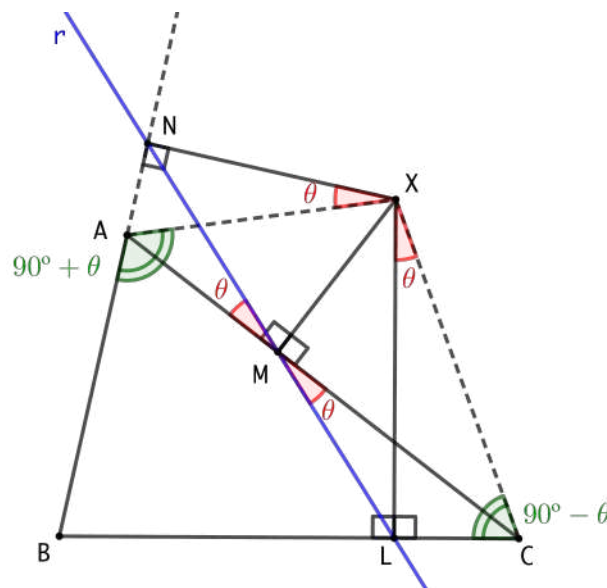


Figura 2.72: prova Reta Simson-Wallace

Assim, o quadrilátero $XNAM$ é inscrito na circunferência de diâmetro XA , com $m(N\hat{X}A) = m(N\hat{M}A)$, e o quadrilátero $MLCX$ é inscrito na circunferência de diâmetro XC , com $\theta = m(L\hat{M}C) = m(L\hat{X}C)$. Como $m(N\hat{M}A) = m(L\hat{M}C)$ (opostos pelo vértice M), decorre que $m(N\hat{X}A) = m(N\hat{M}A) = m(L\hat{M}C) = m(L\hat{X}C)$.

Além disso, observa-se que $m(\hat{B}AX)$ é ângulo externo do triângulo $\triangle ANX$, portanto $m(\hat{B}AX) = 90^\circ + \theta$ e que $m(\hat{B}CX) = m(\hat{L}CX) = 180^\circ - (90^\circ + \theta) = 90^\circ - \theta$ (triângulo $\triangle LCX$), ou seja, $m(\hat{B}AX)$ e $m(\hat{L}CX)$ são suplementares, portanto o quadrilátero $BAXC$ é inscrito e o ponto X pertence à circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$. ■

2.9 Teorema de Feurebach

Definição 2.9.1. (*Conjugado Harmônico*) Seja um segmento de reta AB . Dizemos que dois pontos M e N , pertencentes à reta \overleftrightarrow{AB} , são conjugados harmônicos de AB se

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

Como existe apenas um ponto que divide interiormente o segmento AB em uma dada razão, concluímos que apenas um deles, M ou N , está entre os pontos A e B .

Definição 2.9.2. (*Inverso de um ponto*) Seja $\Omega = C(O, r)$ um círculo de centro O e raio r . Dado um ponto P qualquer do plano, diferente de O , o ponto P' na semireta \overrightarrow{OP} tal que $OP \cdot OP' = r^2$ é dito inverso de P em relação a Ω .

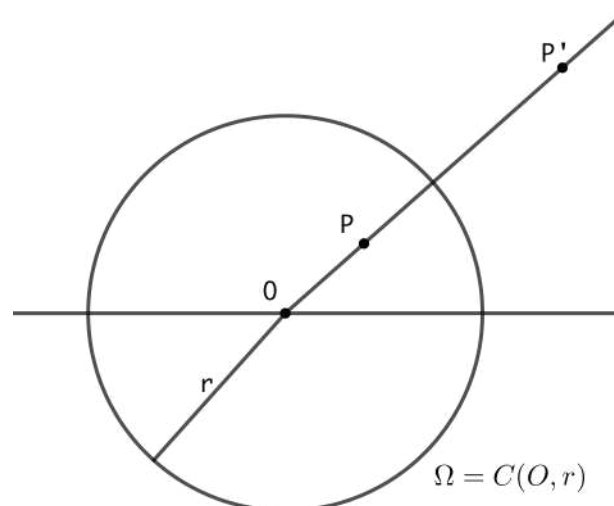


Figura 2.73: Inverso de um ponto interno à circunferência

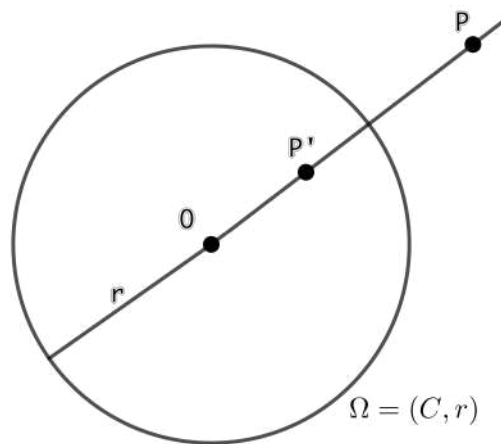


Figura 2.74: Inverso de um ponto externo à circunferência

Nota: Se um ponto P pertence à circunferência, então o seu inverso P' é coincidente. De fato, se $OP = r$ e $OP \cdot OP' = r^2$, então $OP' = r$ e $P \equiv P'$.

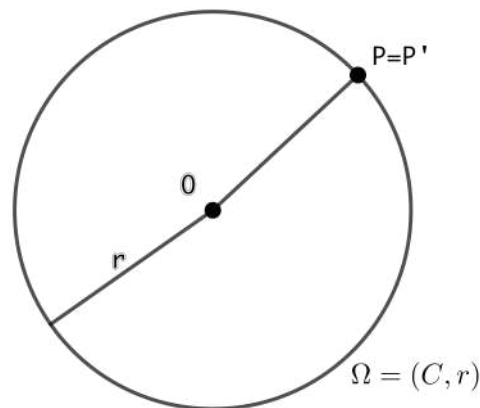


Figura 2.75: Inverso de um ponto pertencente à circunferência

Nos referimos ao círculo $\Omega = C(O, r)$ como sendo o *círculo de inversão* e diremos que o ponto O é o *centro de inversão*.

Uma vez fixado o círculo de inversão, denotaremos o inverso de qualquer figura (ou ponto) X como sendo X' , ou seja, $Inv(X) = X'$.

Se $Inv(X) = X'$, então $Inv(X') = X$.

Definição 2.9.3. (Circunferências Ortogonais) Duas curvas são ortogonais em um ponto de interseção, se as retas tangentes às curvas nesse ponto forem ortogonais.

Teorema 2.9.4. (Circunferências Ortogonais) *Seja $\Omega = C(O, r)$. Se os pontos P, P' e O estão alinhados, então P e P' são inversos em relação a Ω se, e somente se, qualquer circunferência que passa por P e P' for ortogonal a Ω .*

Demonstração: Suponhamos que P e P' são pontos inversos em relação à $\Omega = C(O, r)$. Seja $\Gamma = C(Q, k)$ uma circunferência com centro em Q e raio k , que passa por P e P' . Como um dos pontos é interno a Ω , as circunferências Ω e Γ se intersectam em dois pontos (G e H).

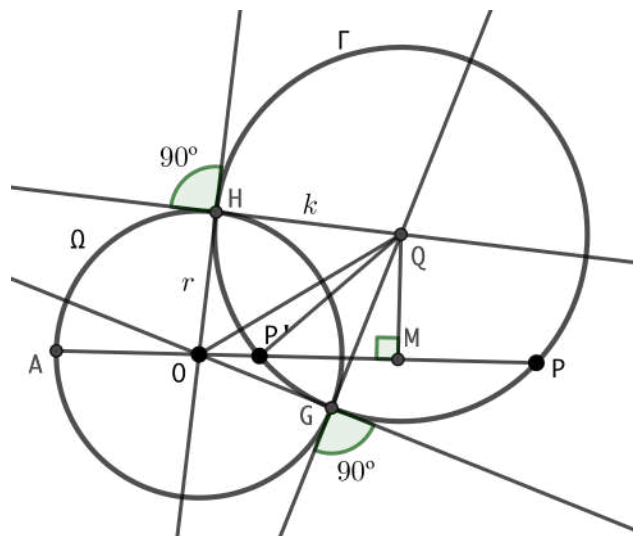


Figura 2.76: Circunferências Ortogonais

Seja M o pé da perpendicular traçada de Q à reta \overleftrightarrow{OP} , conforme figura 2.77. Do triângulo retângulo ΔOQM vem que

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{QM}^2 \tag{2.13}$$

Por outro lado, $\overline{OM} = \overline{OP'} + \overline{P'M}$. Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} \overline{OM}^2 &= (\overline{OP'} + \overline{P'M})^2 \\ &= \left(\overline{OP'} + \frac{\overline{OP} - \overline{OP'}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\overline{OP} + \overline{OP'}}{2} \right)^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

No triângulo $\Delta QMP'$, temos

$$\begin{aligned} \overline{QM}^2 &= \overline{QP'}^2 - \overline{P'M}^2 \\ &= k^2 - \left(\frac{\overline{PP'}}{2}\right)^2 \\ &= k^2 - \left(\frac{\overline{OP} - \overline{OP'}}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Substituindo (2.14) e (2.15) em (2.13) obtemos

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} + k^2$$

Como por hipótese $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$, então

$$\overline{OQ}^2 = r^2 + k^2$$

o que implica que os triângulos ΔOHQ e ΔOGQ são retângulos em H e G , respectivamente.

Reciprocamente, seja $\Gamma = C(Q, k)$ uma circunferência ortogonal a $\Omega = C(O, r)$ e que passa por P e P' . Então, se H é um ponto de interseção entre Ω e Γ , a reta s tangente à Γ no ponto H é perpendicular à reta s' tangente à Ω no ponto H . Assim, a reta s passa por O . Pelo Teorema 2.5.3, temos que

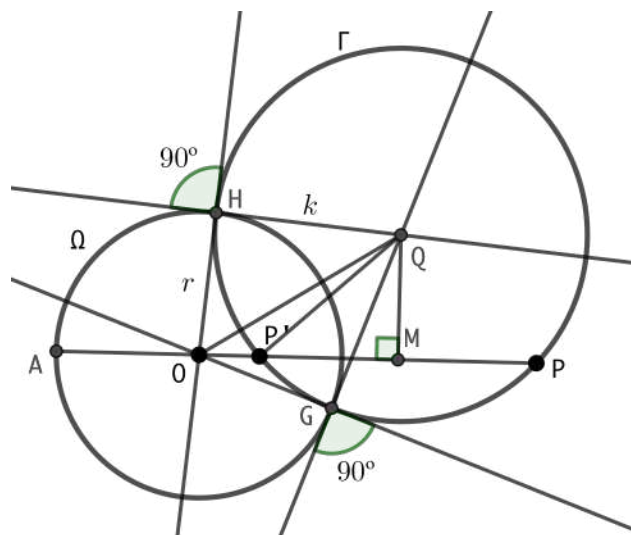


Figura 2.77: Circunferências Ortogonais

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OH}^2$$

e como $\overline{OH} = r$, segue

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

o que mostra que os pontos P e P' são inversos em relação a Ω . ■

Corolário 2.9.1. *Uma circunferência $\Gamma = C(Q, k)$ é invariante, isto é $\Gamma = \Gamma'$, em relação a uma circunferência de inversão $\Omega = C(O, r)$ se, e somente se, Γ é ortogonal a Ω .*

Teorema 2.9.5. *Os pontos P e P' são inversos em relação a $\Omega = C(O, r)$ se, e somente se, P e P' são conjugados harmônicos em relação ao diâmetro AB determinado pela intersecção da reta \overleftrightarrow{OP} com a circunferência Ω .*

Demonstração:

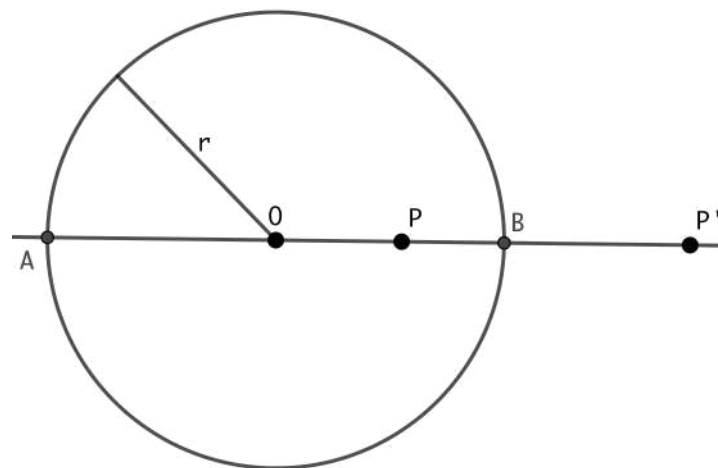


Figura 2.78: P e P' conjugados harmônicos

Considerando a figura 2.78, temos $\overline{P'B} = \overline{OP'} - r$ e $\overline{P'A} = \overline{OP'} + r$, daí

$$\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = \frac{\overline{OP'} + r}{\overline{OP'} - r}$$

Temos, também $\overline{PA} = r + \overline{OP}$ e $\overline{PB} = r - \overline{OP}$, daí

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{r + \overline{OP}}{r - \overline{OP}}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = \frac{PA}{PB} &\Leftrightarrow \frac{\overline{OP'} + r}{\overline{OP'} - r} = \frac{r + \overline{OP}}{r - \overline{OP}} \\ &\Leftrightarrow (\overline{OP'} + r) \cdot (r - \overline{OP}) = (\overline{OP'} - r) \cdot (\overline{OP} + r) \\ &\Leftrightarrow \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.9.6. (*Inversão de reta: Parte I*) Seja $\Omega = C(O, r)$. A inversa em relação a Ω de uma reta s que não passa por O , é uma circunferência que passa por O .

Demonstração: Seja A o pé da perpendicular traçada de O à reta s , e B um ponto qualquer distinto de A , pertencente a s . Sejam A' e B' os inversos de A e B , respectivamente. Então $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = r^2$, o que implica

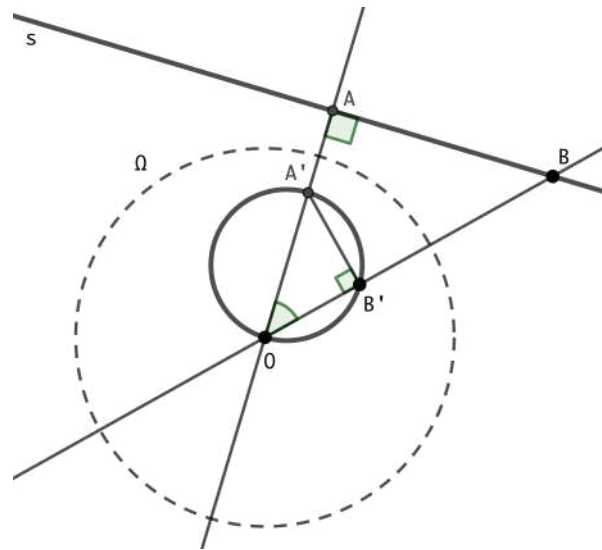


Figura 2.79: Inversão de reta que não passa por O .

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}}$$

e como $\widehat{B'OA'} = \widehat{BOA}$, concluímos que os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle A'OB'$ são semelhantes.

Logo $\widehat{A'B'O}$ é reto, o que nos mostra que B' pertence a uma circunferência $K = (Q, \overline{OQ})$ que tem o segmento $A'O$ como diâmetro.

■

Corolário 2.9.2. *Se s' é uma reta tangente a circunferência $K = (Q, \overline{OQ})$ no ponto O , então s' é paralela a s .*

Teorema 2.9.7. *(Inversão de reta: Parte II) Seja $\Omega = C(O, r)$. A inversa em relação a Ω de uma reta s que passa por O , é a própria reta s , ou seja, uma reta é invariante quando esta passa pelo centro de inversão.*

Demonstração: Se $P \neq O$ é um ponto da reta s , então, o inverso P' de P pertence à semirreta \overrightarrow{OP} , logo, como P e O pertencem a s , então, $P \in s$. Portanto $s = \text{Inv}(s)$. ■

Teorema 2.9.8. *(Inversão de circunferência) Seja $\Omega = C(O, r)$. A inversão em relação a Ω de uma circunferência $K = C(Q, k)$ que passa por O é uma reta.*

Demonstração: Sejam P um ponto pertencente a K , tal que \overline{OP} é um diâmetro de K e P' seu inverso em relação a Ω , isto é, $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Consideremos uma reta s , que contém P' e é perpendicular a OP , conforme Figura 2.80. Seja B um ponto da circunferência $K = (Q, \overline{OQ})$, vamos provar que B' , interseção da reta s com a reta que contém BO , é o inverso de B .

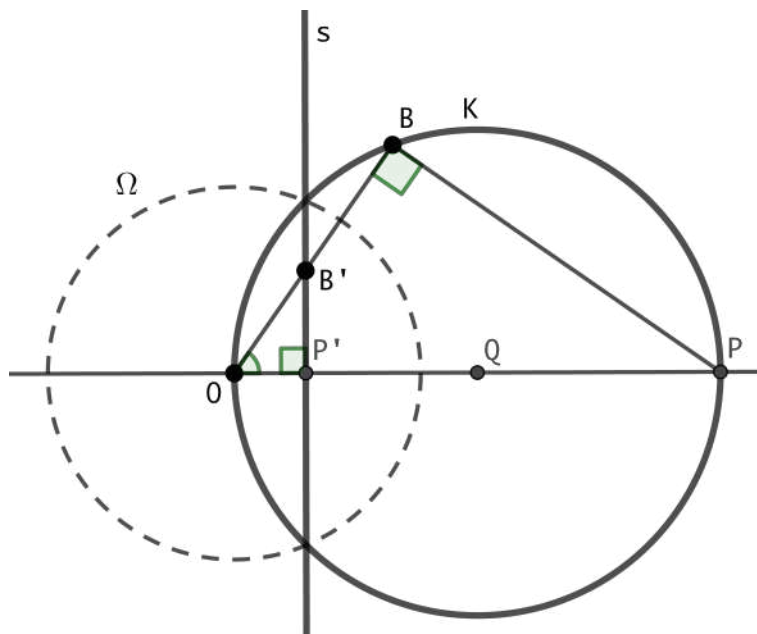


Figura 2.80: Inversão de circunferência que passa por O .

Como os triângulos $\Delta OP'B'$ e ΔOBP são semelhantes, temos que

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

O que nos mostra que $B' = \text{inv}(B)$. Logo $s = \text{inv}K$ ■

Observação 2.9.1. *Considerando Ω a circunferência de inversão, mostra-se que a inversa de uma circunferência que não passa por O é uma circunferência que, também, não passa por O .*

Lema 2.9.1. *Se dois pontos P e P' pertencem, respectivamente, às circunferências inversas C e C' , então as tangentes a essas curvas em P e P' formam ângulos iguais com a reta $\overleftrightarrow{PP'}$.*

Demonstração: Sejam P e B pontos pertencentes a C e seus respectivos inversos P' e B' .

Como

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \Rightarrow \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OP'}}$$

temos, que os triângulos ΔBOP e $\Delta B'OP'$ são semelhantes, logo $m(\widehat{OB'P'}) = m(\widehat{OPB})$ e $m(\widehat{B'P'O}) = m(\widehat{OBP})$. Temos que $m(\widehat{OPB}) + m(\widehat{B'P'O}) = 180^\circ$, assim

$$m(\widehat{OB'P'}) + m(\widehat{B'P'O}) = 180^\circ$$

o que nos permite concluir que o quadrilátero $BPP'B'$ é inscritível

Note que quando B tende a P , B' tende a P' e, quando $B = P$, implica que $B' = P'$. A circunferência λ (que passa pelos vértices do quadrilátero) será, então, tangente às curvas C e C' em P e P' , respectivamente, e as retas s e s' serão tangentes a essa circunferência e às circunferências C e C' .

Sendo T a interseção das retas s e s' , temos que o triângulo $\Delta TPP'$ é isósceles, portanto, $m(\widehat{TP'P}) = m(\widehat{TP'P})$. ■

Teorema 2.9.9. *Se duas circunferências C_1 e C_2 formam um ângulo α em um ponto de interseção P , as suas inversas C'_1 e C'_2 , na mesma inversão, formarão um ângulo α em um ponto de interseção P' , inverso de P .*

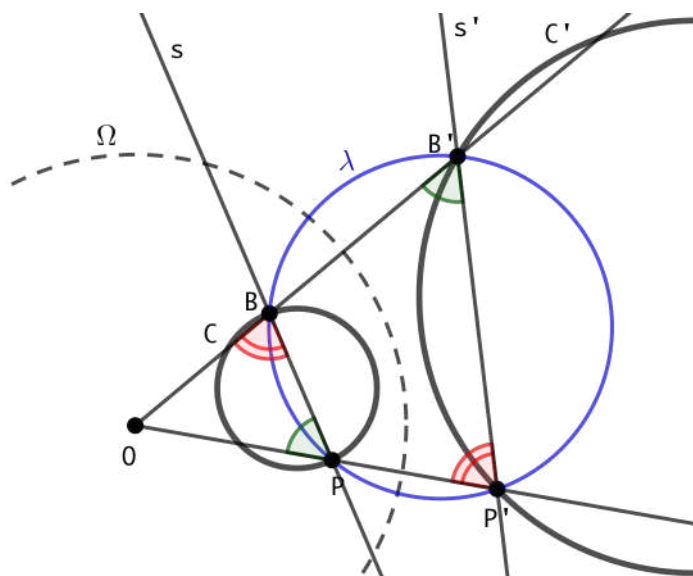


Figura 2.81: Circunferências C e C' inversas.

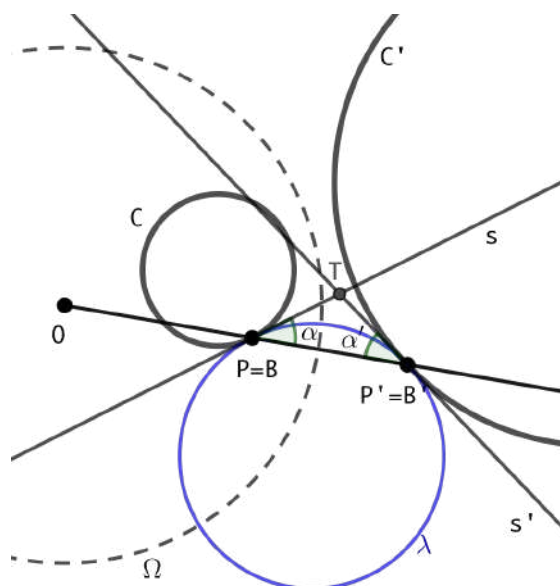


Figura 2.82: $\alpha = \alpha'$.

Demonstração: Considerando a Figura 2.83, temos pelo Lema 2.9.1 que os triângulos MPP' e NPP' são isósceles. Concluímos imediatamente que os ângulos α e α' são iguais. ■

Corolário 2.9.3. Considerando $\Omega = C(O, r)$ a circunferência de inversão. Seja s uma reta tangente a uma circunferência $K = (Q, k)$ num ponto P , então a inversa s' da reta s é tangente a K' , inversa da circunferência K , em P' .

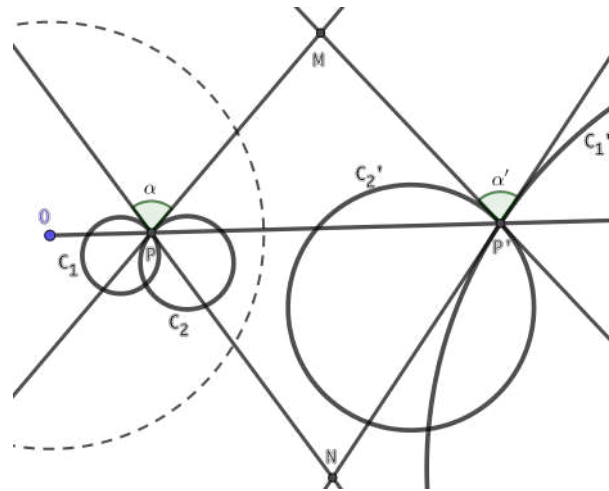


Figura 2.83: $\alpha = \alpha'$.

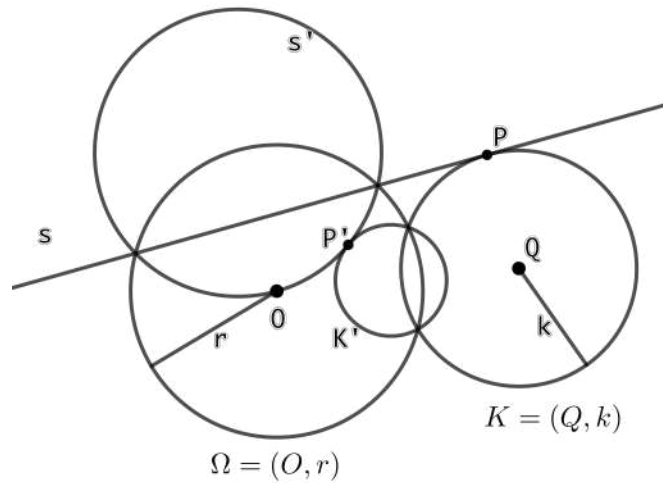


Figura 2.84: Inversão preserva tangência.

Lema 2.9.2. *Sejam M , N e P os pontos médios dos lados de um triângulo ABC , seja Ω a sua Circunferência dos nove pontos, s uma reta tangente as circunferências inscrita e ex-inscrita a este triângulo e r uma reta tangente a Ω por M . Então r é paralela a s .*

Demonstração: Temos:

- $m(\widehat{LMP}) = m(\widehat{MNP})$, pois são ângulos de segmentos e inscritos referente a mesma corda PM .
- $m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{PBM})$, pois $PBMN$ é um paralelogramo (observemos que MN é base média relativa a AB , do ΔABC).

- AK é bissetriz dos ângulos $C\hat{A}C'$ e $C\hat{K}C'$.

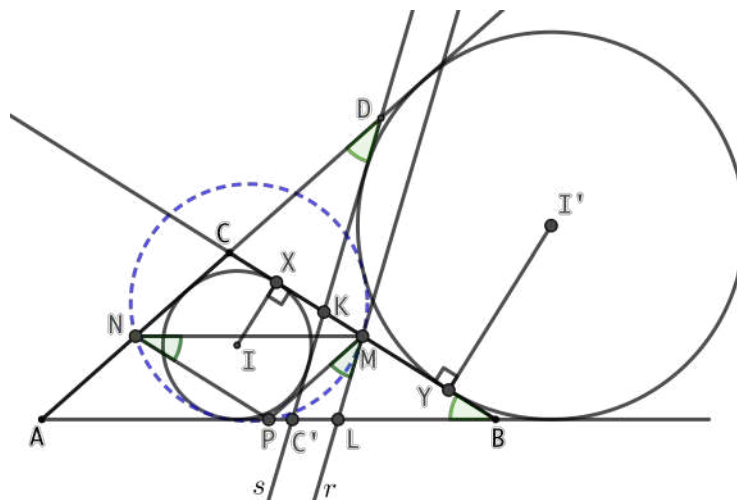


Figura 2.85: $r \parallel s$.

Logo, pelo caso ALA , os triângulos ACK e $AC'K$ são congruentes, o que implica que $m(\hat{A}CK) = m(\hat{A}C'K)$ e $AC = AC'$. Daí, os triângulos $AC'D$ e ACB são congruentes (caso ALA). Portanto $m(\hat{A}BC) = m(\hat{A}DC')$.

Considerando as afirmações acima, r e s fazem os mesmos ângulos com a retas paralelas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{PM} , o que mostra que são paralelas. ■

Lema 2.9.3. *Sejam F , E e X os pontos onde a circunferência inscrita ao triângulo ABC tangencia os lados AC , AB e BC , respectivamente. Seja ainda Y , G e J os pontos onde a circunferência ex-inscrita a BC tangencia tal lado e os prolongamentos de AC e AB , respectivamente. Seja M o ponto médio do lado BC , então M é ponto médio do segmento XY . (veja figura 2.86)*

Demonstração: Sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ e p o semiperímetro de ABC .

Denotando $\overline{AE} = \overline{AF} = x$, $\overline{CX} = \overline{CF} = y$ e $\overline{BX} = \overline{BE} = z$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y = b \\ y + z = a \\ x + z = c \end{cases}$$

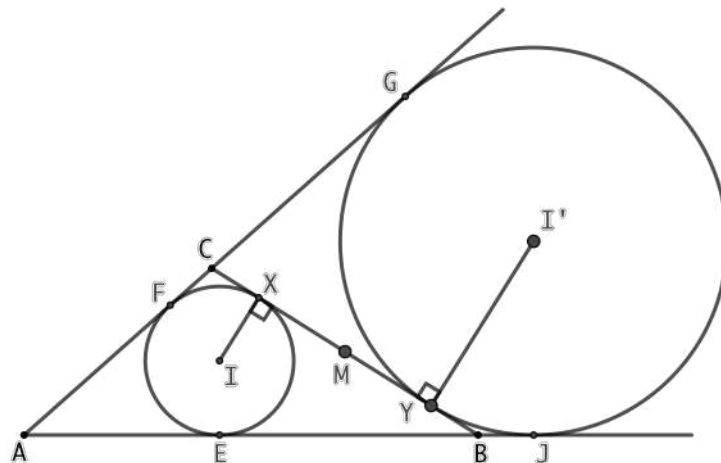


Figura 2.86: M ponto médio de XY .

Somando essas igualdades temos que $x + y + z = p$. Daí

$$\overline{CX} = \overline{CF} = y = p - (x + z) \Rightarrow \overline{CX} = p - c \quad (2.16)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \overline{AJ} &= \overline{AG} \\ 2\overline{AJ} &= \overline{AJ} + \overline{AG} \\ &= \overline{AB} + \overline{BJ} + \overline{AC} + \overline{CG} \\ &= c + b + (\overline{BJ} + \overline{CG}) \\ &= c + b + (\overline{BY} + \overline{CY}) \\ &= a + b + c = 2p \end{aligned}$$

de modo que $\overline{AJ} = \overline{AG} = p$.

Como $\overline{BJ} = \overline{BY} = \overline{AJ} - \overline{AB}$. Concluimos que

$$\overline{BY} = p - c \quad (2.17)$$

De (2.16) e (2.17) vem que $\overline{BY} = \overline{CX}$. Como, por hipótese, M é ponto médio de BC , então M também é ponto médio do segmento XY .

■

Lema 2.9.4. *Sendo os pontos I e I' conjugados harmônicos referentes ao segmento AK , onde K é o ponto de interseção das retas tangentes às circunferências de centros I e I' .*

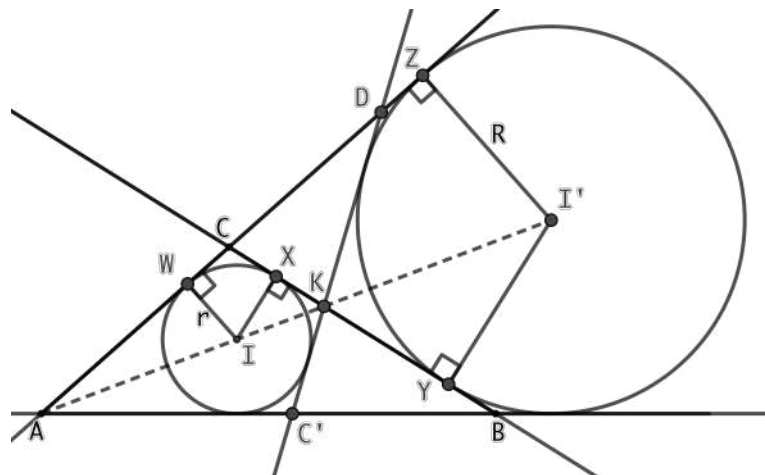


Figura 2.87: I e I' são conjugados harmônicos de AK .

Demonstração: Temos as seguintes semelhanças

$$\triangle AWI \sim \triangle AZI' \Rightarrow \frac{\overline{IA}}{\overline{I'A}} = \frac{r}{R} \quad (2.18)$$

$$\triangle IXK \sim \triangle I'YK \Rightarrow \frac{\overline{IK}}{\overline{I'K}} = \frac{r}{R} \quad (2.19)$$

De (2.18) e (2.19), temos

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{I'A}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{I'K}}$$

de onde concluímos que os pontos I e I' são conjugados harmônicos do segmento AK . ■

Lema 2.9.5. Os pontos X e Y , projeções ortogonais de I e I' , respectivamente, sobre a reta $\overleftrightarrow{BC'}$, são conjugados harmônicos em relação ao segmento cujas extremidades são as projeções ortogonais dos pontos A e K sobre a reta $\overleftrightarrow{BC'}$.

Demonstração: Temos as seguintes semelhanças

$$\triangle AKD \sim \triangle IKX \Rightarrow \frac{\overline{IA}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{XD}}{\overline{XK}} \quad (2.20)$$

$$\triangle AKD \sim \triangle IYK \Rightarrow \frac{\overline{AK}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{I'K}}{\overline{YK}} = \frac{\overline{AK} + \overline{I'K}}{\overline{DK} + \overline{KY}} \Rightarrow \frac{\overline{I'K}}{\overline{YK}} = \frac{\overline{I'A}}{\overline{DY}} \quad (2.21)$$

Do lema 2.9.4 e de (2.20) e (2.21) temos

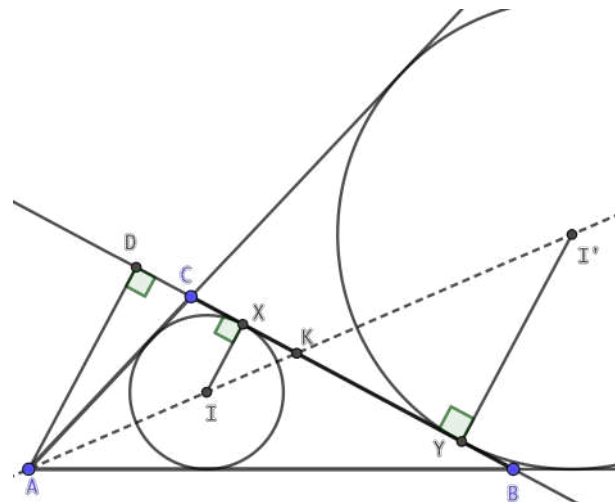


Figura 2.88: Lema 2.9.5

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{I'A}}{\overline{I'K}}$$

■

Teorema 2.9.10. (Teorema de Feuerbach) *Sejam um triângulo ΔABC e Ω sua circunferência dos nove pontos. Então Ω é tangente à circunferência inscrita e às três circunferências ex-inscrita ao triângulo ΔABC .*

Demonstração: Do Lema 2.9.4, temos que os pontos I e I' , são conjugados harmônicos referente ao segmentos AK . Segue, pelo Lema 2.9.5, que os pontos X e Y são, também, conjugados harmônicos em relação ao segmentos KH_1 .

Consideremos, agora, uma circunferência $S = (M, \overline{MX})$, de centro M e que passa por X , conforme Figura 2.90. Pelo Lema 2.86, S também passa pelo ponto Y . Como a reta \overleftrightarrow{BC} é tangente as circunferências inscrita e ex-inscrita em X e Y , respectivamente, e o diâmetro de S está sobre \overleftrightarrow{BC} . Temos que estas circunferências são ortogonais a S , donde concluímos, pelo Corolário 2.9.1, que estas circunferências permanecem invariantes em relação S . O mesmo acontece com o segmento BC , pois este segmento passa pelo centro de inversão.

Sendo Ω a Circunferência dos nove pontos do triângulo ABC . Como Ω passa pelo centro de inversão, pois passa por M , pelo Teorema 2.9.8, sua inversa é uma reta s' que passa pelo ponto K , pois $K = Inv(H_1)$, conforme Teorema 2.9.5.

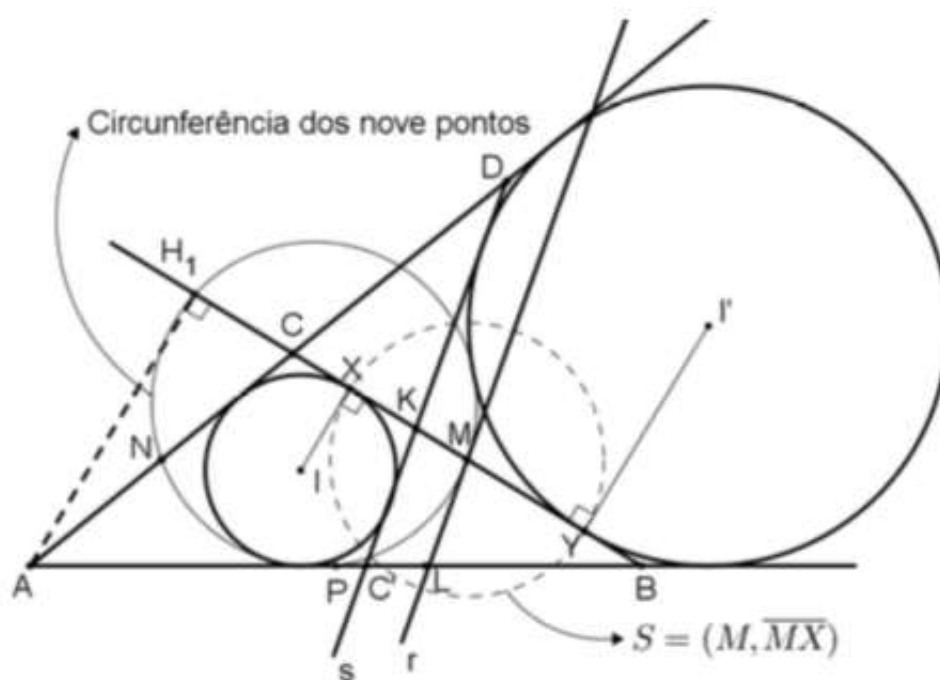


Figura 2.89: Reta s é a inversa da Circunferência dos nove pontos.

Por outro lado, s' é paralela à tangente a Ω no ponto M (ver Corolário 2.9.2). O Lema 2.9.2 nos mostra que s' coincide com s , ou seja, s' é tangente a circunferência inscrita e ex-inscrita. Logo pelo Corolário 2.9.3, Ω é tangente as circunferências inscrita e ex-inscritas.

De modo análogo, mostra-se que Ω é tangente as outras duas circunferências ex-inscritas. ■

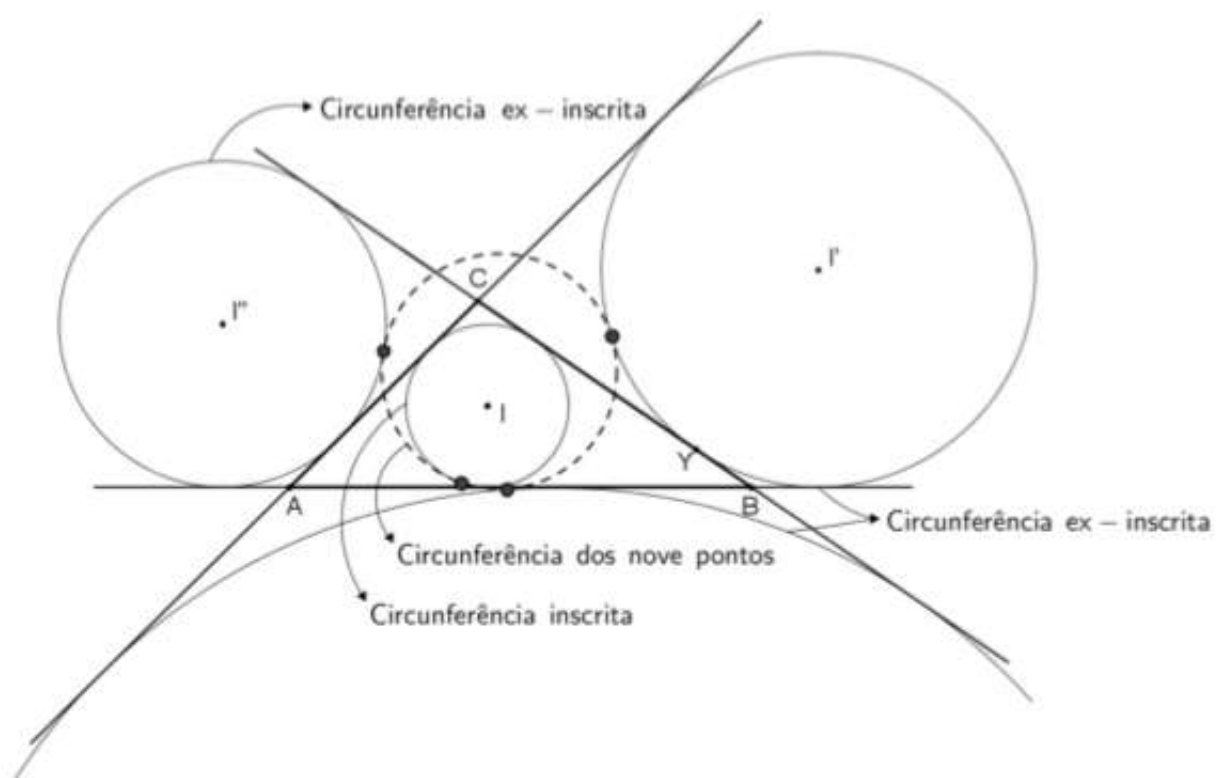


Figura 2.90: Teorema de Feuerbach.

PROBLEMAS OLÍMPICOS

Problema 3.1. (OBM-1993) No quadrilátero convexo $ABCD$ são dados os ângulos $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$, $m(\widehat{CAD}) = 20^\circ$, $m(\widehat{ABD}) = 50^\circ$ e $m(\widehat{DBC}) = 30^\circ$. Sendo P o ponto de interseção das diagonais AC e BD , provar que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

Solução:

Observe que o triângulo $\triangle ABD$ é isósceles de base AB , pois $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABD}) = 50^\circ$.

Construa a circunferência de centro D e raio $\overline{AD} = \overline{BD}$. O prolongamento de AC encontra a circunferência em E . Como o ângulo \widehat{BAE} está inscrito na circunferência de centro D , temos $\widehat{BDE} = 2 \cdot \widehat{BAE} = 60^\circ$. Logo o triângulo $\triangle BED$ é equilátero.

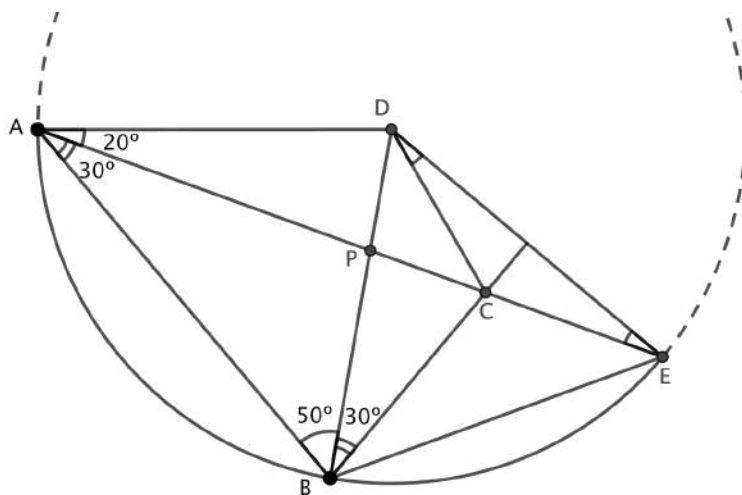


Figura 3.1: solução problema 3.1

Segue que $m(\widehat{E\hat{B}C}) = 60^\circ - m(\widehat{C\hat{B}D}) = 30^\circ$. Assim a reta BC é mediatriz do segmento DE , donde $\overline{CE} = \overline{CD}$.

Mas o $\triangle ADE$ é isósceles e deste modo, $m(\widehat{D\hat{E}A}) = m(\widehat{E\hat{A}D}) = 20^\circ$.

Segue que $m(\widehat{C\hat{D}E}) = 20^\circ$, $m(\widehat{P\hat{D}C}) = 60^\circ - m(\widehat{C\hat{D}E}) = 40^\circ$ e $m(\widehat{P\hat{C}D}) = m(\widehat{C\hat{E}D}) + m(\widehat{C\hat{D}E}) = 40^\circ$. Logo o triângulo $\triangle PCD$ é isósceles de base CD e portanto, $\overline{PC} = \overline{PD}$. ■

Problema 3.2. (OBM-1994) Calcule a área do triângulo $\triangle ABC$ abaixo, dados $\overline{BD} = 4$, $\overline{DE} = 2$, $\overline{EC} = 6$, $\overline{BF} = \overline{FC} = 3$.

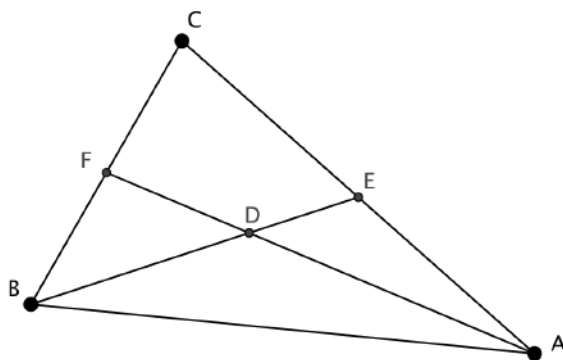


Figura 3.2: problema 3.2

Solução:

Como $\overline{BD} = 2\overline{DE}$ e D é um ponto da mediana \overline{AF} , então D é baricentro do triângulo $\triangle ABC$ e conseqüentemente E é ponto médio do lado CA . Além disso, os triângulos $\triangle BCE$ e $\triangle ABE$ têm mesma altura e mesma base, ou seja, mesma área.

Como o triângulo $\triangle BCE$ é equilátero de lado 6, então $\triangle BCE$ tem área $9\sqrt{3}$ e o triângulo $\triangle ABC$ tem área $18\sqrt{3}$.

Problema 3.3. (OBM-1993). Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC , M é o ponto médio de BC , e O é a intersecção entre as diagonais AC e BD . Mostre que O é o baricentro do $\triangle AMN$ se, e somente se, $ABCD$ é um paralelogramo.

Solução:

Inicialmente observemos o seguinte fato: se num $\triangle BCD$ os pontos médios dos lados BC e DC são pontos M e N , então qualquer segmento CX , com $X \in BD$, é dividido em duas partes iguais pela base média MN .

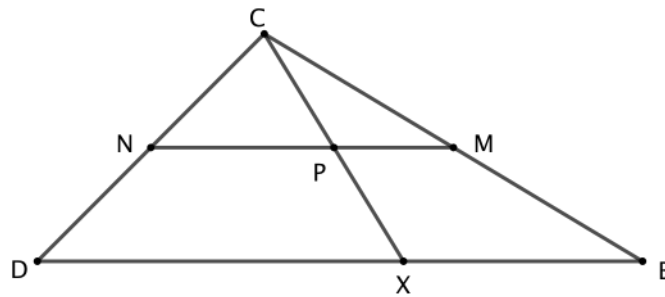


Figura 3.3: solução problema 3.3-1

De fato, se P é o ponto de interseção dos segmentos CX e MN , pelo paralelismo de MN e BD podemos escrever

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{ND}} = 1 \Rightarrow \overline{CP} = \overline{PX}.$$

Segue que NP e PM são bases médias dos triângulos $\triangle CDX$ e $\triangle CXB$ e podemos escrever $\overline{DX} = 2\overline{NP}$ e $\overline{XB} = 2\overline{PM}$.

Voltemos ao problema. Suponha inicialmente que O é o baricentro do $\triangle AMN$ e seja P o ponto de interseção de OC e MN .

Então $\overline{NP} = \overline{PM}$ e pelas afirmações anteriores temos $\overline{DO} = 2\overline{NP} = 2\overline{PM} = \overline{OB}$.

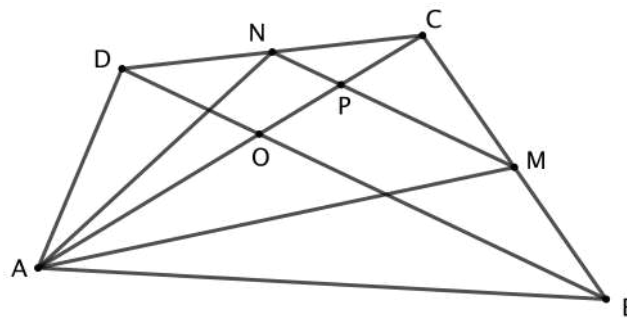


Figura 3.4: solução problema 3.3-2

Também, $\overline{CP} = \overline{OP}$ e $\overline{AO} = 2\overline{OP}$ (lembre-se que O é o baricentro do $\triangle AMN$). Portanto, $\overline{AO} = \overline{OC}$ e, como $\overline{DO} = \overline{BO}$, segue que $ABCD$ é um paralelogramo.

Suponha agora que $ABCD$ é um paralelogramo. Devemos provar que O é o baricentro do $\triangle AMN$.

Como O é o ponto médio da diagonal BD , temos $\overline{NP} = \frac{\overline{DO}}{2} = \frac{\overline{BO}}{2} = \overline{PM}$ e então AP é a mediana do $\triangle AMN$.

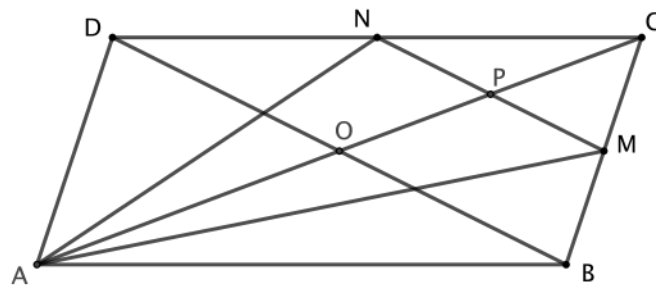


Figura 3.5: solução problema 3.3-3

Por outro lado, $\overline{CP} = \overline{OP}$ e, com $\overline{AO} = \overline{CO}$, segue que $\overline{AO} = 2\overline{OP}$.

Portanto, como O é um ponto sobre a mediana AP tal que $\overline{AO} = 2\overline{OP}$, concluímos que O é o baricentro do $\triangle AMN$. ■

Problema 3.4. (IMO 2005). Escolhemos seis pontos sobre os lados do triângulo equilátero $\triangle ABC$: A_1, A_2 sobre BC ; B_1, B_2 sobre AC ; C_1, C_2 sobre AB . Essa escolha é feita de modo que $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ é um hexágono convexo com todos os seus lados iguais. Prove que A_1B_2, B_1C_2 e C_1A_2 são concorrentes.

Solução:

Ao desenhar o hexágono, podemos pensar em recortá-lo! Se tirarmos o hexágono e rearranjarmos a figura, obtemos

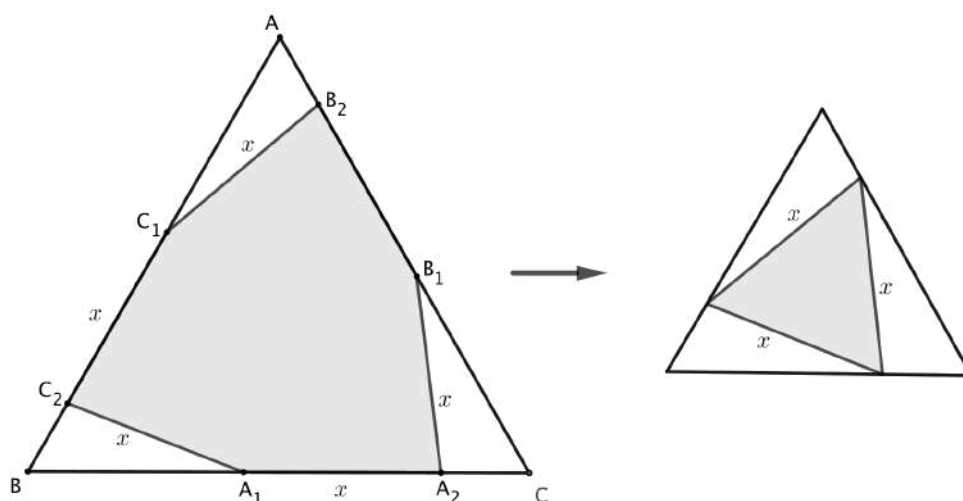


Figura 3.6: solução problema 3.4-1

Ou seja, obtemos um triângulo equilátero dentro do outro. Mas será que as peças se encaixam direitinho mesmo? Sim! É só deslizar cada um dos triângulos C_2A_1B e A_2B_1C ao longo de AB e AC , respectivamente. Cada lado “diminui” de x , então encaixam-se perfeitamente num triângulo equilátero.

Vamos calcular alguns ângulos. Considere o vértice P na figura abaixo e sejam α e β as medidas dos ângulos em torno desse vértice. Temos $\alpha + 60^\circ + \beta = 180^\circ$.

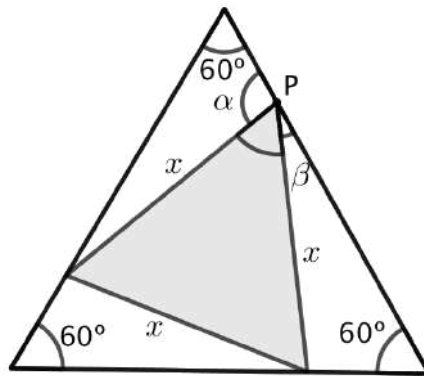


Figura 3.7: solução problema 3.4-2

Observando os dois triângulos brancos com P como um de seus vértices, nota-se que no triângulo superior estão marcados os ângulos internos de medidas α e 60° , ou seja, o outro ângulo mede β ; no triângulo da direita estão marcados os ângulos internos β e 60° , sendo que o outro ângulo mede α . Isso quer dizer que os triângulos brancos são todos congruentes!

Voltemos agora à figura original e recorte três triângulos do hexágono, ou melhor, trace três de suas diagonais (veja figura 3.8). Pela congruência entre os triângulos $\triangle AB_2C_1$, $\triangle BC_2A_1$ e $\triangle CA_2B_1$, os ângulos externos $\angle C_1B_2B_1$, $\angle B_1A_2A_1$ e $\angle A_1C_2C_1$ são congruentes. Deste modo, pelo caso *LAL* de congruência, os triângulos $\triangle C_1B_2B_1$, $\triangle B_1A_2A_1$ e $\triangle A_1C_2C_1$ são congruentes e, portanto, $\overline{B_1C_1} = \overline{A_1B_1} = \overline{C_1A_1}$, ou seja, o triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ é equilátero!

Para terminar, note que como $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1C_1}$ e $\overline{B_2B_1} = \overline{B_2C_1}$, a reta A_1B_2 é mediatriz de B_1C_1 . Analogamente, A_2C_1 é mediatriz de A_1B_1 e C_2B_1 é mediatriz de A_1C_1 . Como as mediatrizes de um triângulo são concorrentes, o resultado segue. ■

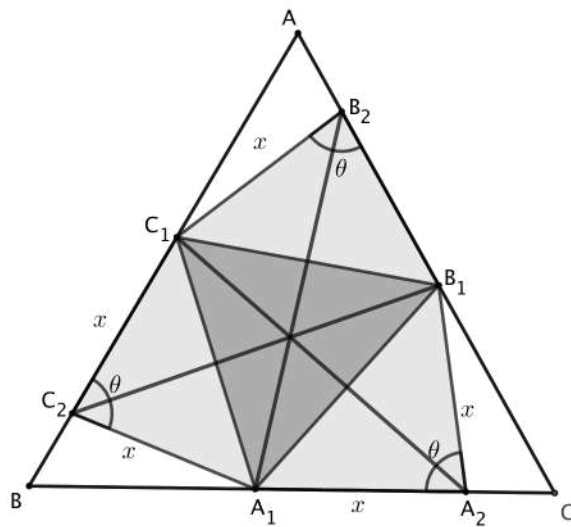


Figura 3.8: solução problema 3.4-3

Problema 3.5. (OBM-2005) O ponto D pertence ao lado BC do triângulo $\triangle ABC$. Sabendo que $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$, $\overline{BD} = 1$ e os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CAD$ são congruentes, então a medida do seguimento CD é:

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{6}$

Solução 1:

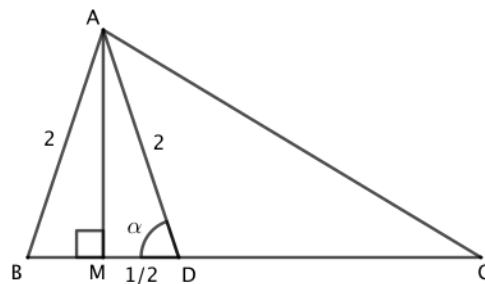


Figura 3.9: solução 1 problema 3.5

Como os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CAD$ são congruentes, o segmento AD é bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$ do triângulo $\triangle ABC$. Assim, pelo teorema da bissetriz interna,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \implies \frac{2}{1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \implies \overline{AC} = 2\overline{CD}$$

Sendo M ponto médio de BC , temos AM perpendicular a BD . Assim, no triângulo retângulo $\triangle AMD$, temos $\cos \alpha = \frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle ACD$, temos

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \\ \Leftrightarrow (2\overline{CD})^2 &= 2^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot 2 \cdot \overline{CD} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ \Leftrightarrow 3\overline{CD}^2 - \overline{CD} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{CD} &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Solução 2:

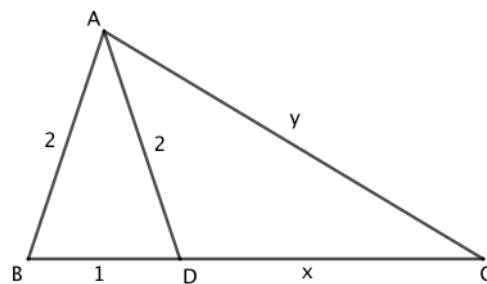


Figura 3.10: solução 2 problema 3.5

Pelo teorema da bissetriz interna:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = 2x$$

Pela expressão do comprimento da bissetriz interna:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BD} \cdot \overline{CD} \Rightarrow 4 = 2y - x \Rightarrow 4 = 4x - x \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Problema 3.6. (Rússia-2006) Os pontos E e F são dados no lado BC de um quadrilátero convexo $ABCD$ (com E mais perto que F de B). Sabe-se que $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{CDF})$ e $m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{FDE})$. Prove que $m(\widehat{FAC}) = m(\widehat{EDB})$.

Solução:

Perceba que o quadrilátero $Aefd$ é inscrito, pois $m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{FDE})$ (ver figura 3.11). Daí,

$$m(\widehat{AEF}) + m(\widehat{FDA}) = 180^\circ \quad (1)$$

Temos também que,

$$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{FDA}) + m(\widehat{CDF}) \quad (2)$$

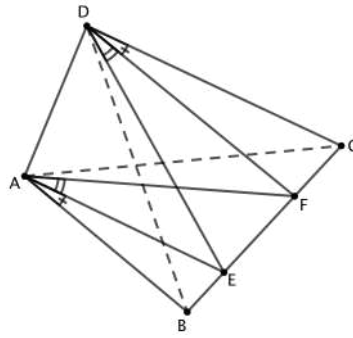


Figura 3.11: solução problema 3.6

e

$$m(\hat{A}BC) = m(\hat{A}EF) - m(\hat{B}AE) \quad (3)$$

Somando (1) e (2), obtemos

$$m(\hat{A}DC) + m(\hat{A}BC) = m(\hat{F}DA) + m(\hat{C}DF) + m(\hat{A}EF) - m(\hat{B}AE)$$

Como $m(\hat{B}AE) = m(\hat{C}DF)$, resulta

$$m(\hat{A}DC) + m(\hat{A}BC) = m(\hat{A}EF) + m(\hat{F}DA)$$

Substituindo (1) na igualdade acima, teremos

$$m(\hat{A}DC) + m(\hat{A}BC) = 180^\circ$$

O que permite concluirmos que o quadrilátero $ABCD$ também é inscritível, logo $m(\hat{B}AC) = m(\hat{B}DC)$ e como $m(\hat{B}AF) = m(\hat{E}DC)$, segue que

$$m(\hat{F}AC) = m(\hat{B}AC) - m(\hat{B}AF) = m(\hat{B}DC) - m(\hat{E}DC) = m(\hat{E}DB)$$

Portanto,

$$m(\hat{F}AC) = m(\hat{E}DB)$$

■

Problema 3.7. (Romênia-1992) Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo e T um ponto em seu interior, de modo que $m(\hat{A}TB) = m(\hat{B}TC) = m(\hat{C}TA)$. Sendo M, N e P as projeções de T sobre os lados BC, CA e AB , respectivamente. A circunferência circunscrita no triângulo $\triangle MNP$ intersecta os lados BC, CA e AB em M', N' e P' , respectivamente. Prove que o triângulo $\triangle M'N'P'$ é equilátero.

Solução:

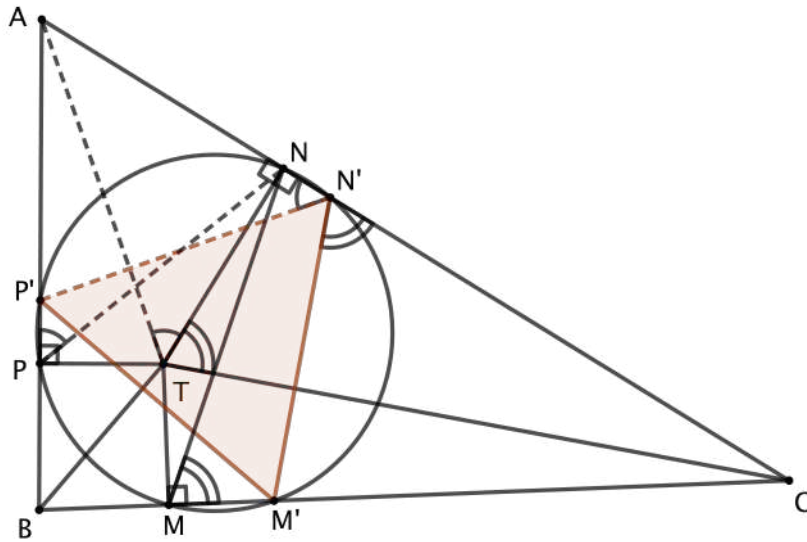


Figura 3.12: solução problema 3.7

Perceba que os quadriláteros $PN'NP'$ e $APT N$ são inscritíveis (veja figura 3.12), então $m(\widehat{AN'P'}) = m(\widehat{APN}) = m(\widehat{ATN})$. Similarmente, os quadriláteros $MM'N'N$ e $CNTM$ também são inscritíveis, então $m(\widehat{CN'M'}) = m(\widehat{CMN}) = m(\widehat{CTN})$. Daí, segue que $m(\widehat{AN'P'}) + m(\widehat{CN'M'}) = m(\widehat{ATN}) + m(\widehat{CTN}) = 120^\circ$. Como $m(\widehat{P'N'M'}) = 180^\circ - (m(\widehat{AN'P'}) + m(\widehat{CN'M'})) = 60^\circ$. Analogamente, $m(\widehat{N'M'P'}) = m(\widehat{N'P'M'}) = 60^\circ$. Portanto o triângulo $\triangle M'N'P'$ é equilátero. ■

Problema 3.8. (Estônia-2000) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo com $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$, AD e BE duas de suas alturas que se intersectam no ponto H . Mostre que o circuncentro do $\triangle ABC$ pertence a bissetriz de $\angle AHE$ e $\angle BHD$.

Solução:

Sejam F e P , respectivamente, o ponto médio de AC e o ponto de interseção dos prolongamentos de DF e BE .

Perceba que DF é mediana do triângulo retângulo $\triangle ADC$, logo $\overline{DF} = \overline{CF}$, daí o $\triangle DFC$ é equilátero, com isso temos que $m(\widehat{EFP}) = 60^\circ$ e conseqüentemente $m(\widehat{EPF}) = 30^\circ$. Como $\angle CDF$ é ângulo externo do $\triangle BPD$, então $m(\widehat{DBH}) = 30^\circ$, com isso temos que $\overline{BH} = 2\overline{DH}$. Perceba também que o $\triangle HDP$ é isosceles de base DP , assim $\overline{BH} = 2\overline{HP}$.

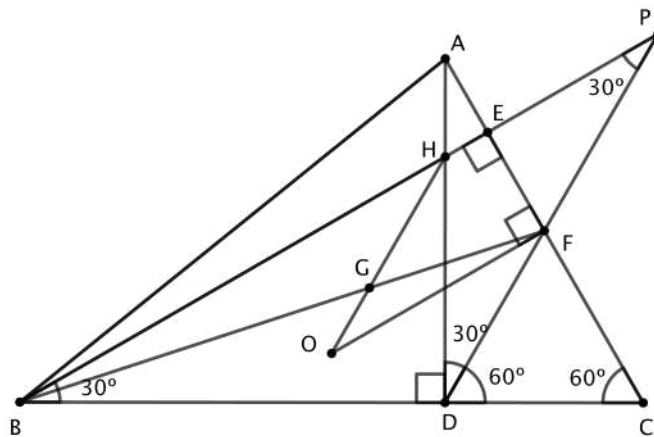


Figura 3.13: solução problema 3.8

Considere o baricentro G e o circuncentro O , o teorema de Euler (Reta de Euler) garante que $\overline{HG} = 2\overline{GO}$ e como os triângulos $\triangle BGH$ e $\triangle FGO$ são semelhantes, então $\overline{BH} = 2\overline{OF}$, com isso podemos concluir que $\overline{HP} = \overline{OF}$. Perceba que $HPFO$ é um paralelogramo, pois possui dois lados paralelos e iguais (HP e OF). Assim,

$$m(\widehat{BHO}) = m(\widehat{HPF}) = 30^\circ = \frac{m(\widehat{BHD})}{2}$$

Com isso provamos que O pertence a bissetriz de $\angle BHD$. ■

Problema 3.9. (*Olimpíada Matemática Rioplatense - OMR-1999*) Seja $\triangle ABC$ acutângulo cujo ortocentro é H , M é o ponto médio do segmento BC e N é o ponto de interseção de AM com a circunferência que passa por B, H e C . Demonstre que as retas HN e AM são perpendiculares.

Solução:

Considere a figura 3.14. Seja M' a interseção do prolongamento de AM com o circuncírculo do $\triangle BHC$. Como $m(\widehat{BHC}) = 180^\circ - A$, então $m(\widehat{BM'C}) = A$, uma vez que $BHCM'$ é inscritível.

Vamos olhar para o quadrilátero $ABM'C$: temos que $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $m(\widehat{BM'C}) = \hat{A} = m(\widehat{BAC})$. Com apenas essas duas características podemos concluir que o esse quadrilátero é um paralelogramo.

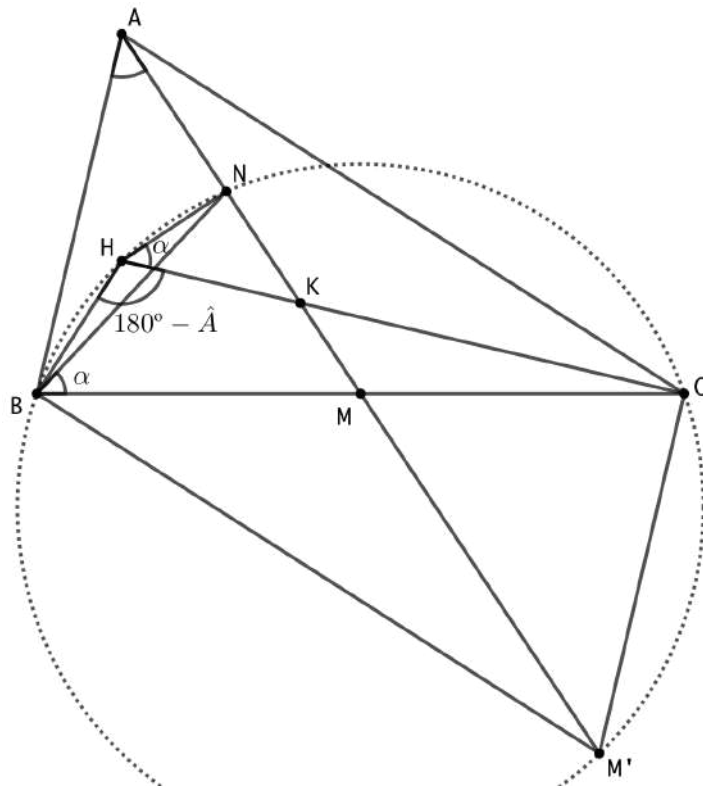


Figura 3.14: solução problema 3.9

Utilizando a potência de M e seja K a interseção de AM com CH , em relação ao circuncírculo do $\triangle BHC$, temos que

$$\overline{BM} \cdot \overline{MC} = \overline{NM} \cdot \overline{MM'} \therefore \overline{BM}^2 = \overline{NM} \cdot \overline{MA}$$

ou seja,

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{BM}}$$

então concluímos que $\triangle BMN \sim \triangle ABM$ pelo caso LAL . Com consequência da semelhança,

$$\widehat{NBM} = \widehat{BAM} = \alpha$$

Para finalizar, perceba que

$$m(\widehat{AKH}) = 90^\circ - \alpha, \text{ uma vez que } CH \perp AB.$$

$$m(\widehat{NHK}) = \widehat{NBC} = \alpha, \text{ uma vez que } BHNC \text{ é inscritível.}$$

Assim, $\widehat{AKH} + \widehat{NHK} = 90^\circ$ ou seja, $HN \perp AM$, conforme queríamos demonstrar. ■

Problema 3.10. (OPM-2012) De um ponto arbitrário no interior de um triângulo equilátero são traçados segmentos aos vértices e perpendiculares aos lados, dividindo o triângulo maior em seis regiões triangulares menores. Se as letras significam as áreas de cada região, demonstre que $A + C + E = B + D + F$.

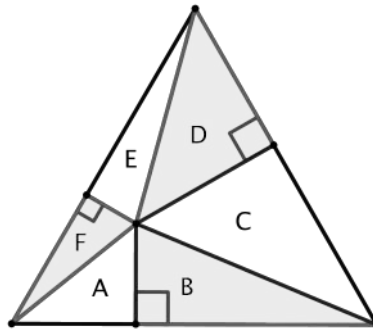


Figura 3.15: problema 3.10

Solução:

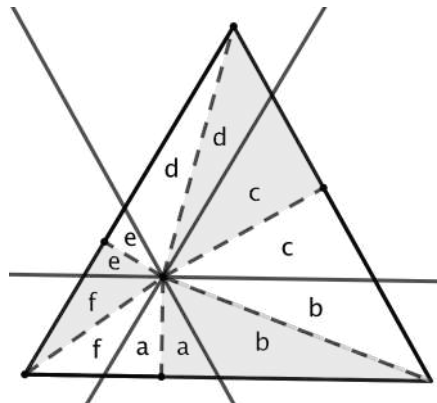


Figura 3.16: solução problema 3.10

Tracemos retas paralelas aos lados passando pelo ponto interior ao triângulo. Repare que as linhas cheias traçadas formam 3 triângulos equiláteros e 3 paralelogramos. Note agora que as linhas tracejadas dividem ao meio estas figuras, ou seja:

$$A = a + f, B = a + b, C = b + c, D = c + d, E = d + e, F = e + f$$

Portanto:

$$A + C + E = a + f + b + c + d + e = B + D + F.$$



Problema 3.11. (Hungria) S é um ponto no interior do $\triangle ABC$ tal que as áreas dos triângulos $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CAS$ são todas iguais. Prove que S é o baricentro de $\triangle ABC$.

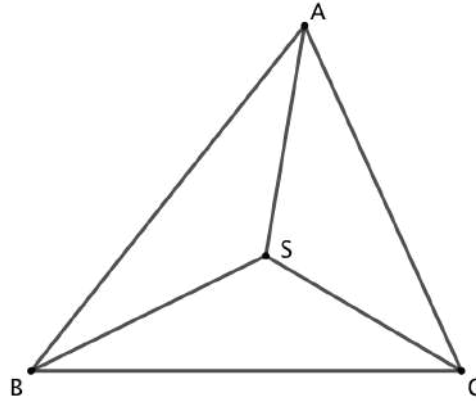


Figura 3.17: problema 3.11

Solução:

Inicialmente prolongue os segmentos AS , BS e CS até que atinja os lados BC , AC e AB nos pontos M , N e P , respectivamente, conforme ilustra a figura 3.18:

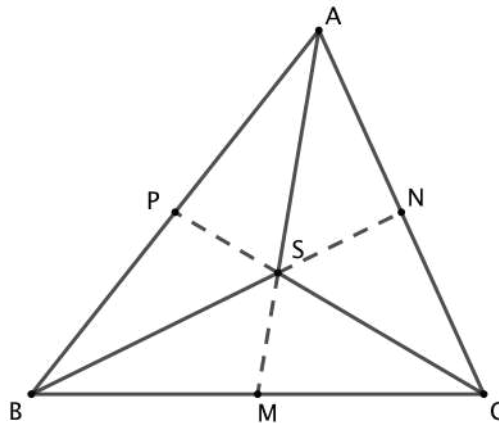


Figura 3.18: solução problema 3.11

Usando o fato de que para triângulos que tem a mesma altura a razão das suas áreas é igual a razão de suas bases, segue que:

Se $(ABS) = (ACS) = (BCS) = T$, temos:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{(ABM)}{(ACM)} = \frac{(SBM)}{(SCM)} = \frac{(ABM) - (SBM)}{(ACM) - (SCM)} = \frac{(ABS)}{(ACS)} = \frac{T}{T} = 1$$

O que nos permite concluir que M é o ponto médio do segmento BC . Analogamente, temos que N é ponto médio do segmento AC e P é ponto médio do segmento AB , segue que os segmentos AM , BN e CP são suas medianas e portanto o seu ponto de concorrência, o ponto S , é o baricentro do triângulo ABC .

■

Problema 3.12. (IMO-2008) *Seja ABC um triângulo acutângulo e seja H o seu ortocentro. A circunferência de centro no ponto médio de BC e que passa por H intersecta a reta BC nos pontos A_1 e A_2 . Analogamente, a circunferência de centro no ponto médio de CA e que passa por H intersecta a reta CA nos pontos B_1 e B_2 , e a circunferência de centro no ponto médio de AB e que passa por H intersecta a reta AB nos pontos C_1 e C_2 . Mostre que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ estão sobre uma mesma circunferência.*

Solução:

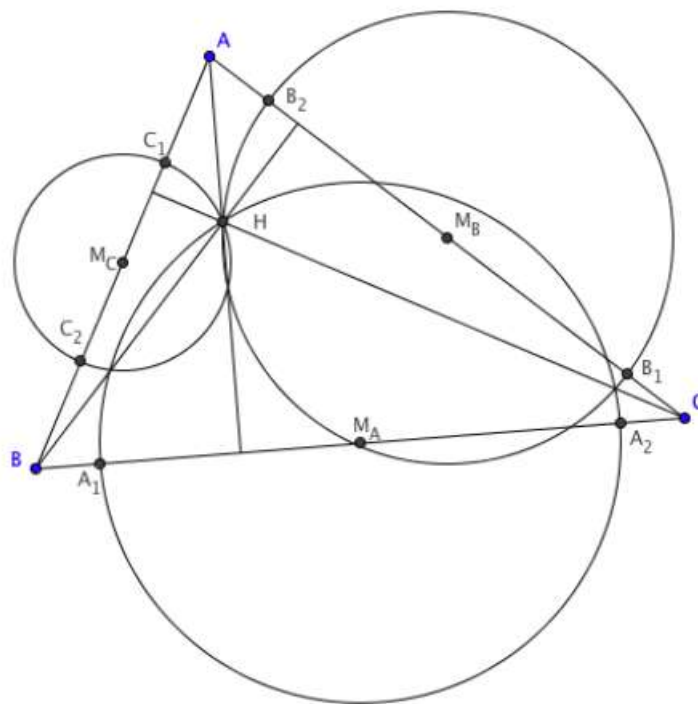


Figura 3.19: solução problema 3.12

Sejam M_A , M_B e M_C os pontos médios dos lados BC , AC e AB , respectivamente. Não é difícil observar que $M_B M_C \parallel BC$. Temos também que $AH \perp BC$, então $AH \perp M_B M_C$. Agora, note que o eixo radical de dois círculos é perpendicular à reta liga seus centros. Sabemos

que H está no eixo radical dos círculos centrados em M_B e M_C , então A também está. Então temos que:

$$Pot_{(M_C)}A = Pot_{(M_B)}A$$

$$\overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2} = \overline{AB_2} \cdot \overline{AB_1} \Rightarrow \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_1}}$$

Isto implica que $\triangle AB_2C_1 \sim \triangle AC_2B_1$, assim $\widehat{AB_2C_1} = \widehat{AC_2B_1}$. Assim sendo $C_1\widehat{B_2}B_1 = 180^\circ - \widehat{AB_2C_1} = 180^\circ - \widehat{AC_2B_1}$. Isso mostra que o quadrilátero $C_1C_2B_1B_2$ é inscrito, note que o centro de sua circunferência é a interseção das mediatrizes do segmentos C_1C_2 e B_1B_2 . Contudo, estas são as mediatrizes de AB e CA , que se encontram no circuncentro do $\triangle ABC$, assim o circuncentro do quadrilátero $C_1C_2B_1B_2$ é o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$. Analogamente, os circuncentros dos quadriláteros $A_1A_2B_1B_2$ e $C_1C_2A_1A_2$ coincidem com o circuncentro de $\triangle ABC$. Portanto, segue o resultado desejado. ■

Problema 3.13. (OBMEP - Banco de Questões 2017) A figura a seguir representa um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em C , com uma circunferência no seu interior tangenciando os três lados AB , BC e CA nos pontos C_1 , A_1 e B_1 , respectivamente. Seja H o pé da altura relativa ao lado A_1C_1 do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$.

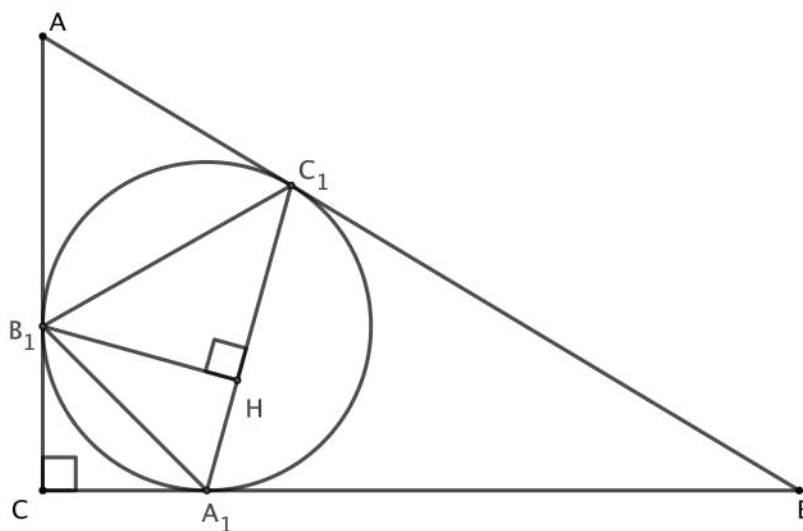


Figura 3.20: problema 3.13

a) Calcule a medida do ângulo $\angle A_1C_1B_1$.

b) Mostre que o ponto H está na bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

Solução:

Considere a figura a seguir.

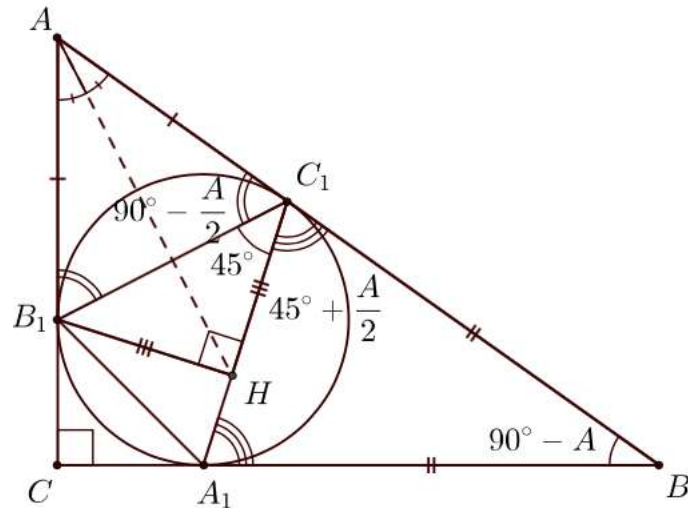


Figura 3.21: solução problema 3.13

(a) Como $m(\hat{A}CB) = 90^\circ$, então $m(\hat{C}BA) = 90^\circ - m(\hat{B}AC) = 90^\circ - \hat{A}$. Dado que AB_1 e AC_1 são tangentes à circunferência, segue que $\overline{AB_1} = \overline{AC_1}$. De modo semelhante, $\overline{BA_1} = \overline{BC_1}$. Assim, como $\triangle A_1BC_1$ e $\triangle AB_1C_1$ são isósceles, segue que

$$m(\hat{A}B_1C_1) = m(\hat{A}C_1B_1) = \frac{180^\circ - m(\hat{B}_1\hat{A}C_1)}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2};$$

$$m(\hat{B}C_1A_1) = m(\hat{B}A_1C_1) = \frac{180^\circ - m(\hat{A}_1\hat{B}C_1)}{2} = 45^\circ + \frac{\hat{A}}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} m(\hat{A}_1\hat{C}_1B_1) &= 180^\circ - m(\hat{A}C_1B_1) - m(\hat{A}_1\hat{C}_1B) \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}) - (45^\circ + \frac{\hat{A}}{2}) \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

(b) Analisando agora o triângulo $\triangle B_1HC_1$, podemos obter $m(\hat{H}B_1C_1) = 90^\circ - m(\hat{A}_1\hat{C}_1B_1) = 45^\circ$, ou seja, esse triângulo é isósceles com $\overline{B_1H} = \overline{C_1H}$. Assim, os triângulos $\triangle AB_1H$ e $\triangle AC_1H$ são congruentes, pois possuem os três lados de mesmo comprimento. Consequentemente, $m(\hat{B}_1\hat{A}H) = m(\hat{C}_1\hat{A}H)$ e H está sobre a bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

Problema 3.14. (Olimpíada de Moscow-72) Em um triângulo $\triangle ABC$, AD e BE são medianas de BC e AC , respectivamente. Se $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CBE}) = 30^\circ$, prove que $\triangle ABC$ é equilátero.

Solução:

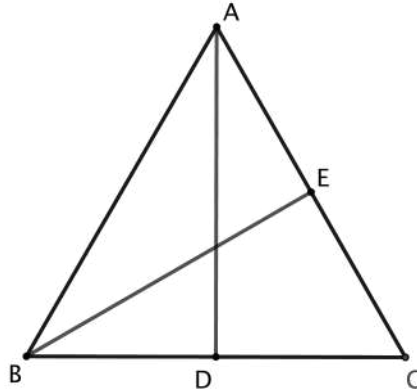


Figura 3.22: solução problema 3.14

Observe que $\triangle ADC$ e $\triangle CBE$ são semelhantes pelo caso *AA* de semelhança de triângulos, assim

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{EC}} = \frac{2\overline{DC}}{2\overline{EC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow 2\overline{EC} = \overline{BC}$$

Aplicando a Lei dos Senos em $\triangle BEC$:

$$\frac{\overline{EC}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\widehat{BEC})} \Rightarrow \frac{\overline{EC}}{1/2} = \frac{2\overline{EC}}{\sin(\widehat{BEC})} \Rightarrow \sin(\widehat{BEC}) = 1 \Rightarrow m(\widehat{BEC}) = 90^\circ$$

Assim, $\widehat{C} = 60^\circ$ e como $\overline{AC} = \overline{BC}$ segue que $\triangle ABC$ é equilátero. ■

Problema 3.15. (OBM-2008) Dado o quadrilátero $ABCD$ tal que $m(\widehat{CAD}) = 25^\circ$, $m(\widehat{ACD}) = 45^\circ$ e $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 20^\circ$, qual o valor do ângulo $\angle DBC$?

- A) 40° B) 45° C) 50° D) 55° E) 60°

Solução: (Alternativa C)

Temos $\overline{AB} = \overline{BC}$ e o ângulo exterior $\angle ABC$ tem medida igual a $2 \cdot m(\widehat{ADC})$. Isso implica que o ponto B é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ADC$. Dessa forma,

$$m(\widehat{DBC}) = 2 \cdot m(\widehat{DAC}) = 50^\circ.$$

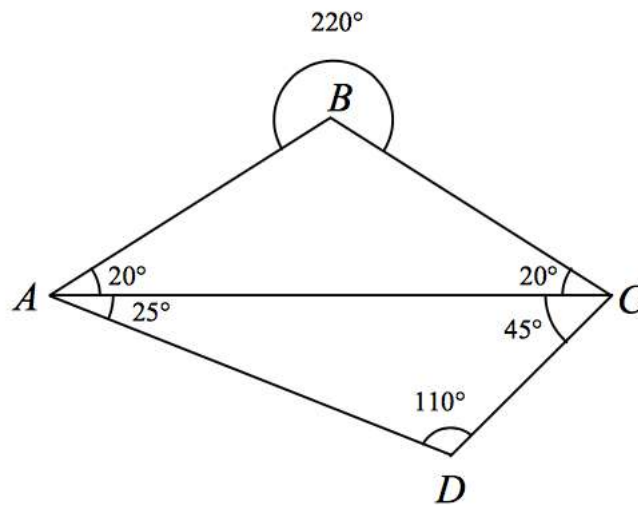


Figura 3.23: solução problema 3.15

Problema 3.16. (*África do Sul - 2000*) $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em C com D, E e F sendo os pontos médios dos lados indicados. Se $\overline{CD} = 2$ então $\overline{AE}^2 + \overline{BF}^2$ vale:

- A) 12 B) 5 C) 15 D) 20 E) 25

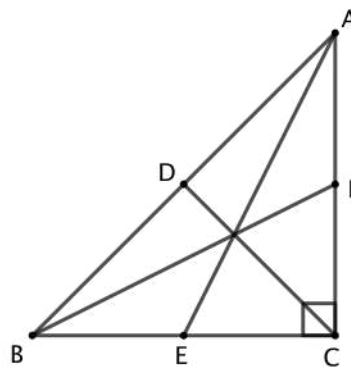


Figura 3.24: problema 3.16

Solução: (Alternativa D)

Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no $\triangle AEC$:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2 \Rightarrow \overline{AE}^2 = (2\overline{FC})^2 + \overline{EC}^2 = 4\overline{FC}^2 + \overline{EC}^2 \quad (1)$$

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, agora no $\triangle BFC$:

$$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{FC}^2 \Rightarrow \overline{BF}^2 = (2\overline{EC})^2 + \overline{FC}^2 = 4\overline{EC}^2 + \overline{FC}^2 \quad (2)$$

Somando membro a membro (1) e (2), temos:

$$\overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 = 4\overline{FC}^2 + \overline{EC}^2 + 4\overline{EC}^2 + \overline{FC}^2 = 5 \underbrace{(\overline{FC}^2 + \overline{EC}^2)}_{\overline{EF}^2} = 5 \cdot \overline{EF}^2$$

Agora perceba que CD é mediana do triângulo retângulo $\triangle ABC$, logo $\overline{CD} = \overline{BD}$, daí $\overline{AB} = 4$. Como E e F são pontos médios dos segmentos BC e AC , respectivamente, então EF é base média, o que permite concluirmos que $\overline{EF} = 2$. Portanto

$$\overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 = 5 \cdot 2^2 = 20$$

Problema 3.17. (Polônia) Seja $ABCD$ um quadrilátero côncavo, sendo o ângulo interno $D\hat{A}B$ maior que 180° e $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$. Seja P o simétrico de A em relação a BD . Prove que $P\hat{C}B = A\hat{C}D$.

Solução:

Usar o círculo de Apolônio aqui é razoável se reescrevermos a condição $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ como $\frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$. Além disso, sendo P o simétrico de A em relação a BD , os triângulos $\triangle BPD$ e $\triangle BAD$ são congruentes, logo $\frac{\overline{BP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$, ou seja, P , A e C pertencem a um mesmo círculo de Apolônio Γ de B e D .

Levando em conta ainda que queremos provar uma igualdade de ângulos e que o círculo de Apolônio é o lugar geométrico de vértices de bissetrizes, seja T o ponto de interseção de Γ e BD . Então CT é bissetriz de $\angle BCD$ e, conseqüentemente, $m(B\hat{C}T) = m(T\hat{C}D)$.

Observe na figura 3.25 que para chegarmos em $m(P\hat{C}B) = m(A\hat{C}D)$ basta provar que $m(P\hat{C}T) = m(T\hat{C}A)$. Mas isso é equivalente a $\overline{AT} = \overline{TP}$, o que decorre da simetria entre A e P em relação a BD .

■

Problema 3.18. (OBM-2006) Na triângulo $\triangle ABC$ isósceles (ver figura 3.26), I é o encontro das bissetrizes e H é o encontro das alturas. Sabe-se que $m(H\hat{A}I) = m(H\hat{B}C) = \alpha$. Determine o ângulo α .

Solução:

Ora, como o triângulo é isósceles segue que, $m(C\hat{B}M) = m(A\hat{B}M) = \alpha$ e $m(A\hat{C}B) = 90^\circ - \alpha$, com isso, $m(C\hat{A}F) = \alpha$, pois AF é uma altura. Como AI é bissetriz, então $m(C\hat{A}I) = m(I\hat{A}B) = 2\alpha$, como ilustra a figura 3.27.

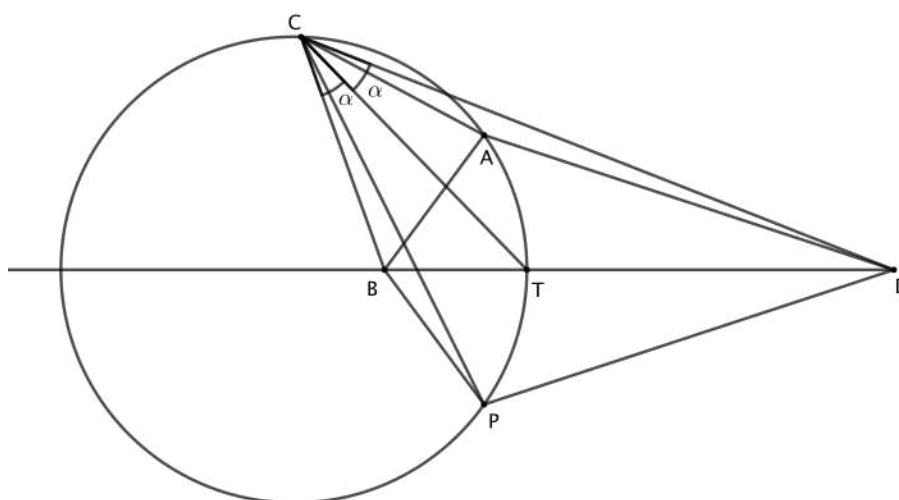


Figura 3.25: solução problema 3.17

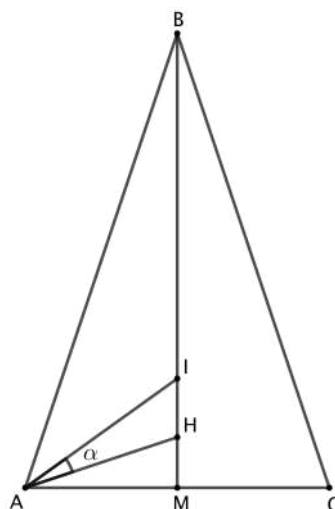


Figura 3.26: problema 3.18

Finalmente no $\triangle AMB$: $\alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 18^\circ$



Problema 3.19. (Iran-1998) Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Prolongando o lado BC a partir de C , e seja D um ponto na extensão, tal que $\overline{CD} = \overline{AC}$. Seja P a segunda interseção do circuncírculo de $\triangle ACD$ com o círculo de diâmetro BC . Sendo que BP e AC encontram-se em E e que CP e AB encontram-se em F . Prove que D, E, F são colineares.

Solução:

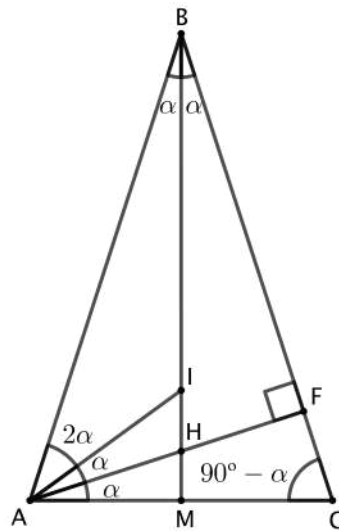


Figura 3.27: solução problema 3.18

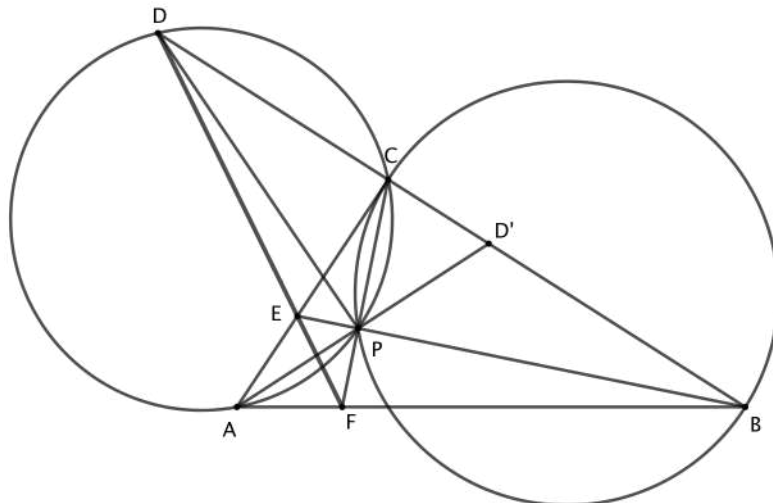


Figura 3.28: solução problema 3.19

Sendo que AP encontra BC em D' . Pelo Teorema de Ceva, temos

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

e assim pelo Teorema de Menelaus, é suficiente mostrar que

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}$$

para concluirmos que D, E, F são colineares.

Desde que $\overline{AC} = \overline{CD}$, temos $m(\widehat{DPA}) = 180^\circ - 2 \cdot m(\widehat{DPC})$ e assim $m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{CPD'})$, o que quer dizer que PC é bissetriz interna de $\angle DPD'$. Desde que $PB \perp PC$,

PB é bissetriz externa de $\angle DPD'$. Dos teoremas das bissetrizes (interna e externa),

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{D'B}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{D'P}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{D'C}} \Rightarrow \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}$$

como desejado. ■

Problema 3.20. (Hungria-1997) Seja a, b, c os lados, m_a, m_b, m_c os comprimentos das alturas, e d_a, d_b, d_c as distâncias dos vértices ao ortocentro em um triângulo acutângulo $\triangle ABC$. Prove que

$$m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Solução:

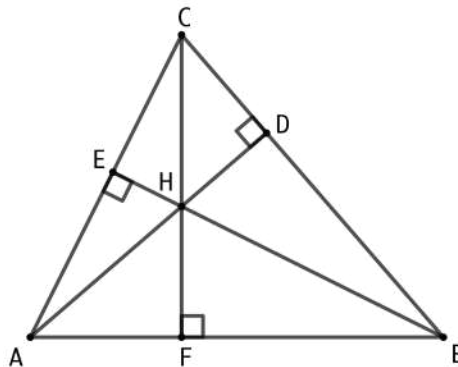


Figura 3.29: solução problema 3.20

Sejam D, E, F os pés das alturas de A, B, C respectivamente, e H o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$. Então o $\triangle ACD$ é semelhante ao $\triangle AHE$, assim

$$\frac{m_a}{\overline{AE}} = \frac{b}{d_a} \Rightarrow m_a d_a = \overline{AE} \cdot b$$

por outro lado, o $\triangle ABD$ é semelhante ao $\triangle AHF$, assim

$$\frac{m_a}{\overline{AF}} = \frac{c}{d_a} \Rightarrow m_a d_a = \overline{AF} \cdot c$$

Dessa forma

$$m_a d_a = \frac{\overline{AE} \cdot b + \overline{AF} \cdot c}{2} \quad (1)$$

Analogamente,

$$m_b d_b = \frac{\overline{BF} \cdot c + \overline{BD} \cdot a}{2} \quad (2)$$

e

$$m_c d_c = \frac{\overline{CD} \cdot a + \overline{CE} \cdot b}{2} \quad (3)$$

Portanto, somando (1), (2) e (3) temos

$$\begin{aligned} m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c &= \frac{1}{2}(\overline{AE} \cdot b + \overline{AF} \cdot c + \overline{BF} \cdot c + \overline{BD} \cdot a + \overline{CD} \cdot a + \overline{CE} \cdot b) \\ &= \frac{1}{2}[(\overline{BD} + \overline{CD}) \cdot a + (\overline{CE} + \overline{AE}) \cdot b + (\overline{AF} + \overline{BF}) \cdot c] \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \end{aligned}$$

■

Problema 3.21. (Austrália-1993) Em um triângulo acutângulo $\triangle ABC$, sejam D , E e F os pés das alturas tiradas desde A , B e C , respectivamente, e H o ortocentro. Prove que

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = 2$$

Solução:

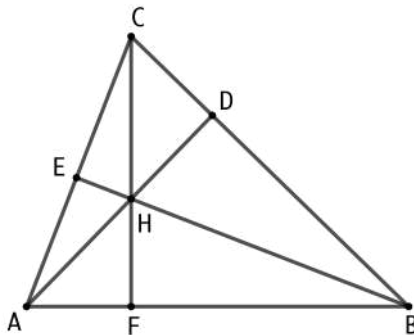


Figura 3.30: solução problema 3.21

$$S_{\triangle AHB} + S_{\triangle BHC} + S_{\triangle CHA} = S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AHB}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle BHC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle CHA}}{S_{\triangle ABC}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\overline{AB} \cdot \overline{HF}}{2}}{\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CF}}{2}} + \frac{\frac{\overline{BC} \cdot \overline{HD}}{2}}{\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2}} + \frac{\frac{\overline{AC} \cdot \overline{HE}}{2}}{\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BE}}{2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{CF} - \overline{CH}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{AD} - \overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BE} - \overline{BH}}{\overline{BE}} = 1 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + 1 - \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + 1 - \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = 2$$

■

Problema 3.22. (Colorado-1990) Dado um triângulo arbitrário $\triangle ABC$, os pontos M e N são seleccionados dentro do triângulo, de modo que $m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{NAB})$ e $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MCN}) = m(\widehat{NCB})$ (em outras palavra, os ângulos A e C do triângulo estão trisectados). Prove que MN é a bissetriz do ângulo $\angle ANC$.

Solução:

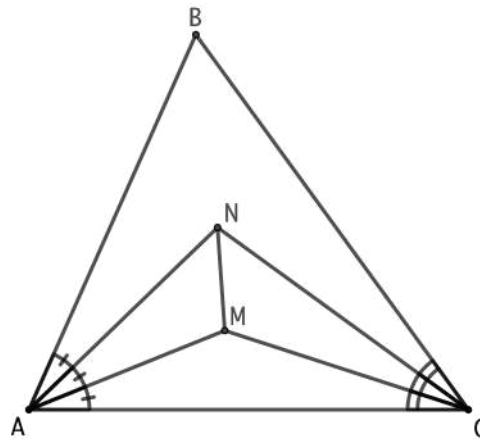


Figura 3.31: solução problema 3.22

Uma vez que as três bissetrizes do $\triangle ANC$ se intersectam um ponto, M deve ser esse ponto, portanto NM é a bissetriz do ângulo $\angle ANC$.

■

Problema 3.23. (IMO-2006) Seja $\triangle ABC$ um triângulo com incentro I . Um ponto P no interior do triângulo satisfaz

$$m(\widehat{PBA}) + m(\widehat{PCA}) = m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB}).$$

Mostre que $AP \geq AI$, mantendo-se a igualdade se, e somente se, $P = I$.

Solução:

Seja $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$. Desde que $m(\widehat{PBA}) + m(\widehat{PCA}) + m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB}) = \beta + \gamma$, da condição dada no problema, é equivalente a $m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB}) = \frac{(\beta + \gamma)}{2}$,

também temos que $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow m(\widehat{PCB}) + m(\widehat{PCB}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ e como $m(\widehat{BPC}) = 180^\circ - (m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB})) \Rightarrow m(\widehat{BPC}) = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow m(\widehat{BPC}) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

Por outro lado $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{(\beta + \gamma)}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Consequentemente $m(\widehat{BPC}) = m(\widehat{BIC})$, logo o quadrilátero $BPIC$ é inscritível. Em outras palavras P está no circuncírculo ω do triângulo $\triangle BCI$.

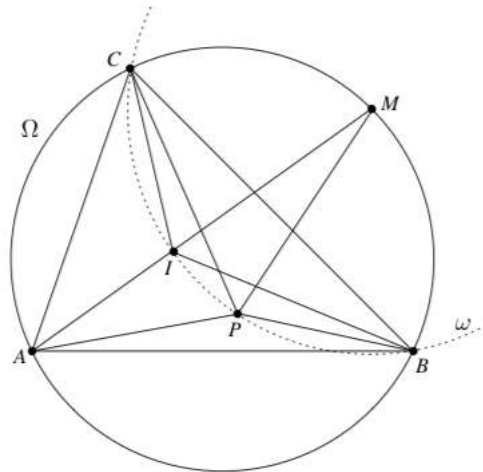


Figura 3.32: solução problema 3.23

Seja Ω o circuncírculo do triângulo $\triangle ABC$. é um fato bem conhecido que o centro de ω é o ponto médio M do arco BC de Ω . Este também é o ponto da bissetriz AI que intersecta ω .

Do triângulo $\triangle APM$, temos

$$\overline{AP} + \overline{PM} \geq \overline{AM} = \overline{AI} + \overline{IM} = \overline{AI} + \overline{PM}.$$

Portanto $\overline{AP} \geq \overline{AI}$. A igualdade se mantém se, e somente se, P estiver na reta do segmento AI , que ocorre se, e somente se, $P = I$.

■

Problema 3.24. (Irlanda-1997) *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo que está circunscrito a uma circunferência. Se $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$, $\hat{D} = 90^\circ$ e $\overline{BC} = 1$. Encontre o comprimento de AD .*

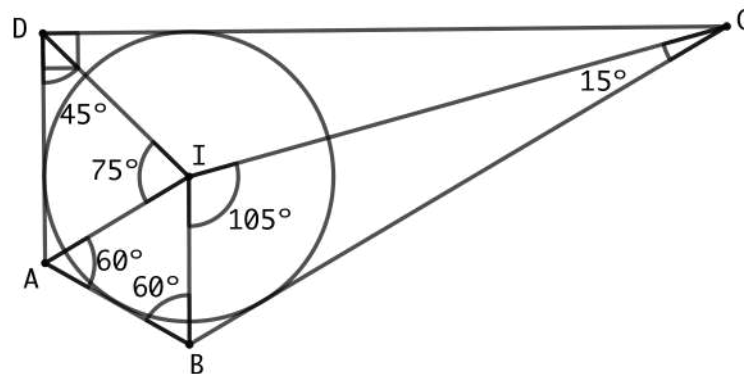


Figura 3.33: solução problema 3.24

Solução:

Seja I o centro do círculo inscrito. Então $\triangle ABI$ é um triângulo equilátero, $\hat{B}IC = 105^\circ$, $\hat{I}CB = 15^\circ$, $\hat{A}ID = 75^\circ$, $\hat{I}DA = 45^\circ$, assim podemos escrever

$$\overline{AD} = \frac{\overline{BI}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AI}} \quad (1)$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo $\triangle BIC$, temos

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ} = \frac{\overline{BI}}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \overline{BI} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 105^\circ} \overline{BC} \quad (2)$$

Novamente a lei dos senos no triângulo $\triangle ADI$

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 75^\circ} = \frac{\overline{AI}}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\sin 75^\circ \cdot \overline{AI}}{\sin 45^\circ} \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos

$$\overline{AD} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 105^\circ} \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \overline{BC}$$

Do fato de que $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ$, resulta

$$\overline{AD} = 2 \cdot \sin 15^\circ \overline{BC}$$



Problema 3.25. (Novo México-1991) Suponha que $ABCD$ é um quadrilátero circunscritível em uma circunferência de centro O . Se as áreas dos triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OCD$ são iguais a 12cm^2 e 17cm^2 , respectivamente, qual é a área do quadrilátero $ABCD$?

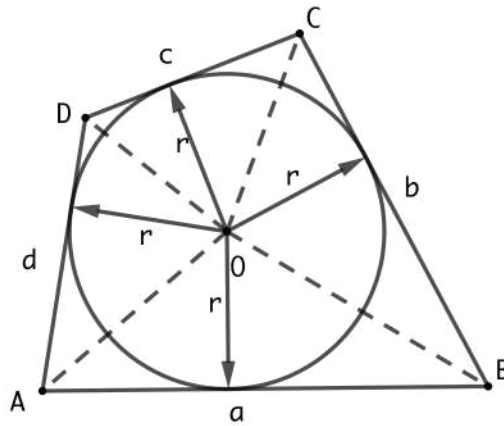


Figura 3.34: solução problema 3.25

Solução:

Desde que $ABCD$ é circunscritível, então $a + c = b + d$. Multiplicando esta expressão por $\frac{r}{2}$ temos que

$$\frac{a \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{b \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2} \Rightarrow S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OCD} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAD}$$

Deste modo:

$$S_T = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OCD} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAD} = 2(S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OCD}) = 58\text{cm}^2$$



Problema 3.26. (Hungria-Israel-1997) Os três quadrados ACC_1A'' , ABB_1A' , $BCDE$ são construídos aos lados do triângulo ABC . Seja P o centro de $BCDE$. Prove que as retas $A'C$, $A''B$ e PA são concorrentes.

Solução:

Note que girando 90° sobre, levamos C a A'' e A' a B . Portanto os triângulos $\Delta CAA'$ e $\Delta A''AB$ são congruentes, e os segmentos $A'C$ e $A''B$ são iguais e perpendiculares. Seja O sua interseção.

Daí, temos $m(\widehat{AA'C}) = m(\widehat{A''BA})$. Portanto o quadrilátero $AOBA'$ é cíclico, de onde $m(\widehat{AOB}) = 135^\circ$ e $m(\widehat{AOA''}) = 45^\circ$.

Agora perceba que os ângulos $\angle COB$ e $\angle BPC$ são suplementares, assim o quadrilátero $OBPC$ também é cíclico e assim $m(\widehat{POB}) = m(\widehat{PCB}) = 45^\circ$ e $m(\widehat{POC}) = m(\widehat{PBC}) = 45^\circ$. Concluimos agora que A, O, P são colineares, o que prova o resultado desejado.

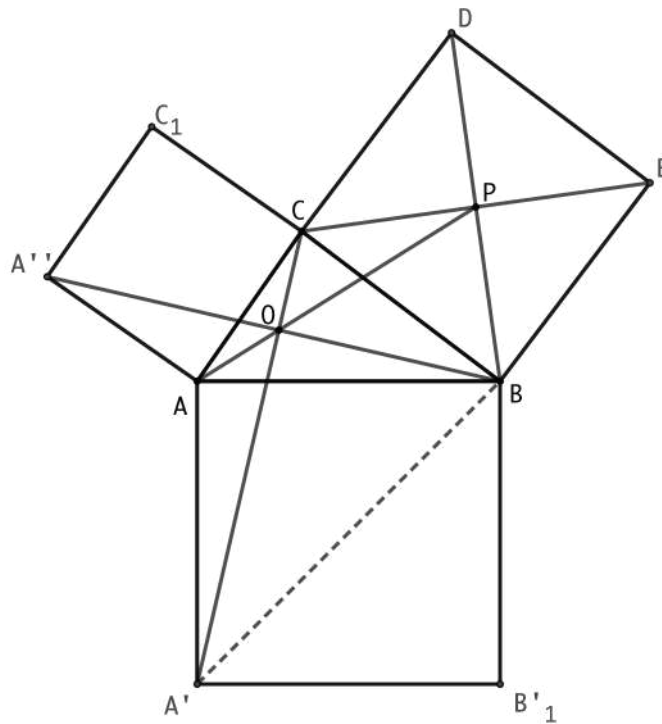


Figura 3.35: solução problema 3.26

■

Problema 3.27. (OBMEP-2012) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P , nesse segmento, é tal que $\overline{AP} = 2$ e $\overline{BP} = 1$. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x . O ponto Y pertence à reta s e o triângulo $\triangle XPY$ é retângulo em P .

a) Explique por que os triângulos $\triangle PAY$ e $\triangle XBP$ são semelhantes.

b) Calcule a área do triângulo $\triangle XPY$ em função de x .

Solução:

a) Devemos mostrar que os três ângulos são congruentes. Perceba que $m(\hat{A}PY) = 90^\circ - m(\hat{A}YP)$, temos também, que $m(\hat{A}PY) + m(\hat{Y}PX) + m(\hat{X}PB) = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - m(\hat{A}YP) + 90^\circ + m(\hat{X}PB) = 180^\circ \Rightarrow m(\hat{X}PB) = m(\hat{A}YP)$. E como os triângulos $\triangle PAY$ e $\triangle XBP$ são retângulos, segue que os três ângulos são iguais, portanto, os triângulos $\triangle PAY$ e $\triangle XBP$ são semelhantes.

■

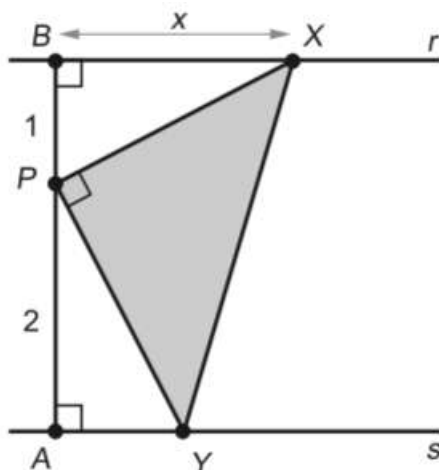


Figura 3.36: problema 3.27

b) Para determinarmos a área do triângulo $\triangle XPY$, devemos ter

$$S_{\triangle XPY} = \frac{\overline{PX} \cdot \overline{PY}}{2} \quad (1)$$

temos, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle XBP$, que

$$\overline{PX} = \sqrt{x^2 + 1} \quad (2)$$

De $\triangle PAY \sim \triangle XBP$, temos

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{PY}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \overline{PY} = \frac{2\overline{PX}}{x} \Rightarrow \overline{PY} = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (3)$$

substituindo (2) e (3) em (1), temos

$$S_{\triangle XPY} = \sqrt{(x^2 + 1)} \cdot 2 \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1})}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow S_{\triangle XPY} = x + \frac{1}{x}$$

■

Problema 3.28. (*Teste Olimpíada Matemática Rioplataense-OMR - 2005*) Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo e H, O o ortocentro e circuncentro de $\triangle ABC$, respectivamente. Mostre que

$$\frac{\text{área}(\triangle AHB)}{\text{área}(\triangle AOB)} + \frac{\text{área}(\triangle BHC)}{\text{área}(\triangle BOC)} + \frac{\text{área}(\triangle CHA)}{\text{área}(\triangle COA)} \geq 3$$

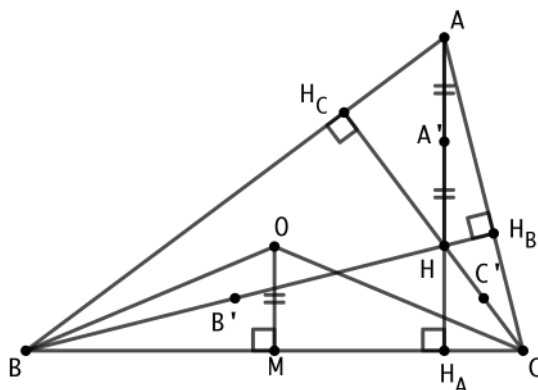


Figura 3.37: solução problema 3.28-1

Solução:

Observe a figura 3.37. Note que $\frac{\text{área}(\triangle BHC)}{\text{área}(\triangle BOC)} = \frac{\overline{HH_A}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{HH_A}}{\overline{A'H}}$. Seguindo de modo análogo, $\frac{\text{área}(\triangle AHB)}{\text{área}(\triangle AOB)} = \frac{\overline{HH_C}}{\overline{C'H}}$ e $\frac{\text{área}(\triangle CHA)}{\text{área}(\triangle COA)} = \frac{\overline{HH_B}}{\overline{B'H}}$, isto é, devemos provar que

$$\frac{\overline{HH_A}}{\overline{A'H}} + \frac{\overline{HH_B}}{\overline{B'H}} + \frac{\overline{HH_C}}{\overline{C'H}} \geq 3$$

Agora observe que H é o incentro do $\triangle H_A H_B H_C$ e $A', B', C', H_A, H_B, H_C$ estão em um mesmo círculo (o círculo dos 9 pontos). Com isso basta provarmos que em todo triângulo vale

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IX}} + \frac{\overline{BI}}{\overline{IY}} + \frac{\overline{CI}}{\overline{IZ}} \geq 3 \quad (1)$$

Onde I é o incentro do $\triangle ABC$ e X, Y, Z são os pontos de interseção de AI, BI e CI com o circuncírculo do $\triangle ABC$, respectivamente (ver figura 3.38).

Sejam a, b, c e p , as medidas dos lados BC, AC, AB e o semi-perímetro do $\triangle ABC$, respectivamente. Sabemos que $\overline{IY} = \overline{AY}$, pois o $\triangle AYI$ é isósceles de base AI . Como $\widehat{AY} = \widehat{YC} \Rightarrow YM \perp AC$, onde M é o ponto médio do lado AC , daí:

$$\triangle BID \sim \triangle AYM \Rightarrow \frac{\overline{BI}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AM}} \Rightarrow \frac{\overline{BI}}{\overline{IY}} = \frac{p-b}{b/2} \Rightarrow \frac{\overline{BI}}{\overline{IY}} = \frac{2(p-b)}{b}$$

Seguindo de modo análogo, temos $\frac{\overline{AI}}{\overline{IX}} = \frac{2(p-a)}{a}$ e $\frac{\overline{CI}}{\overline{IZ}} = \frac{2(p-c)}{c}$. Dessa forma

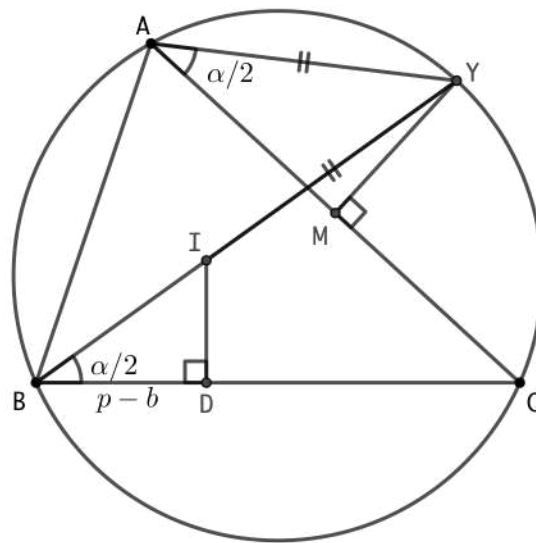


Figura 3.38: solução problema 3.28-2

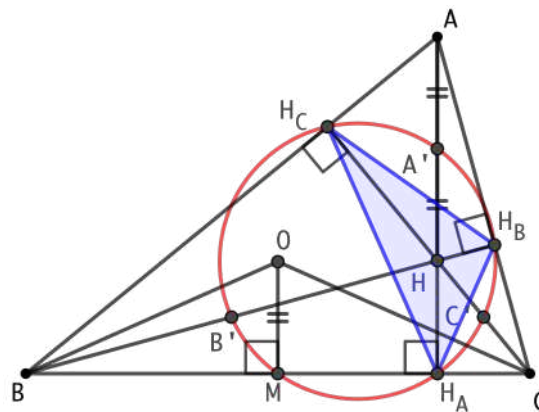


Figura 3.39: solução problema 3.28-3

podemos reescrever (1), assim

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AI}}{\overline{IX}} + \frac{\overline{BI}}{\overline{IY}} + \frac{\overline{CI}}{\overline{IZ}} &= \frac{2(p-a)}{a} + \frac{2(p-b)}{b} + \frac{2(p-c)}{c} \geq 3 \Leftrightarrow \\ &\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} - 3 \geq 3 \Leftrightarrow \\ &\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \geq 6 \end{aligned}$$

O que é facilmente verificado pela desigualdade das médias aritmética e geométrica ($MA \geq MG$)

Portanto,

$$\frac{\text{área}(\triangle AHB)}{\text{área}(\triangle AOB)} + \frac{\text{área}(\triangle BHC)}{\text{área}(\triangle BOC)} + \frac{\text{área}(\triangle CHA)}{\text{área}(\triangle COA)} \geq 3$$



Problema 3.29. (Bulgaria-1997) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BCD})$. Sejam H e O o ortocentro e o circuncentro, respectivamente, do triângulo $\triangle ABC$. Prove que H, O, D são colineares.

Solução:

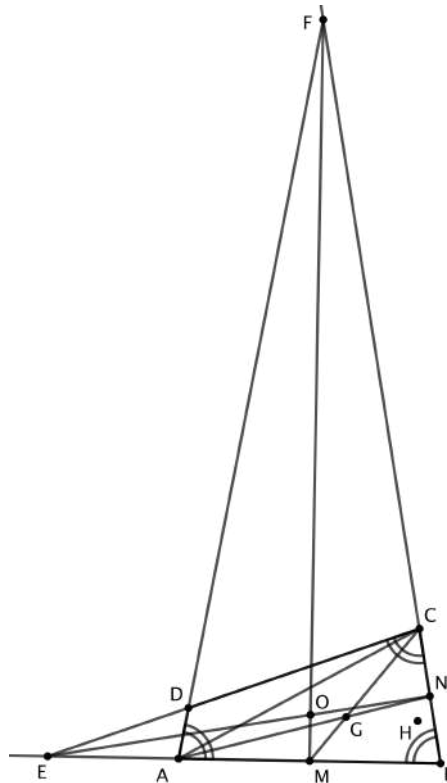


Figura 3.40: solução problema 3.29

Seja M o ponto médio de AB e N o ponto médio de BC . Sendo E a interseção de AB e CD , e F a interseção de BC e AD . Então $\triangle EBC$ e $\triangle FAB$ são triângulos isósceles, assim EN e FM encontram-se em O . Daí, aplicando o Teorema de Pappus no hexágono $MCENAF$, temos que G, O, D são colineares, assim D está sobre a Reta de Euler do triângulo $\triangle ABC$, portanto H, O, D são colineares.



Problema 3.30. (Olimpíada Báltica - 2001) Seja $ABCD$ um paralelogramo. Uma circunferência passando por A encontra os segmentos AB, AC e AD nos pontos P, Q e R , respectivamente. Prove que $\overline{AP} \cdot \overline{AB} + \overline{AR} \cdot \overline{AD} = \overline{AQ} \cdot \overline{AC}$

Solução:

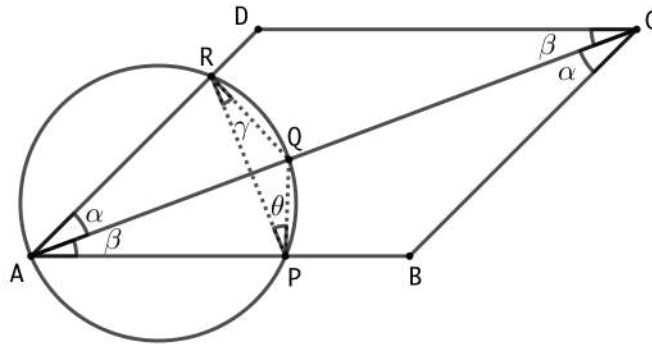


Figura 3.41: solução problema 3.30

Trace os segmentos RQ , QP e RP . Considere os ângulos α , β , γ e θ definidos de acordo com a figura 3.41.

Como $APQR$ é inscritível, segue que $\gamma = \beta$ e $\theta = \alpha$. Portanto, temos que $\triangle RQP \sim \triangle ABC \sim \triangle CDA$:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{PQ}} \quad (1)$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu em $APQR$: $\overline{AQ} \cdot \overline{RP} = \overline{RQ} \cdot \overline{AP} + \overline{PQ} \cdot \overline{AR}$ (2)

Multiplicando cada termo da expressão (2) pelas razões da expressão (1) obtemos:

$$\overline{AQ} \cdot \overline{RP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{RP}} = \overline{RQ} \cdot \overline{AP} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{RQ}} + \overline{PQ} \cdot \overline{AR} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \overline{AQ} \cdot \overline{AC} = \overline{AP} \cdot \overline{AB} + \overline{AR} \cdot \overline{AD}$$

■

PROBLEMAS OLÍMPICOS PROPOSTOS

Problema 4.1. (*Cingapura/95*) Sejam D um ponto sobre o lado BC do triângulo $\triangle ABC$ distinto do ponto médio. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos ABD e ADC , respectivamente. Prove que a mediatriz de AM , sendo M o ponto médio de BC , bissecta o segmento O_1O_2 .

Problema 4.2. (*Olimpiada Iberoamericana de Matemática -1987*) As medianas BM e CN de um triângulo ABC cortam-se em um ponto P . O quadrilátero $ANPM$ é circunscritível. Prove que o $\triangle ABC$ é isósceles.

Problema 4.3. (*Banco Cone Sul*) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde M é o ponto médio de DC , N é o ponto médio de BC e O é a interseção das diagonais AC e BD . Demonstre que O é baricentro do $\triangle AMN$ se, e somente se, $ABCD$ for um paralelogramo.

Problema 4.4. (*OPM-2001*) Um triângulo $\triangle ABC$ é tal que $\hat{B}AC = 90^\circ$. Traçam-se a mediana AM , a bissetriz AK e a altura AH . Prove que $M\hat{A}K = K\hat{A}H$.

Problema 4.5. (*Olimpiada de Maio-2002*) Num $\triangle ABC$ retângulo em A e isósceles, seja D um ponto no lado AC ($D \neq A, C$) e seja E o ponto do prolongamento do lado BA tal que o $\triangle ADE$ é isósceles. Se P é o ponto médio do segmento BD , R é o ponto médio do segmento CE e Q o ponto onde se cortam as retas ED e BC , demonstre que o quadrilátero $ARQP$ é um quadrado.

Problema 4.6. (*Teste IMO-Brasil/2005*) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo, D e E os pés das alturas de ABC relativas aos lados BC e AB , respectivamente, e H o ortocentro de

$\triangle ABC$. Sejam ainda F a segunda interseção dos circuncírculos de $\triangle ABC$ e $\triangle AEH$. Mostre que os pontos D, E, F são colineares se e somente se:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{1}{3}$$

Problema 4.7. (Olimpiada Iberoamericana de Matemática) Um ponto P dista 5, 7 e 8 dos vértices de um triângulo equilátero. Qual a medida do lado desse triângulo?

Problema 4.8. (CRUX-MATHEMATICORUM) Os segmentos DE, CE, BF e CF dividem o retângulo $ABCD$ em regiões menores conforme ilustra a figura 4.1. Quatro destas regiões, dois triângulos e dois quadriláteros estão hachuradas na figura 4.1. As áreas destas quatro regiões hachuradas são 9, 35, 6 e x . Determine o valor de x

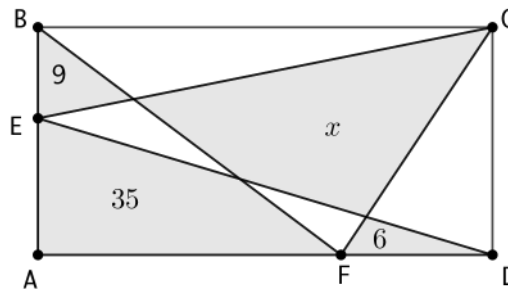


Figura 4.1: problema 4.8

Problema 4.9. (Cone Sul-97) Seja C uma circunferência de centro O , AB um diâmetro dela e R um ponto qualquer em C distinto de A e de B . Seja P a interseção da perpendicular traçada por O a AR .

Sobre a reta \overleftrightarrow{OP} marca-se Q , de maneira que QP é a metade de PO , Q não pertence ao segmento OP . Por Q traçamos a paralela a AB que corta a reta \overleftrightarrow{AR} em T . Chamamos H a interseção das retas \overleftrightarrow{AQ} e \overleftrightarrow{OT} .

Provar que H, R e B são colineares.

Problema 4.10. (Bélgica-2001) Dado um quadrilátero $ABCD$ com ângulos retos em B e D . Sabe-se também que $\overline{BC} = 1$, $\overline{CD} = 4$ e $\overline{DA} = 3$. Qual a área de $ABCD$?

CONCLUSÃO

O que nos trouxe a elaborar esse trabalho em resolução de problemas olímpicos de Geometria Plana, foi a experiência com esse tipo de problema durante o PROFMAT. Questões mais elaboradas com soluções cada vez mais fascinantes, foram nos chamando mais atenção, e pensando em levar essa experiência para a sala de aula foi o que nos motivou a desenvolver o que acabamos de apresentar.

Temos consciência de que a Geometria Euclidiana Plana apresenta uma grande variedade de conteúdos a serem estudados, no entanto tentamos aqui trazer alguns pontos importantes, como apresentar alguns teoremas clássicos pouco visto no Ensino Médio, mas com muita aplicabilidade na resolução de problemas olímpicos. Esperamos, também, despertar nos alunos o interesse no aprofundamento, para que busquem complementar o proposto deste trabalho.

Através dos materiais consultados e das histórias relatadas por muitos professores e alunos envolvidos nesse tipo de competição, é possível constatar que uma Olimpíada de Matemática pode despertar nos jovens o interesse, a criatividade e o gosto pela Matemática, abrindo portas para o conhecimento.

Uma próxima etapa deste trabalho é aplicar em sala de aula as técnicas apresentadas.

Espera-se que os objetivos propostos tenham sido atingidos com a realização deste trabalho ao tornar mais conhecidos alguns teoremas da Geometria Plana e suas aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDREESCU, Titu e ANDRICA, Dorin. **360 PROBLEMS FOR MATHEMATICAL CONTESTS**, Zalau, GIL, 2003
- [2] ANDREESCU, Titu e FENG, Zuming. **MATHEMATICAL OLYMPIAD 1997-1998: PROBLEMS AND SOLUTIONS FROM AROUND THE WAORD**, MAA, 1999
- [3] ANDREESCU, Titu e FENG, Zuming. **MATHEMATICAL OLYMPIAD 1998-1999: PROBLEMS AND SOLUTIONS FROM AROUND THE WAORD**, MAA, 2000
- [4] ANDREESCU, Titu e GELCA, Razvan. **MATHEMATICAL OLYMPIAD CHALLENGES - SECOND EDITION**, Boston, Birkhauser, 2000.
- [5] CAMINHA, A. **GEOMETRIA**. Coleção Profmat. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
- [6] DJUKIC, D; JANKOVIC, V; MATIC, I. **THE IMO COMPENDIUM, A COLLECTION OF PROBLEMS SUGGESTED FOR THE INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS: 1959-2004**
- [7] DOLCE, Osvaldo e POMPEO, J. Nicolau. **FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR - VOL 9**, São Paulo, Atual Editora, 1993.
- [8] FARIAS, Leandro. **Calculus: Matemática pra Olimpíadas e para ITA/IME**. Disponível em: <http://calculusmatematica.blogspot.com.br>. Acesso em 03 de janeiro de 2018.

- [9] GOMES, Carlos A. **TÓPICOS DE MATEMÁTICA IME-ITA-OLÍMPIADAS - VOL 3**, Fortaleza-CE, Vestseller Editora, 2015.
- [10] PINHEIRO, M. R. e RUFINO, M. **ELEMENTOS DA MATEMÁTICA - VOL 2 - 3ª EDIÇÃO**, Belém-PA, Print Solution, 2016
- [11] SHINE, Carlos Yuzo. **21 Aulas de Matemática Olímpica**. Rio de Janeiro, SBM Editora, 2009.
- [12] SOIFER, Alexandre. **THE COLORADO MATHEMATICAL OLYMPIAD AND FURTHER EXPLORATION**, Colorado Springs-CO, Springer, 2011.
- [13] VIANA, Marcelo. **Um projeto para fazer alunos campeões**. FOLHA DE S. PAULO, 07 de abril de 2017. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2017/04/1873412-um-projeto-para-fazer-alunos-campeoes.shtml>. Acesso em 4 de outubro de 2017.



editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA